

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I



**DISEÑO DE SISTEMAS DE TARIFICACIÓN BONUS-
MALUS MEDIANTE LA METODOLOGÍA DE
PROGRAMACIÓN POR METAS**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

María Pilar García Pineda

Bajo la dirección del doctor
Antonio Heras Martínez

Madrid, 2002

ISBN: 84-669-2258-X

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5317334875



BIBLIOTECA

DISEÑO DE SISTEMAS DE TARIFICACIÓN
BONUS-MALUS MEDIANTE LA METODOLOGÍA
DE PROGRAMACIÓN POR METAS

Tesis para la obtención del grado de Doctor

Director: Dr. D. Antonio Heras Martínez

Autora: Lda. D^a. M^a Pilar García Pineda

Madrid 2001

INDICE

Introducción	1
Capítulo 1	
Prerrequisitos Matemáticos	19
1.1 Cadenas de Markov	20
1.1.1 Cadenas de Markov con probabilidades de transición estacionarias	22
1.1.2 Matriz de transición	23
1.1.3 Clasificación de los estados y de las cadenas	26
1.1.4 Método para encontrar la distribución estacionaria	28
1.2 Teoría de la Decisión	30
1.2.1 Planteamiento del problema de decisión	37
1.3 Programación lineal multiobjetivo	39
1.3.1 Planteamiento del problema	39
1.3.2 Optimalidad paretiana	41
1.3.3 Principales métodos de resolución	42
1.3.3.1 Métodos generadores	42
1.3.3.1.1 Método de las ponderaciones	42
1.3.3.1.2 Método de las restricciones	44
1.3.3.1.3 Método del Simplex Multicriterio	44
1.3.3.2 Métodos que incorporan información del decisor	45
1.3.3.2.1 Construcción de una función de valor	45
1.3.3.2.2 Programación de compromiso	46
1.3.3.2.3 Programación por metas (Goal Programming)	48
A. Programación por metas lexicográficas	54
A.1 Método gráfico para resolver programas lexicográficos	56
A.2 Método secuencial para resolver programas lexicográficos	57
A.3 Método multifase para resolver programas lexicográficos	60
A.4 Método de Arthur y Ravindran para resolver programas lexicográficos	60
B. Programación por metas ponderadas	61

1.4	Teoría del Riesgo	68
1.4.1	Distribución de la siniestralidad total	71
1.4.1.1	Distribución del número de siniestros	71
1.4.1.1.1	Proceso de Poisson	71
1.4.1.1.2	Fluctuaciones de las Probabilidades Básicas. Distribución de Poisson Ponderada	77
1.4.1.2	Proceso del Riesgo. Distribución de la Siniestralidad Total	82

Capítulo 2

	Teoría de la Credibilidad	87
2.1	Introducción	88
2.2	Credibilidad	89
2.2.1	Credibilidad de fluctuación limitada	93
2.2.2	Credibilidad de máxima precisión	96
2.2.2.1	Credibilidad de Bühlmann	104

Capítulo 3

	Sistemas Bonus-Malus	107
3.1	Introducción	108
3.2	Sistemas Bonus-Malus	109
3.3	Revisión de la literatura sobre los sistemas Bonus Malus	115
3.3.1	Los primeros desarrollos	115
3.3.2	El sistema B-M de Ragnar Norberg (1976): La escala de Bayes	118
3.3.3	El criterio no asintótico para la evaluación de sistemas B-M de Borgam, Hoem y Norberg (1981)	132
3.3.4	El sistema B-M con escalas lineales de Gilde y Sundt (1989)	140

Capítulo 4

	Diseño de un sistema Bonus-Malus alternativo: El sistema GPBM	152
4.1	Introducción	153
4.2	La escala de Bayes	154

4.3	Un modelo alternativo para la construcción de un sistema B-M óptimo: El sistema GPBM	162
4.3.1	Construcción teórica	162
4.3.2	Comparación de sistemas B-M	172
4.3.3	Ejemplificación de la nueva metodología	176

Capítulo 5

Comparación con los sistemas Bonus-Malus teóricos más importantes		178
5.1	Introducción	179
5.2	Comparación con Noruega 1975	185
5.2.1	Conclusiones	206
5.3	Comparación con Norberg (1976)	207
5.3.1	Conclusiones	254
5.4	Comparación con Borgam, Hoem y Norberg (1981)	256
5.5	Comparación con Gilde y Sundt (1989)	269

Capítulo 6

Comparación con sistemas Bonus-Malus reales		279
6.1	Algunos sistemas B-M que se aplican en España	280
6.2	Aplicación del sistema GPBM a datos reales de España	284
6.3	Comparación de los resultados	296
6.3.1	Escala de primas cualquiera	296
6.3.2	Escala de primas lineal	301

Conclusiones	311
---------------------	-----

Bibliografía	316
---------------------	-----

Introducción

El objetivo de la presente tesis doctoral es el diseño de un modelo de sistema Bonus-Malus que presenta ciertas ventajas, tanto teóricas como prácticas, frente a los sistemas Bonus-Malus existentes hasta el momento en la literatura y la práctica actuariales.

Es bien sabido que el Seguro se basa en el hecho de que cada uno de los asegurados acuerda pagar una cierta cantidad de dinero, la *prima*, de forma que el dinero recaudado de esa manera se destina a pagar los posibles siniestros generados por todo el conjunto de asegurados durante un periodo de tiempo futuro. De esta forma cada asegurado sustituye el desembolso de una cantidad incierta de dinero, la cuantía de sus siniestros, que puede ser nula pero también puede tomar valores muy elevados, por el desembolso de una cantidad cierta de dinero, la prima.

Resulta evidente que el colectivo de asegurados que comparten sus riesgos de la forma descrita, pagando todos la misma prima, debe constituir un colectivo lo más homogéneo posible, es decir, los riesgos a los que están expuestos los asegurados deben tener similares características. Si el colectivo fuese heterogéneo, entonces los asegurados expuestos a los peores riesgos, que generan un mayor un mayor número de siniestros y/o de mayor cuantía, deberían pagar mayores primas

que el resto. En caso contrario podrían producirse fenómenos de *Selección Desfavorable* de asegurados que ponen en peligro la solvencia de la empresa.

Resulta pues de crucial importancia que la empresa aseguradora sepa clasificar a sus clientes en grupos de riesgo lo más homogéneos posible, de forma que todos los asegurados pertenecientes al mismo grupo de riesgo paguen la misma prima. Para ello emplea técnicas estadísticas que permiten detectar los llamados *factores de riesgo*, es decir, características de los asegurados que están correlacionadas con la siniestralidad y que conjuntamente explican un gran porcentaje de la varianza de la misma. De esta forma, asegurados con similares factores de riesgo serían clasificados en el mismo grupo.

Así, por ejemplo, en el seguro de vida los principales factores de riesgo son, por orden de importancia, la edad y el sexo de los asegurados. El conocimiento de ambos factores resulta suficiente en la mayoría de los casos para la construcción de grupos homogéneos de riesgo.

En el seguro del automóvil se utilizan tradicionalmente factores de riesgo como la edad, sexo, provincia de residencia, profesión del conductor, antigüedad de su carnet de conducir y del vehículo, potencia del motor, etc. Desgraciadamente, y a diferencia de lo

que ocurre en el seguro de vida y en la mayor parte de los otros ramos, estos factores de riesgo comúnmente usados en el seguro del automóvil están escasamente correlacionados con la siniestralidad y explican solamente un pequeño porcentaje de su varianza. Existen, no obstante, otros factores de riesgo que están más correlacionados con la siniestralidad, tales como la rapidez de reflejos del conductor, su agresividad al volante, su posible adicción al alcohol o a otras drogas, etc., pero, a diferencia de los primeros, estos últimos factores de riesgo o bien son inobservables o su observación tendría un coste inasumible. En consecuencia, las clases resultantes de la clasificación a partir de los factores observables resultan ser altamente heterogéneas. El proceso de clasificación basado únicamente en los factores observables se denomina *clasificación* (o *tarificación*) *a priori*.

Para conseguir clases de riesgo más homogéneas las compañías recurren a la observación de una variable “sustitutiva” de los factores inobservables, altamente correlacionada con ellos y por tanto con la siniestralidad: los siniestros (usualmente el número de siniestros) de cada póliza durante los últimos años. Cuando se tiene en cuenta la siniestralidad del asegurado durante los últimos años para clasificarle en grupos lo más homogéneos posible y poder fijar así la prima del siguiente año con mayor precisión, se dice que el proceso de *clasificación* (o *tarificación*) es

a posteriori.

Los actuarios han creado una rama específica de la Estadística Matemática, conocida como *Teoría de la Credibilidad*, para estudiar el problema de la tarificación a posteriori. Así, Hossack, Pollard y Zehwirth (1983) definen dicha Teoría de la Credibilidad como “una colección de ideas y técnicas para el ajuste sistemático de las primas según se obtiene información acerca de los siniestros”. Aunque los primeros desarrollos de dicha teoría datan de principios del siglo pasado (Whitney, 1918), hay que esperar hasta la década de los sesenta para que surja la primera formulación rigurosa de la misma, conocida como *Credibilidad Bayesiana* por utilizar técnicas de Estadística Bayesiana.

Como es bien sabido, la Estadística Bayesiana plantea cualquier problema de inferencia en el marco más general de la Teoría Bayesiana de la Decisión. A su vez, esta última teoría parte del hecho de que, en cualquier problema de decisión, si las preferencias del decisor sobre las posibles consecuencias de sus decisiones verifican ciertos axiomas de comportamiento racional, entonces es posible definir una función sobre tales consecuencias (llamada función de utilidad), tal que una posible decisión será preferida a otra si, y solamente si, la utilidad esperada de las consecuencias es mayor para la primera decisión que para la

segunda. A menudo el decisor prefiere definir una función negativa de utilidad, llamada función de pérdida. En tal caso, el decisor deberá elegir como decisión óptima aquella que minimice la pérdida esperada de sus consecuencias. Por ejemplo, en un problema de estimación del valor de una variable aleatoria en el que los estados de la naturaleza y las decisiones factibles se corresponden con dichos posibles valores, y en el que la función de pérdida es una función cuadrática, entonces la decisión óptima se corresponde con la esperanza matemática de dicha variable aleatoria.

Apoyandose en las anteriores consideraciones, Bühlmann propuso representar la heterogeneidad de un colectivo de pólizas mediante unos “parámetros de riesgo” $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, que describen las características de riesgo de cada una de las pólizas de la cartera. De esta forma, las diferencias entre el riesgo de las diferentes pólizas se deberían a diferencias entre los valores de sus parámetros. Adoptando el enfoque bayesiano, es usual interpretar tales parámetros como realizaciones de una misma variable aleatoria Λ cuya función de distribución (llamada función de estructura) se supone conocida. Usualmente se considera que el parámetro λ asociado con un asegurado es su número medio de siniestros.

Para simplificar, se supone que todos los siniestros tienen coste unidad (lo que, en última instancia, supone simplemente cambiar de unidad monetaria). Asimismo se identifica, como es habitual, la prima pura de un seguro con la esperanza matemática de la siniestralidad (lo que, como sabemos, se corresponde con la solución de un problema bayesiano de decisión en el que los estados de la naturaleza son los posibles siniestros, las decisiones factibles se corresponden con las diferentes primas y la función de pérdida es una función cuadrática). En tal caso la prima para un asegurado de parámetro λ_0 es $E[N \mid \Lambda = \lambda_0]$ donde N es el número de siniestros de la póliza.

Sin embargo, si el valor del parámetro Λ es desconocido, entonces la expresión se convierte en $E[N \mid \Lambda]$ que es a su vez una variable aleatoria. Si de nuevo se plantea el problema de la estimación de su valor utilizando funciones de pérdida cuadráticas, la prima pura resulta ser $E[E[N \mid \Lambda]]$ pero utilizando una conocida propiedad de la esperanza condicionada resulta que $E[E[N \mid \Lambda]] = E[N]$, es decir, la prima pura es en este caso la esperanza matemática de la siniestralidad de una póliza cualquiera de la cartera, es decir, la prima pura a priori.

Ahora bien, si nos planteamos el problema del cálculo de la prima pura para un asegurado que ha tenido N_1, \dots, N_t siniestros en

los últimos t años, entonces los argumentos anteriores conducen a una prima pura igual a $E[E[N \mid \Lambda] \mid N_1, \dots, N_t]$. Esta expresión se conoce como prima pura a posteriori obtenida por métodos bayesianos.

El sistema de tarificación resultante tiene interesantes propiedades: así, por ejemplo, el sistema es *financieramente equilibrado*, ya que utilizando la misma propiedad anterior de la esperanza condicionada llegamos a que

$$E[E[E[N \mid \Lambda] \mid N_1, \dots, N_t]] = E[N]$$

por lo que la esperanza de los ingresos de la empresa utilizando este sistema de tarificación a posteriori coincide con los ingresos que se obtienen utilizando un sistema de tarificación a priori.

Asimismo, es *equitativo* puesto que las propiedades de los estimadores bayesianos garantizan que la prima a posteriori de cada asegurado converge al verdadero valor de la esperanza matemática de su siniestralidad cuando el número de periodos de observación es suficientemente grande.

En conclusión la Teoría de la Credibilidad Bayesiana verifica las dos importantes propiedades de equilibrio financiero y equidad.

Desgraciadamente, las primas a posteriori obtenidas a partir de la Teoría de la Credibilidad tienden a tomar valores diferentes según aumenta el número de periodos de observación . Es claro que, con el tiempo, el sistema se vuelve inmanejable, ya que a cada asegurado se le cobrará una prima distinta. Un segundo problema radica en la poca flexibilidad de la metodología, que a menudo penaliza excesivamente los siniestros. La solución a estos problemas suele consistir en permitir únicamente un número finito y no muy grande de primas a posteriori con una variabilidad razonable. En tal caso, decimos que la compañía aseguradora ha adoptado un *Sistema Bonus-Malus*.

Por definición, una compañía de seguros utiliza un Sistema Bonu-Malus cuando se verifican las dos condiciones siguientes:

- Se permiten únicamente un número finito de clases C_1, \dots, C_K , de forma que la prima de cada asegurado en un periodo dado depende solamente de la clase a la que pertenece en dicho periodo.

- La clase a la que pertenece un asegurado durante un cierto periodo depende únicamente de la clase a la que pertenecía durante el periodo anterior y del número de siniestros durante dicho periodo (*Condición Markoviana*).

A su vez, un Sistema Bonus-Malus consta de tres elementos:

- La *clase inicial*, a la que son asignados los nuevos asegurados.
- La *escala de tarifas*, en la que se establecen las primas asociadas a cada clase.
- Las *reglas de transición*, que determinan cuando se pasa de una clase a otra.

Bajo hipótesis generales, se puede considerar el sistema Bonus-Malus como una Cadena de Markov. En consecuencia, si suponemos, como es natural, que todos sus estados son recurrentes en tiempo esperado finito (es decir, que siempre es posible acceder a una clase dada a partir de cualquier otra en un número finito de pasos), entonces la teoría de Cadenas de Markov nos asegura la existencia de una distribución estacionaria de probabilidades definida como el valor límite (cuando $t \rightarrow \infty$) de las probabilidades de que una póliza arbitraria pertenezca a las clases C_1, \dots, C_K . Es decir, se puede definir una distribución estacionaria de probabilidades para un asegurado de parámetro λ :

$$p_i(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[\text{un asegurado de parámetro } \lambda \text{ esté en } C_i]$$

Es claro que el conocimiento de la distribución estacionaria puede resultar muy útil a la hora de diseñar un sistema Bonus-Malus, ya que nos informa de cuál será aproximadamente su comportamiento cuando haya transcurrido cierto tiempo. Más concretamente, se suelen distinguir tres problemas en la construcción de un sistema Bonus-Malus:

- La elección del número de clases y de las reglas de transición.
- La elección de la clase inicial.
- El cálculo de la prima correspondiente a cada clase.



El primer problema sigue siendo un problema abierto (véase Lemaire (1995)): no es posible todavía encontrar el número de clases y las reglas de transición óptimas en general, aunque sí es posible, como veremos, concluir que ciertas reglas son mejores que otras en base a ciertas medidas de eficiencia.

La elección de una clase inicial óptima no puede basarse en la distribución estacionaria, ya que esta última no depende de dicha clase inicial. Lo que sí depende de la clase inicial es, obviamente, la velocidad de convergencia a la distribución estacionaria.

La solución al tercer problema sí se basa en la existencia de la distribución estacionaria: Ragnar Norberg (1976) ha propuesto (basándose en una idea de Pesonen (1962)) tomar como prima asociada a una clase C_i la pérdida esperada anual de una póliza “infinitamente vieja” perteneciente a esa clase, es decir, de una póliza perteneciente a esa clase después de que el sistema haya alcanzado ya su estado estacionario. Es decir, llamando π_i a dicha prima, entonces

$$\pi_i = E[\lambda \mid \text{la póliza está en } C_i \text{ después de infinitos periodos}]$$

es decir,

$$\pi_i = \frac{1}{p_i} \int \lambda p_i(\lambda) dU(\lambda)$$

Norberg demostró que la escala anterior (conocida como *escala de Bayes*) minimiza el *error cuadrático de tarificación esperado* (*expected squared rating error*) definido como la esperanza del cuadrado de la diferencia entre la verdadera media de la siniestralidad y la prima realmente pagada, para una póliza que ha alcanzado ya el estado estacionario. Dicho error cuadrático sirve asimismo para comparar diferentes escalas de Bayes asociadas con reglas de transición distintas. Asimismo, es posible demostrar que la escala de Bayes proporciona sistemas Bonus-Malus que

son financieramente equilibrados.

El modelo que acabamos de exponer constituye actualmente el modelo básico para la construcción de un sistema Bonus-Malus óptimo, y ha sufrido muy pocas precisiones posteriores. Entre estas cabe mencionar la debida a Sundt (1984), quien ha comprobado que las escalas de Bayes no siempre forman una secuencia monótona y ha propuesto como solución restringir el conjunto de escalas admisibles. Por otro lado, Borgam, Hoem y Norberg (1981) han modificado el modelo básico de Norberg para permitir la inclusión de pólizas con poca antigüedad que no han tenido tiempo de alcanzar el estado estacionario.

Sin embargo, la formulación de Norberg no es la única posible. En efecto, cuando una póliza arbitraria alcanza el estado estacionario no permanece necesariamente en una clase fija, como parece suponerse en la formulación anterior, sino que puede cambiar de clase. Como hemos comentado anteriormente, lo que en el estado estacionario permanece constante no es la clase alcanzada, sino la proporción de pólizas que permanecen en cada posible clase. De esta forma, también sería razonable considerar la diferencia entre la verdadera media de la siniestralidad λ y el promedio de las primas realmente pagadas $\sum \pi_i p_i(\lambda)$.

Por otra parte, un sistema Bonus-Malus razonable debería verificar la propiedad de máxima equidad (es decir, que la media de las primas pagadas se aproxime lo más posible a su siniestralidad media), y el sistema Bonus-Malus definido por la escala de Bayes no la cumple necesariamente, ya que no está diseñado para optimizar tal objetivo.

Finalmente, no está clara la forma en que se puede “suavizar” la escala de Bayes en caso de que las penalizaciones resulten excesivas y los asegurados tiendan a cambiar de compañía aseguradora. Tampoco está clara la forma de incluir en ellas otras posibles características que por distintas razones (comerciales, de gestión, etc.) la empresa podría considerar deseables, tales como la existencia de un límite superior para la diferencia entre las primas de la mejor y la peor clase, de un límite inferior para la diferencia entre dos clases consecutivas, etc.

Para resolver los problemas que acabamos de comentar, proponemos utilizar la norma L^1 , en lugar de la norma cuadrática L^2 , para medir la distancia entre las primas cobradas y los distintos valores del parámetro λ , es decir para construir el error de tarificación. Después de todo, el decisor en un problema bayesiano de decisión tiene perfecta libertad para elegir la función de pérdida que prefiera, siempre que dicha elección le aporte

alguna ventaja. De esta forma obtenemos un sistema Bonus-Malus que resulta ser lo más equitativo posible, ya que en su construcción deseamos acercar lo más posible la media de las primas pagadas por cada asegurado de parámetro λ , $\sum \pi_i p_i(\lambda)$, a su siniestralidad media λ .

Es importante resaltar que el programa lineal anterior se puede considerar como un caso particular de aplicación de una técnica conocida como *Programación por Metas* (“*Goal Programming*”), diseñada para encontrar la solución factible más cercana a unos ciertos objetivos o metas deseables. En nuestro caso las metas son precisamente los distintos valores del parámetro λ . Este resulta ser un programa lineal, y su linealidad permite incorporar fácilmente otras propiedades deseables que acabamos de comentar como son el equilibrio financiero o las posibles restricciones comerciales de las primas.

A continuación resumimos brevemente el contenido de los distintos capítulos:

El primer capítulo se dedica a establecer los principales conceptos matemáticos que se utilizarán posteriormente. Se ha dividido en cuatro apartados:

El primero de ellos está dedicado a Cadenas de Markov. El

segundo a la Teoría de la Decisión, haciendo especial hincapié en la Teoría de la Decisión Bayesiana. Un tercer apartado está dedicado a Programación Lineal Multiobjetivo; en este apartado se hace una especial incidencia en el método de Programación por Metas, pues éste será la base del diseño de nuestro sistema Bonus-Malus. Por último, el cuarto apartado está dedicado a Teoría del Riesgo.

El segundo capítulo se dedica al estudio de la Teoría de la Credibilidad, haciendo un repaso histórico de dicha teoría y poniendo el mayor énfasis en Teoría de la Credibilidad Bayesiana (Credibilidad de máxima precisión) por ser una formulación más rigurosa y que utiliza técnicas de la Estadística Bayesiana.

En el tercer capítulo se justifica la conveniencia de utilizar un sistema Bonus-Malus y se dedica a repasar la literatura sobre sistemas Bonus-Malus, haciendo un estudio más exhaustivo del trabajo de Ragnar Norberg (1976) en el que se plantea un modelo de sistema Bonus-Malus como solución de un problema de decisión bayesiano. Asimismo, se estudian con detenimiento los trabajos de Borgam, Hoem y Norberg (1981) y Gilde y Sundt (1989) basados a su vez en el modelo de sistema Bonus-Malus propuesto por Norberg (1976) y que también son solución de un problema de decisión bayesiano.

El diseño del nuevo sistema Bonus-Malus , como solución de un cierto problema de decisión bayesiana, se hará en el capítulo cuarto, donde previamente se hace una crítica de los sistemas Bonus-Malus expuestos en el tercer capítulo. Se propone aquí una nueva metodología para la construcción de sistemas Bonus-Malus basada en Programación por Metas (Goal Programming) que soluciona varios de los inconvenientes observados en los sistemas Bonus-Malus estudiados en el tercer capítulo.

En el quinto capítulo se hace una comparación entre los sistemas Bonus-Malus expuestos en el tercer capítulo y los nuevos sistemas Bonus-Malus GPBM (iniciales de "Goal Programming Bonus Malus") construidos con la nueva metodología.

Para cada uno de los ejemplos estudiados se propone un sistema Bonus-Malus alternativo y se demuestra que resulta ser más adecuado con respecto a ciertos criterios de comparación.

Los ejemplos sobre los que se aplican estas comparaciones están tomados de datos reales de Noruega que es el país de referencia de sus autores.

En el sexto capítulo se comparan, a partir de datos reales de

compañías aseguradoras españolas, algunos sistemas Bonus-Malus que se aplican en España con los sistemas Bonus-Malus propuestos como alternativos y que se diseñan con la nueva metodología.

Por último, en el Anexo se incluyen todos los programas informáticos, realizados en el lenguaje de programación Maple V, utilizados en los diferentes capítulos de esta tesis.

No quisiera terminar esta introducción sin agradecer, en primer lugar, a mi director de tesis Dr. Antonio Heras, la ayuda y dedicación prestadas.

También quisiera agradecer a los compañeros del Departamento de Economía Financiera y Actuarial la ayuda prestada y el ánimo que me han infundido en todo momento, especialmente a José Luis Vilar, José Antonio Gil y Eva del Pozo.

Asimismo, me gustaría agradecer a Eugenio Roanes las enseñanzas impartidas en el curso de programación en Maple V y la ayuda prestada posteriormente.

Por último, dedico esta tesis a mi familia y quiero hacer una mención especial a aquellos que se sintieron interesados en su desarrollo y no pudieron verla concluida, a Natalia y a Sinesio.

Capítulo 1

Prerrequisitos Matemáticos

1.1 Cadenas de Markov

La sucesión de observaciones $\{X_t \mid t \in T\}$ de un suceso aleatorio que se realizan en los instantes de tiempo t , se denomina *proceso estocástico*, o *proceso aleatorio*, cuando los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente de antemano, pero se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores posibles en cualquier instante de tiempo. Un proceso estocástico se llama de *parámetro discreto* si las observaciones se hacen en puntos discretos o separados en el tiempo, en lugar de continuamente en el tiempo. En adelante supondremos que son procesos estocásticos de parámetro discreto.

En un proceso estocástico la primera observación X_1 se denomina *estado inicial* del proceso y para $n = 1, 2, 3, \dots$, la observación X_n se denomina *estado del proceso en el instante de tiempo n* .

En un proceso estocástico de parámetro discreto, el estado del proceso varía aleatoriamente en cada instante. Para describir un modelo de probabilidad completo para un proceso, es necesario especificar una probabilidad para cada uno de los valores posibles del estado inicial X_1 y especificar también, para cada uno de los

sucesivos estados x_{n+1} ($n = 1, 2, \dots$), la siguiente probabilidad condicional:

$$\Pr(X_{n+1} = x_{n+1} | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

En otras palabras, para cada instante de tiempo n , el modelo de probabilidad debe especificar la probabilidad condicional de que el proceso esté en el estado x_{n+1} en el tiempo $n + 1$, dado que en los instantes de tiempo $1, \dots, n$ el proceso estaba en los estados x_1, \dots, x_n .

Por definición un *proceso de Markov* es un tipo especial de proceso estocástico, que se puede describir como sigue: en cualquier instante de tiempo n dado, cuando el estado actual X_n y todos los estados previos X_1, \dots, X_{n-1} del proceso son conocidos, las probabilidades de los estados futuros X_j ($j > n$) dependen solamente del estado actual X_n y no de los estados anteriores X_1, \dots, X_{n-1} . Formalmente, un proceso de Markov es un proceso estocástico tal que para $n = 1, 2, \dots$ y para cualquier sucesión posible de estados x_1, x_2, \dots, x_{n+1} ,

$$\Pr(X_{n+1} = x_{n+1} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \Pr(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

Utilizando la regla de la multiplicación para probabilidades

condicionales se deduce que las probabilidades de un proceso de Markov deben satisfacer la relación

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ = \Pr(X_1 = x_1) \cdot \Pr(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \cdot \Pr(X_3 = x_3 | X_2 = x_2) \dots \\ \Pr(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}). \end{aligned}$$

1.1.1 Cadenas de Markov con probabilidades de transición estacionarias

Se denomina *cadena de Markov* a un proceso de Markov para para el cual existe sólo un número finito o infinito numerable, de estados posibles, nosotros de aquí en adelante supondremos que tiene un número finito, k , de estados posibles, s_1, \dots, s_k y que en cualquier instante de tiempo la cadena debe de estar en uno de esos k estados.

La probabilidad condicional $\Pr(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i)$ de que la cadena de Markov esté en el estado s_j en el instante de tiempo $n+1$ si está en el estado s_i en el instante de tiempo n se denomina *probabilidad de transición*. Si para una cadena de Markov esta probabilidad de transición tiene el mismo valor para todos los instantes de tiempo n ($n = 1, 2, \dots$), se dice que la cadena de Markov tiene *probabilidades de transición estacionarias*. En otras

palabras, una cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias si, para cualquier par de estados s_i y s_j , existe una probabilidad de transición p_{ij} tal que

$$\Pr(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = p_{ij} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

1.1.2 Matriz de transición

Se considera una cadena de Markov con k estados posibles s_1, \dots, s_k y probabilidades de transición estacionarias. Para $i = 1, \dots, k$ y $j = 1, \dots, k$, se denota por p_{ij} la probabilidad condicional de que el proceso esté en el estado s_j en un instante de tiempo si está en s_i en el estado anterior. La *matriz de transición* de la cadena de Markov se define como la matriz $P_{k \times k}$ formada por los elementos p_{ij} . Por tanto

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & \dots & p_{2k} \\ \dots & & \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Puesto que cada número p_{ij} es una probabilidad, entonces $p_{ij} \geq 0$. Además $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ para $i = 1, \dots, k$ porque si en un estado de tiempo la cadena está en el estado s_i , entonces la suma de las

probabilidades de que en el instante siguiente esté en cada uno de los estados s_1, \dots, s_k debe ser la unidad. De tal forma que si, en un instante concreto de tiempo, el vector de probabilidades para cada uno de los estados es

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_k)$$

en el instante siguiente será el vector de probabilidades $\bar{q} \cdot P$.

Una matriz cuadrada cuyos elementos son no negativos y en la que la suma de los elementos de cada fila es la unidad se denomina *matriz estocástica*. Por tanto, la matriz de transición P de cualquier cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias debe ser una matriz estocástica. Inversamente, cualquier matriz estocástica $k \times k$ puede servir como la matriz de transición de una cadena de Markov con k estados posibles y probabilidades de transición estacionarias.

Definimos como *matriz de transición de n pasos* a la matriz de dimensión $k \times k$, $P_n = (p_{ij}^{(n)})$ donde $p_{ij}^{(n)}$ son las probabilidades de pasar del estado s_i al estado s_j en n pasos, es decir,

$$p_{ij}^{(n)} = \Pr(X_{n+m} = s_j \mid X_m = s_i)$$

Por tanto $P_1 = P$.

Esta matriz P_n es, precisamente, la n -ésima potencia de la matriz P , P^n , como muestra el siguiente teorema.

Teorema: Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

Por lo tanto, $P_{m+n} = P_m P_n$ y así $P_n = P^n$, la n -ésima potencia de P .

Véase la demostración en Grimmett y Stirzaker págs 196 y 197.

Como consecuencia de este teorema si el vector de probabilidades de cada uno de los estados en un instante concreto de tiempo es

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_k)$$

el vector de probabilidades después de n periodos de tiempo será el vector $\bar{q} \cdot P^n$.

1.1.3 Clasificación de los estados y de las cadenas

Atendiendo al tiempo en que la cadena de Markov tarda en volver al estado inicial podemos clasificar los estados en:

- *Estados recurrentes*, si

$$\Pr(X_n = s_i \text{ para algún } n \geq 1 \mid X_1 = s_i) = 1$$

es decir, que la probabilidad de volver al estado s_i , sabiendo que la cadena comienza en s_i , es 1.

- *Estados recurrentes en tiempo esperado finito*, si además se cumple la siguiente condición.

Si $\forall j$ definimos la variable aleatoria $T_j = \min\{n \geq 1 \text{ tales que } X_n = s_j\}$, $E(T_i \mid X_1 = s_i) < \infty$.

- *Estados transitorios* si dicha probabilidad es estrictamente menor que 1, es decir

$$\Pr(X_n = s_i \text{ para algún } n \geq 1 \mid X_1 = s_i) < 1$$

Decimos que el estado s_i *se comunica con* s_j , y se escribe $s_i \rightarrow$

s_j , si la cadena visita el estado s_j con probabilidad positiva, siendo el estado inicial s_i . Esto es, $s_i \rightarrow s_j$ si $p_{ij}^{(m)} > 0$ para algún $m \geq 1$. Decimos que s_i y s_j se *intercomunican* si $s_i \rightarrow s_j$ y $s_j \rightarrow s_i$, en cuyo caso se puede representar por $s_i \leftrightarrow s_j$.

Un conjunto C de estados se dice *irreducible* si $s_i \leftrightarrow s_j$ $\forall i, j \in C$.

Un vector \bar{q} se dice que es una *distribución estacionaria* de una cadena si las componentes de $\bar{q} = (q_1, \dots, q_k)$ son tales que

$$\text{a) } q_j \geq 0 \text{ para todo } j \text{ y } \sum_{j=1}^k q_j = 1$$

$$\text{b) } \bar{q} = \bar{q} \cdot P, \text{ es decir que } q_j = \sum_{i=1}^k q_i p_{ij} \text{ para todo } j.$$

Esta distribución se llama estacionaria porque

$$\bar{q} P^2 = (\bar{q} P) P = \bar{q} P = \bar{q}$$

y así sucesivamente:

$$\bar{q} P^n = \bar{q} \text{ para todo } n \geq 1$$

y por tanto las probabilidades de estar en cada uno de los estados

permanecen constantes a través del tiempo.

Si suponemos que una cadena es irreducible, el siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que exista distribución estacionaria.

Teorema: Una cadena de Markov irreducible tiene una única distribución estacionaria si y solo si todos sus estados son recurrentes en tiempo esperado finito.

Véase la demostración en Grimmett y Stirzaker págs 208 y 209.

1.1.4 Método para encontrar la distribución estacionaria.

El resultado anterior se deduce de un teorema más general, denominado *Teorema de Fröbenius*, válido para matrices cuadradas no negativas, y que afirma la existencia de un autovalor (el *autovalor de Fröbenius*) no negativo, que es el mayor en valor absoluto de todos los autovalores, y que tiene asociado al menos un autovector no negativo. Dicho autovalor toma un valor comprendido entre el “mínimo” y el “máximo” de las sumas de los elementos de las filas (y también de las columnas). En

consecuencia, si la matriz es una matriz estocástica, el autovalor de Fröbenius debe ser igual a la unidad, ya que sus filas siempre suman la unidad. Además, el autovector no negativo asociado al autovalor de Fröbenius cuyas componentes sumen la unidad será el que en el caso de las Cadenas de Markov nos proporcione la distribución estacionaria. Véase Seneta (1981).

1.2 Teoría de la Decisión

En los distintos ámbitos de la vida humana (personal, económico, social, político,...) se presentan continuamente situaciones en las que hay que tomar decisiones. Diremos que se da un *problema de decisión* cuando un individuo o un grupo de individuos se enfrenta a un conjunto de acciones alternativas, excluyentes entre sí, posibles y válidas para la consecución de un determinado fin u objetivo, sin que resulte evidente cuál de ellas satisface mejor sus necesidades, es decir, qué acción es la óptima y, por tanto, debe ser elegida.

La *Teoría de la Decisión* trata, precisamente, del desarrollo de técnicas y métodos apropiados para tomar decisiones.

Los *elementos* de un problema de decisión son los siguientes:

- el *decisor*, que es la persona o grupo de personas que trata de alcanzar unos objetivos.
- las *alternativas* o *acciones*, que son las distintas formas posibles que tiene el decisor para alcanzar sus objetivos. Son las variables que están bajo el control del decisor.
- los *estados de la naturaleza*, que son los parámetros que definen la

situación y están fuera del control del decisor. Denotaremos un parámetro aleatorio por Θ , los valores concretos del parámetro por θ y el conjunto de todos los posibles valores de los parámetros, denominado *espacio paramétrico*, por Ω .

- las *consecuencias*, que son los resultados que se siguen de la elección de una alternativa concreta (o decisión $x \in X$, siendo X el conjunto de todas las posibles decisiones) cuando el valor del parámetro Θ es θ . Al conjunto de todas las posibles consecuencias que resulten de todos los posibles pares de θ y x lo denotaremos por C . Si el parámetro Θ tiene una distribución de probabilidad conocida, entonces la elección de cualquier decisión concreta, x , inducirá a una distribución de probabilidad, $\gamma(\Theta, x)$, en el conjunto de consecuencias, C . Consecuentemente, elegir entre las decisiones de X es equivalente a elegir entre varias distribuciones de probabilidad del conjunto C .

Para que exista un problema de decisión debe darse como prerrequisito la existencia de un estado de ambigüedad caracterizado por un conjunto de posibles acciones a elegir. Un *proceso de decisión* es la resolución del estado de ambigüedad. La última etapa del proceso de decisión, consistente en la elección de una acción una vez que se ha resuelto el estado de ambigüedad, se denomina *decisión*.

El proceso de decisión mediante el que se resuelve la situación de la ambigüedad dada en un problema de decisión requiere poder establecer cuándo una alternativa es *preferida* a otra, siendo así posible determinar una *estructura de preferencias* en el conjunto de acciones alternativas. Dicha estructura de preferencias reflejará el orden de las alternativas de acuerdo al nivel de satisfacción alcanzado por el decisor en cada una de ellas. La construcción de tal estructura se realiza mediante los denominados *criterios de evaluación* de las alternativas.

Los problemas de decisión se pueden clasificar considerando diversos criterios. Algunas de dichas clasificaciones son:

- Atendiendo al número de decisores se tienen
 1. *Problemas de decisión individuales*, cuando existe un único decisor.
 2. *Problemas de decisión colectivos*, cuando existen dos o más decisores.
- Teniendo en cuenta el número de criterios cabe señalar:
 1. *Problemas de decisión unicriterio*, cuando existe un único criterio de evaluación.

2. *Problemas de decisión multicriterio*, cuando existe más de un criterio de evaluación.

● Considerando el número de decisiones cabe distinguir:

1. *Problemas de decisión unietápicos*, cuando se adopta una única decisión.

2. *Problemas de decisión secuenciales*, cuando se adoptan una serie de decisiones a lo largo del tiempo.

● Si se atiende al grado de conocimiento que el decisor tiene acerca del espacio paramétrico Ω (o de los estados de la naturaleza) se tienen:

1. *Problemas de decisión en ambientes de certeza o certidumbre* que corresponden a una información perfecta, esto es, el decisor conoce el valor θ del parámetro. En este caso a cada alternativa se le asocia una única consecuencia bien definida, convirtiéndose en un problema de optimización matemática. La importancia de los problemas de decisión en ambiente de certeza radica en que, de hecho, son la última fase de un gran número de procesos de decisión, puesto que éstos suelen transformarse en un problema de esta naturaleza que, por tanto, debe concluir con la elección de la alternativa

óptima.

2. *Problemas de decisión en ambiente de riesgo*, en los que el parámetro Θ se considera como una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es conocida por el decisor. Estos problemas se pueden resolver mediante la metodología bayesiana, ya que una hipótesis fundamental de la aproximación bayesiana es que cualquier incertidumbre que se presente en un problema de decisión concreto, en relación a los valores de las variables, se puede expresar en términos de distribución de probabilidad conjunta de dichos valores.

3. *Problemas de decisión en ambiente de incertidumbre*, en los que la información que posee el decisor acerca del parámetro Θ no le permite asignarle una distribución de probabilidad.

La aproximación bayesiana, al admitir la probabilidad subjetiva, no acepta el vacío ambiental para el decisor y convierte cualquier problema de decisión en ambiente de incertidumbre en un problema de decisión en ambiente de riesgo. Por lo tanto, desde esta aproximación, la tipología de los procesos de decisión atendiendo al conocimiento que el decisor tiene sobre los estados de la naturaleza es

1. Procesos de decisión en ambiente de certeza.
2. Procesos de decisión en ambiente de riesgo.

Tanto los problemas de decisión unicriterio como los problemas de decisión multicriterio, se pueden resolver mediante dos aproximaciones:

1. Aproximación axiomática.
2. Aproximación no axiomática.

Por vía axiomática ambos tipos de problemas se resuelven a través de la Teoría de la Utilidad.

Dicha teoría (o mejor dicho, conjunto de teorías alternativas) pretende la construcción de una función que represente numéricamente las preferencias del decisor, asignando valores mayores a las alternativas más preferidas. La resolución del problema de decisión se reduce, pues, a la maximización de la *función de utilidad*, cuya existencia está garantizada bajo numerosos conjuntos de axiomas más o menos “razonables” acerca de las preferencias del decisor.

Las funciones de utilidad suelen denominarse *funciones de valor* cuando estamos en ambiente de certidumbre. Asimismo es

habitual utilizar el nombre de *función de pérdida* para representar la función de utilidad cambiada de signo, es decir la “desutilidad”.

La dificultad práctica de construir las funciones de utilidad en los problemas de decisión reales ha motivado el desarrollo de numerosas técnicas “ad hoc”, no axiomatizadas, cuyo empleo puede parecer razonable en problemas concretos. Así, en ambiente de certeza, podemos mencionar las diversas técnicas de Programación Matemática Uniobjetivo (lineal, no lineal, convexa, cuadrática...) y Multiobjetivo (Programación Lineal Multiobjetivo, Técnicas de Superación, Programación por Metas, Técnicas Interactivas,...). Del mismo modo en ambiente de riesgo se han desarrollado técnicas de Programación Estocástica Uniobjetivo y Multiobjetivo.

1.2.1 Planteamiento del problema de decisión

Tal y como hemos comentado anteriormente, un problema de decisión está caracterizado por:

1. A cada alternativa se le asocia más de un resultado, asociado a distintos “estados de la naturaleza”.
2. Se puede definir una distribución de probabilidad, ζ , que el decisor conoce, sobre el conjunto de estados de la Naturaleza.
3. Como consecuencia, la elección de cualquier decisión concreta, x , inducirá a una distribución de probabilidad, $\gamma(\theta, x)$, en el conjunto de consecuencias, C , al que también denominaremos conjunto de resultados o pagos.

Por lo tanto, un problema de decisión en ambiente de riesgo se puede representar del siguiente modo:

		ζ
$X \setminus \Omega$		θ
\vdots				\vdots		
\vdots				\vdots		
x		$C(\theta, x)$	\vdots	\vdots
\vdots				\vdots		
\vdots				\vdots		

Debemos hacer hincapié en que bajo las condiciones establecidas en la axiomática de la Teoría de la Utilidad, la mejor alternativa es aquella que hace máxima la función de utilidad esperada

$$\int_{\theta} U(C(\theta, x)) d\xi(\theta)$$

(o minimizar la función de pérdida $\int_{\theta} L(C(\theta, x)) d\xi(\theta)$).

1.3 Programación lineal multiobjetivo

1.3.1 Planteamiento del problema

Cuando el decisor considera que su problema de decisión puede plantearse matemáticamente mediante la optimización simultánea de varias funciones objetivo, aparece la denominada *Optimización vectorial o Programación multiobjetivo*. Un problema de Programación Multiobjetivo es un problema del tipo

$$\begin{aligned} \text{Optimizar } f(\bar{x}) &= (f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x})) \\ \text{s. a. } \bar{x} &\in X \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde

$f_i(\bar{x})$ es la i -ésima función objetivo, $f_i : X \rightarrow R$, $i = 1, \dots, p$

$X \subset R^n$ es el conjunto de soluciones posibles o *conjunto factible*, que normalmente se define a partir de restricciones matemáticas.

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es el vector de variables de decisión.

Un problema de *Programación Multiobjetivo* se denomina *Programa Lineal Multiobjetivo* cuando todas las funciones objetivo y todas las restricciones son lineales.

En lo que sigue consideraremos que el problema a resolver es, habitualmente, el *Programa Multiobjetivo* de la forma

$$\begin{aligned} \min f(\bar{x}) \\ s.a. \quad g(\bar{x}) \leq \bar{0} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde, como antes

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}))$$

y

$$g(\bar{x}) = (g_1(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x}))$$

es el vector de restricciones del programa

$$g_i : R^n \rightarrow R, i = 1, \dots, m$$

No se pierde generalidad, porque si algún objetivo debe ser

maximizado, se le multiplica por (-1) y se resuelve el problema de minimizar para el nuevo objetivo.

1.3.2 Optimalidad paretiana

El vector $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ de variables de decisión se dice que es una *solución eficiente o Pareto óptima* cuando es factible, es decir, cuando $g(\bar{x}^*) \leq \bar{0}$, $\bar{x}^* \geq \bar{0}$ y, además, verifica que no existe ninguna otra solución factible tal que proporcione una mejora en un objetivo sin ocasionar, a la vez, un empeoramiento en al menos otro de los objetivos. Es decir, no existe ninguna variable de decisión \bar{x} factible, esto es, que verifique $g(\bar{x}) \leq \bar{0}$, y que $\bar{x} \geq \bar{0}$, tal que $f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^*) \quad \forall i = 1, \dots, p$, siendo estricta al menos una de las desigualdades.

Los distintos enfoques multiobjetivo pretenden obtener soluciones eficientes en el sentido que acabamos de definir, ya que debido a que en la vida real los objetivos de un problema de decisión suelen estar en conflicto, frecuentemente no es posible la optimización simultánea de todos ellos.

1.3.3 Principales métodos de resolución

Los métodos de resolución de programación Multiobjetivo se pueden dividir en dos categorías:

- Los *métodos generadores*, es decir, aquellos que generan la totalidad de las soluciones del programa.
- Los métodos que proporcionan únicamente un subconjunto de dichas soluciones que esté de acuerdo con las preferencias del decisor.

1.3.3.1 Métodos generadores

1.3.3.1.1 Método de las ponderaciones

En Zadeh (1963), se demuestra que si en un problema multiobjetivo, por ejemplo (1.2), que se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}
& \min(f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x})) \\
& \text{s. a. } g_j(\bar{x}) \leq \bar{0}, j = 1, \dots, m \\
& \bar{x} \geq \bar{0}
\end{aligned}$$

a cada objetivo se le asocia un peso w_i , $i = 1, \dots, p$, positivo, y , a continuación, se agregan todos los objetivos ponderados, la optimización de la función resultante de la suma ponderada de los p objetivos iniciales genera un punto extremo eficiente para cada conjunto de pesos.

Así, la aplicación de este método a nuestro problema (1.2) conduce al siguiente programa matemático de tipo paramétrico

$$\begin{aligned}
& \min w_1 f_1(\bar{x}) + \dots + w_p f_p(\bar{x}) \\
& \text{s. a. } g_j(\bar{x}) \leq \bar{0}, j = 1, \dots, m \\
& \bar{x} \geq \bar{0} \\
& \bar{w} > \bar{0}
\end{aligned}$$

donde, obviamente $\bar{w} = (w_1, \dots, w_p)$.

Como cada vector de pesos, \bar{w} , proporciona un punto extremo eficiente del programa (1.2), variando paramétricamente los pesos se puede generar, o al menos aproximar, el conjunto eficiente.

Conviene observar que el método de las ponderaciones

garantiza soluciones eficientes sólo cuando los pesos o ponderaciones de los objetivos son estrictamente positivos, $w_i > 0$, $i = 1, \dots, p$ ya que se ha demostrado que, cuando uno de los pesos es cero, si, además, existen óptimos alternativos, la solución obtenida por este método puede no ser eficiente. Véase Cohon (1978).

El método de las ponderaciones requiere la resolución de r^{p-1} programas, siendo r el número de conjuntos de pesos considerados y p el número de objetivos. Para reducir los cálculos se recurre a códigos de programación lineal paramétrica.

1.3.3.1.2 Método de las restricciones

Este método consiste en asociar al programa (1.2) p programas escalares, obtenidos al considerar, como función objetivo, únicamente una de las p componentes de $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}))$, e incluir las $p - 1$ componentes restantes como restricciones paramétricas. Véase Cohon (1978).

1.3.3.1.3 Método del Simplex Multicriterio

Si el programa que queremos resolver tiene la forma

$$\begin{aligned} & \min f(\bar{x}) \\ \text{s.a. } & g(\bar{x}) = \bar{0} \\ & \bar{x} \geq 0 \end{aligned}$$

y es un programa lineal multiobjetivo, se pueden encontrar sus soluciones mediante una generalización del método del Simplex, denominada método del *Simplex Multicriterio*. Véase Heras (1989).

1.3.3.2 Métodos que incorporan información del decisor

1.3.3.2.1 Construcción de una función de valor

Bajo la hipótesis de que se tiene una función de valor, $V : R^p \rightarrow R$, que represente las preferencias del decisor, (y, por lo tanto, la correspondiente función de pérdida, $L : R^p \rightarrow R$), se puede plantear a partir del programa (1.2), un nuevo programa en que la función objetivo es

$$L(f(\bar{x})) = L(f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}))$$

y las restricciones coinciden con las del problema (1.2), esto es, en nuestro caso, el nuevo programa será

$$\begin{aligned}
& \min L(f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x})) \\
& \text{s. a. } g(\bar{x}) \leq \bar{0} \\
& \bar{x} \geq \bar{0}
\end{aligned}$$

El método de las ponderaciones es un caso particular de este método, puesto que la función objetivo $\sum_{i=1}^p w_i f_i(\bar{x})$ se puede considerar como composición de $f(\bar{x})$ y de una función de valor lineal.

La mayor dificultad práctica que conlleva este método es, precisamente, la construcción de la función de valor. Surge así la necesidad de utilizar otro tipo de metodologías.

1.3.3.2.2 Programación de compromiso

En la literatura multiobjetivo se denomina *punto ideal* al punto del espacio de los valores de las funciones objetivo en que todos los objetivos alcanzan su valor óptimo. Este punto se alcanza mediante la resolución de p programas escalares cuando, en cada uno de ellos, se optimiza (en nuestro caso minimiza) uno de los p objetivos independientemente de los demás.

En la *Programación de Compromiso* el decisor busca encontrar

aquella solución eficiente o zona del conjunto eficiente que esté a una distancia mínima del punto ideal.

La distancia entre dos puntos $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in R^n$ se mide mediante una de las métricas L_q , definidas por el matemático Minkowsky del siguiente modo

$$L_q = \left[\sum_{j=1}^n |x_j^1 - x_j^2|^q \right]^{\frac{1}{q}} \text{ para } 1 \leq q < \infty$$

y

$$L_\infty = \max\{|x_j^1 - x_j^2|\} \text{ para } q = \infty$$

La Programación de Compromiso se convierte, así, en un problema de optimización en el que las restricciones coinciden con las del problema inicial, el (1.2) en nuestro caso, y el objetivo es minimizar, según una métrica concreta L_q , la distancia entre las soluciones eficientes y el punto ideal.

Con este método se va reduciendo el tamaño del conjunto eficiente mediante la determinación de aquellos subconjuntos del mismo, denominados *conjuntos compromiso*, que se encuentran más próximos al punto ideal.

Una dificultad práctica de este método es que para obtener la mejor solución compromiso para métricas distintas de L_1 y de L_∞ , es necesario recurrir a algoritmos de programación matemática no lineal, lo que complica considerablemente los cálculos.

1.3.3.2.3 Programación por metas (Goal Programming)

- **Introducción**

En palabras de Herbert Simon, los decisores, frecuentemente no actúan conforme a un paradigma “optimizador” sino que lo hacen conforme un paradigma “satisfaciente”. Así, por ejemplo, en la toma de decisiones empresariales existe un cierto consenso en plantear el problema de decisión como el de la consecución de unos objetivos o metas fijados previamente. La evaluación posterior del grado de consecución de dichos objetivos da lugar a la fijación de nuevos objetivos y/o al cambio de la política decisional de la empresa. Es un proceso dinámico en el que existe retroalimentación y posibilidad de control. Véase Cyert y DeGroot (1987).

Cuando los costes de no consecución de los objetivos (bien por no llegar a ellos, o bien por pasarse) se pueden agregar, (por

ejemplo, cuando tales costes se pueden agregar monetariamente), las técnicas de *Programación por Metas* son de gran utilidad en los procesos de ayuda a la toma de decisiones empresariales.

El origen de la Programación por Metas se debe a Charnes y Cooper en 1955, pero el desarrollo y la divulgación de estas ideas iniciales se deben, principalmente, a los trabajos publicados por Ijiri (1965), Lee (1972) e Ignizio (1976). A partir de estas fechas hay numerosas publicaciones que desarrollan algunos aspectos teóricos, así como aplicaciones a diversas áreas, de la Programación por Metas. Romero (1993) hace un claro y completo resumen del tema. En este epígrafe seguimos fundamentalmente a Ignizio y a Romero.

La terminología establecida por Ignizio, y utilizada posteriormente en la mayoría de los trabajos dedicados al tema, es la que sigue:

Objetivo: es una afirmación relativamente general que refleja los deseos del decisor. Por ejemplo, maximizar los beneficios en una empresa.

Nivel de aspiración: es un valor concreto asociado con un nivel

aceptable de éxito del objetivo.

Meta: es la conexión de un objetivo con un nivel de aspiración. Por ejemplo, conseguir unos beneficios de, al menos, una cierta cantidad prefijada.

Desviación de la meta: es la diferencia entre lo realmente conseguido en el objetivo y el nivel de aspiración.

- Formulación de las metas.

Consideremos de nuevo el problema (1.2) expresado de la forma

$$\begin{array}{ll} \min & f(\bar{x}) \\ \text{s.a.} & \bar{x} \in X \end{array}$$

donde, obviamente, $X = \{\bar{x} \in R^n \mid g(\bar{x}) \leq \bar{0}, \bar{x} \geq \bar{0}\}$, en el supuesto de que es un programa lineal multiobjetivo.

Para cada uno de los objetivos el decisor fija un nivel de aspiración m_i , de manera que alcanzar dicho nivel se considera “satisfactorio”.

Se pueden considerar tres posibles formas de metas:

1. $f_i(x) \leq m_i$, es decir, el decisor desea tener un valor del objetivo $f_i(x)$ que sea igual o menor que el nivel de aspiración m_i . Por ejemplo, el gobierno de un país desea que, en un año concreto, la inflación sea menor o igual que un porcentaje determinado m_i .
2. $f_i(x) \geq m_i$, esto es, el decisor desea que el valor del objetivo sea igual o mayor que un nivel de aspiración m_i . Por ejemplo, una empresa desea que sus beneficios sean de, al menos, la cantidad m_i .
3. $f_i(x) = m_i$, es decir, el decisor desea que el valor de la función objetivo $f_i(x)$ sea exactamente igual al nivel de aspiración de m_i . Por ejemplo, una empresa desea que el número total de empleados fijos sea exactamente m_i .

Estas tres relaciones se pueden expresar en forma de igualdad, restando al objetivo una *variable de desviación* no negativa, y_i^+ , y sumando otra *variable de desviación* no negativa, y_i^- , que recogen los excesos y los defectos, respectivamente, del valor realmente alcanzado por el objetivo respecto al nivel de aspiración prefijado:

$$f_i(\bar{x}) - y_i^+ + y_i^- = m_i, \quad y_i^+ \geq 0, \quad y_i^- \geq 0$$

Como no puede darse que el nivel de aspiración se sobrepase y, a la vez, se quede por debajo de él, necesariamente al menos una de las dos variables de desviación que definen cada meta tiene que ser cero. Y ambas variables serán cero cuando el valor alcanzado por el objetivo coincida exactamente con el nivel de aspiración.

Se dice que una variable de desviación es *no deseada* cuando al decisor le conviene que dicha variable alcance su valor más pequeño posible, esto es, cero.

Cuando la meta procede de la relación $f_i(x) \leq m_i$, es decir, cuando el decisor desea tener un valor del objetivo $f_i(x)$ que sea igual o menor que el nivel de aspiración m_i , la variable no deseada y, por tanto, a minimizar es y_i^+ , ya que cuantifica el exceso de logro.

Cuando la meta procede de la relación $f_i(x) \geq m_i$, es decir, cuando el decisor desea tener un valor del objetivo $f_i(x)$ que sea igual o mayor que el nivel de aspiración m_i , la variable no deseada y, por tanto, a minimizar es y_i^- , ya que cuantifica la falta de logro.

Cuando la meta procede de una relación $f_i(x) = m_i$, es decir, cuando el decisor desea que el valor alcanzado por el objetivo $f_i(x)$ sea exactamente igual que el nivel de aspiración m_i , las

variables no deseadas y, por tanto, a minimizar, son ambas y_i^+ e y_i^- .

- Estructura general del problema de programación por metas.

Los pasos a seguir en el proceso de formulación de un problema de Programación por Metas se pueden resumir como sigue:

1. Fijar los objetivos significativos para el problema concreto que se quiere analizar

$$f_i(\bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

2. Determinar el nivel de aspiración correspondiente a cada objetivo

$$m_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

3. Formular las metas conectando cada objetivo con su nivel de aspiración, mediante la introducción de las variables de desviación, obteniendo las expresiones

$$f_i(\bar{x}) - y_i^+ + y_i^- = m_i, \quad y_i^+ \geq 0, \quad y_i^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

4. Determinar, en el problema concreto que se está analizando, las variables de decisión no deseadas.
5. Proceder a minimizar las variables de decisión no deseadas.

El paso número 5 de la formulación de un problema de programación por metas se puede acometer de diversas maneras, originando cada una de estas maneras una variante de la programación por metas. Las variantes más comunmente utilizadas son las siguientes.

A. Programación por metas lexicográficas

En los métodos lexicográficos el decisor constituye grupos ordenados de metas según un orden rígido de prioridades excluyentes. En primer lugar se trata de alcanzar las metas situadas en la prioridad más alta. Una vez conseguido esto, se trata de alcanzar las metas situadas en la segunda prioridad y así sucesivamente. Es decir, las preferencias se ordenan de un modo similar a las palabras de un diccionario (de ahí el nombre de programación por metas lexicográficas).

Esto es, el decisor construye el vector $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$ donde $a_i = g_i(\bar{y}^+, \bar{y}^-)$, $i = 1, \dots, k$ es una función lineal de las variables de decisión no deseadas de las metas que se desea minimizar (con el fin de conseguir la máxima realización posible de las

correspondientes metas) en la i -ésima prioridad. Por lo tanto, el proceso completo de minimización lexicográfica de las variables de decisión no deseadas viene dado por

$$\begin{aligned} & \text{Lex. min } \bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \\ & \text{s.a. } f(\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\ & \bar{x} \in X \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x})) \\ \bar{y}^+ &= (y_1^+, y_2^+, \dots, y_p^+) \\ \bar{y}^- &= (y_1^-, y_2^-, \dots, y_p^-) \\ \bar{m} &= (m_1, m_2, \dots, m_p) \end{aligned}$$

Este vector $\text{Lex. min } \bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$ se denomina **vector de logro**, y reemplaza a la función objetivo de los modelos convencionales de programación lineal.

La minimización lexicográfica del vector de logro implica la minimización ordenada de sus componentes, es decir, primero se encuentra el valor más pequeño de la componente a_1 , a continuación se busca el valor más pequeño de la componente a_2 , compatible con el valor previamente obtenido de a_1 , y así

sucesivamente.

Para resolver el programa (1.4) hay distintos algoritmos de los que vamos a analizar brevemente los más utilizados.

A. 1 Método gráfico para resolver programas lexicográficos

Este método se debe a Lee (1972) e Ignizio (1976). Básicamente es una adaptación del método gráfico de programación lineal, ya que la diferencia fundamental entre la solución de un problema de programación lineal con un único objetivo y la solución de un problema de programación lineal por metas lexicográficas es que, en el primer caso, se busca un *punto* que optimice un único objetivo, mientras que, en nuestro caso se busca una *región* que proporcione una solución de compromiso para un conjunto de metas en conflicto.

En el gráfico únicamente se utilizan las variables de decisión (por lo tanto este método sólo es válido para problemas con, a lo sumo, tres variables de decisión, lo que hace que el interés práctico del mismo sea muy limitado). En el caso de tener únicamente dos variables de decisión, se representan las metas mediante líneas rectas. El efecto que tiene el aumento de cualquiera de las variables de desviación se representa en el gráfico mediante arcos. Las variables de desviación no deseadas,

es decir, las que se desea minimizar, se encierran en círculos.

Los pasos que se siguen en este método se pueden resumir así:

1. Se trazan todas las metas en términos de variables de decisión.
2. Se determina el espacio de soluciones para el grupo de metas de la primera prioridad.
3. Se considera el conjunto de metas con la segunda prioridad y se determina el “mejor” espacio de solución, compatible con la solución obtenida en el segundo paso.
4. Se pasa a la siguiente prioridad y así sucesivamente.
5. Si en algún momento del proceso el espacio de soluciones se reduce a un único punto, se termina ahí el procedimiento porque no es posible mejorar la solución.
6. Si en ningún momento del proceso el espacio de soluciones se reduce a un único punto, se concluye el proceso una vez que se han valorado todos los niveles de prioridad.

A.2 Método secuencial para resolver programas lexicográficos.

Este método es el más directamente relacionado con el

Simplex. Consiste en la resolución de una secuencia de programas lineales convencionales, pues para cada grupo de prioridad, se establece un programa lineal.

Si se quiere resolver el problema (1.4)

$$\begin{aligned} &Lex. \min \bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \\ &s.a. f(\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\ &\bar{x} \in X \end{aligned}$$

En primer lugar se minimiza la primera componente del vector de logro a_1 , correspondiente al primer nivel de prioridad, prescindiendo del resto.

El modelo lineal así obtenido es el programa lineal convencional

$$\begin{aligned} &\min a_1 = g_1(\bar{y}^+, \bar{y}^-) \\ &s.a. f(\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\ &\bar{x} \in X \end{aligned} \tag{1.5}$$

La solución óptima de (1.5) garantiza el cumplimiento de las metas de máxima prioridad y, si ello no es posible, proporciona la solución más próxima a dichos objetivos. Sea a_1^* , el mínimo de la función objetivo.

A continuación se plantea el siguiente modelo de programación lineal para la segunda componente del vector de logro, correspondiente al segundo nivel de prioridad, imponiendo que la solución de este segundo programa sea compatible con la solución obtenida en (1.5).

Es decir, se tiene el programa lineal convencional

$$\begin{aligned}
 \min a_2 &= g_2(\bar{y}^+, \bar{y}^-) \\
 s.a. \quad f(\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- &= \bar{m} \\
 \bar{x} &\in X \\
 a_1 &= a_1^*
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde la última restricción garantiza que la consecución de las metas del segundo nivel no van a empeorar los resultados obtenidos para las metas de la primera componente del vector de logro. La solución óptima de (1.6) es, por lo tanto, la mejor solución para las dos primeras componentes del vector de logro consideradas de forma simultánea.

En el algoritmo se siguen planteando modelos lineales convencionales, incorporando restricciones del tipo $a_i = a_i^*$, que obligan a respetar las metas de mayor prioridad ya logradas.

Se tienen que resolver, como máximo, k programas lineales, es

decir, tantos como grupos de prioridad existen. El número de programas lineales a resolver se reducirá cuando al resolver uno de ellos no se detecte la existencia de óptimos alternativos. En este caso, el proceso de cálculo se detiene y no es necesario resolver los programas lineales adicionales. Véase Ignizio (1982), páginas 107-110.

A.3 Método multifase para resolver programas lexicográficos.

El método multifase (también llamado “Simplex revisado” o “Simplex modificado”), ha sido propuesto por Lee (1972) y por Ignizio (1976, 1982). Precisamente el nombre de “multifase” se debe a Ignizio, ya que considera este método una extensión del método de las dos fases de la programación lineal. Osion (1974) ha propuesto algunas modificaciones que permiten simplificar los cálculos.

A.4 Método de Arthur y Ravindran para resolver programas lexicográficos.

Este método, propuesto en 1976, se basa en la consideración sucesiva de las restricciones asociadas con las metas del modelo. Se establecen distintos grupos de restricciones

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_j \subset \dots \subset S_k$$

donde S_j recoge las restricciones asociadas con las metas

correspondientes a los j primeros niveles de prioridad. La explicación detallada de este método se encuentra en Ignizio (1982).

Una de las críticas más fuertes a la Programación por Metas Lexicográficas es la incompatibilidad entre las ordenaciones lexicográficas y la existencia de una función de valor, ya que Debreu (1959, pp 72-73) demuestra formalmente que este método no es compatible con ninguna función de valor. Otros estudiosos del tema, entre ellos Zeleny (1982) se apoyan en dicha crítica para afirmar que este método no debería utilizarse en la práctica. En cualquier caso, es evidente que la crítica resta potencialidad al método.

B. Programación por metas ponderadas

El modo más intuitivo de realizar la minimización de las variables de desviación no deseadas es minimizar la suma de dichas variables. Así, en nuestro caso, tendríamos que minimizar la suma

$$\min \sum_{i=1}^p (y_i^+ + y_i^-) \quad (1.7)$$

Pero la expresión (1.7) no representa las preferencias del decisor, puesto que implícitamente sugiere que el decisor asigna la misma

importancia al logro de todas las metas, y esto, frecuentemente, no es cierto. Este problema se intenta subsanar multiplicando cada sumando de la expresión (1.7) por un coeficiente de ponderación, w_i , que expresa la importancia relativa que el decisor asigna al cumplimiento de cada meta, obteniendo así la expresión

$$\min \sum_{i=1}^p w_i(y_i^+ + y_i^-)$$

La formulación completa de este método, que consiste en minimizar la suma ponderada de las desviaciones no deseadas y se denomina **Programación por Metas Ponderadas**, es la siguiente

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^p (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) \\ \text{s.a.} \quad & \bar{x} \in X \\ & \left\{ \begin{array}{l} f_i(\bar{x}) + y_i^+ - y_i^- = m_i \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (1.8)$$

siendo $w_i^+, w_i^- \geq 0$, $i = 1, \dots, p$ los pesos que se asocian previamente a las variables de desviación por exceso y por defecto, respectivamente.

Observación: Conviene considerar que el objetivo de este

programa

$$\min \sum_{i=1}^p (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-)$$

presenta dos dificultades.

1. Por un lado carece de sentido sumar variables de desviación cuando estas están medidas en unidades diferentes (unidades monetarias, número de horas trabajadas, número de empleados, etc.)
2. Por otro lado, si los niveles de aspiración fuesen muy diferentes, la solución del programa propuesto proporcionaría soluciones sesgadas hacia un mayor cumplimiento de las metas con niveles de aspiración más elevados.

Ambos inconvenientes se solucionan minimizando la suma ponderada de las variables de desviación en términos porcentuales, en lugar de hacerlo en términos absolutos. Ninguna de estas dos dificultades se presenta cuando se agregan unidades monetarias. Pero, siempre que sea necesario, se aceptará la hipótesis de que el objetivo del programa es minimizar la suma ponderada de las desviaciones expresada en términos porcentuales.

El programa (1.8), expresado en forma matricial, es

$$\begin{aligned}
 & \min ((\bar{w}^+)' \bar{y}^+ + (\bar{w}^-)' \bar{y}^-) \\
 & s.a. f(\bar{x}) - \bar{y}^+ + \bar{y}^- = \bar{m} \\
 & \quad \bar{x} \in X \\
 & \quad \bar{y}^+ \geq \bar{0}, \bar{y}^- \geq \bar{0}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Hemos afirmado antes que no puede verificarse simultáneamente que el nivel de aspiración sea sobrepasado y, a la vez, no sea alcanzado, por lo que necesariamente, una de las dos variables de desviación que definen cada meta tiene que ser cero. Este resultado está garantizado por el siguiente teorema:

Teorema: Sean \bar{x}^ , \bar{y}^{+*} , \bar{y}^{-*} los vectores óptimos del programa (1.9). Entonces se verifica que*

$$\bar{y}^{+*} \cdot \bar{y}^{-*} = 0, \forall i = 1, \dots, p.$$

Véase Tanino, Sawaragi y Nakayama (1985).

El modelo al que hemos llegado tiene una estructura de programación lineal convencional y por lo tanto se puede resolver mediante el algoritmo del Simplex.

Para diferentes sistemas de pesos se generan distintas

soluciones, que se pueden enriquecer sometiendo al correspondiente sistema de pesos a un análisis de sensibilidad.

Este modelo sí es compatible con la existencia de funciones de valor ya que, cuando los coeficientes de ponderación $w_i = (w_i^+, w_i^-)$, $i = 1, \dots, p$ expresan la importancia relativa que el decisor asigna al cumplimiento de cada meta, la función objetivo del modelo (1.8)

$$\min \sum_{i=1}^p (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-)$$

se puede interpretar como una función de valor separable y aditiva. Véase Romero (1993).

- **Análisis de post-optimización.**

Cuando se resuelve un problema de programación lineal por metas, suele ser conveniente analizar los efectos que se originan en la solución óptima como consecuencia de las variaciones en los datos del modelo. Si estas variaciones son discretas, surge el análisis de sensibilidad, y si las variaciones son continuas dan lugar a la programación por metas paramétrica. El desarrollo del análisis de sensibilidad y de la programación lineal por metas paramétrica es muy similar al desarrollo de ambos temas en

programación lineal convencional. Por eso no nos detenemos en este aspecto. Véase Lee (1972) e Ignizio (1982).

- Extensiones de la programación por metas.

Lo mismo que ocurrió con la programación lineal convencional, en el ámbito de la programación por metas se han desarrollado diversas extensiones del modelo que tratan de ampliar las posibilidades del mismo en su aplicación a la realidad.

En nuestro análisis nos hemos limitado al estudio de la programación lineal por metas con valores continuos. Una primera extensión consiste en considerar variables de valores enteros (o discretas) y/o formas no lineales tanto en las metas como en la función objetivo. Para una explicación más detallada véase Ignizio (1976).

Mencionamos otras posibles extensiones que surgen de enfoques minimizadores alternativos a los enfoque basados en metas lexicográficas y en metas ponderadas.

1. La Programación por Metas “minimax”. Sugerida por Flavell (1976).
2. La Programación Multimetras. Propuesta por Zeleny (1982).

Finalmente, la Programación por Metas se ha extendido también a ambientes que no son de certidumbre. Por ejemplo,

3. La Programación Borrosa. Basada en conjuntos borrosos. Véase Verdegay (1982).
4. La Programación Lineal Estocástica por Metas. Véase Heras y G. Aguado (1998 , 1999).

1.4 Teoría del Riesgo

La *Teoría del Riesgo* es la rama de la Matemática Actuarial que se ocupa de estudiar las características de la siniestralidad de una cartera.

Dentro de ella pueden considerarse dos objetivos fundamentales: en primer lugar, el estudio de la distribución de la siniestralidad a partir de las variables básicas (número de siniestros y las cuantías individuales de los siniestros); en segundo lugar, el estudio de la estabilidad del negocio de seguros, analizando el efecto que las fluctuaciones de la siniestralidad producen en el mismo y las medidas para evitar que éstas conduzcan a la “ruina”.

En sus inicios la Teoría del Riesgo estuvo centrada fundamentalmente en el seguro de vida y su característica fundamental era la consideración de los riesgos de forma individual. Bajo esta *aproximación individual* de la Teoría del Riesgo, el modelo obtenido es el resultado de la suma de los distintos riesgos individuales que componen la cartera. Así, para una cartera de n pólizas, la siniestralidad total S para un periodo de

tiempo es:

$$S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

donde Y_i es la cuantía de los siniestros de la póliza i en dicho período de tiempo. Habitualmente se supone independencia entre las variables aleatorias Y_i .

Fue Filip Lundberg a principios del siglo XX quien puso los cimientos de la *Teoría del Riesgo Colectivo*. En ella el elemento básico ya no es la póliza sino el siniestro dentro de una cartera de pólizas. Así, siendo

$N(t)$: N° de siniestros producidos por una cartera de pólizas en un periodo de tiempo $(0, t]$ (variable aleatoria)

X_i : cuantía del i -ésimo siniestro.

Tendremos que:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$$

Es habitual suponer que $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y su distribución no depende de $N(t)$.

El desarrollo de la Teoría del Riesgo Colectivo a lo largo del pasado siglo ha sido espectacular, sobre todo una vez que gracias al cálculo de probabilidades y a la teoría de los procesos estocásticos ha podido ser fundamentada con todo rigor matemático. Cabe citar en este punto a Harald Cramer (1930 y 1955).

Como hemos indicado, de forma muy general podemos establecer dos grandes áreas de estudio dentro de la Teoría del Riesgo Colectivo: el de la distribución de la siniestralidad total y el de la estabilidad del negocio asegurador.

La gran cantidad de importantes resultados obtenidos hasta nuestros días, unidos a las posibilidades en cuanto al tratamiento numérico y simulación que permiten los ordenadores, nos proporciona un amplio conocimiento de la fluctuación aleatoria de la siniestralidad y de sus consecuencias respecto a los resultados y estabilidad del negocio asegurador, permitiendo además dar respuesta a los principales problemas prácticos: cálculo de primas, determinación de la modalidad y pleno de retención en reaseguro, cálculo de las reservas de solvencia adecuadas etc.

En los siguientes epígrafes haremos referencia a algunos de los principales resultados de la Teoría del Riesgo Colectivo que

nos permitirán comprender correctamante los restantes capítulos de la presente tesis.

1.4.1 Distribución de la siniestralidad Total

1.4.1.1 Distribución del número de siniestros

1.4.1.1.1 Proceso de Poisson

Un tipo de procesos estocásticos de especial relevancia para el estudio del número de siniestros es el de los *procesos contadores* que representaremos por $\{N(t) / t \in T\}$ en el que $N(t)$ es el número de sucesos (siniestros) acaecidos en el intervalo $(0, t]$.

Las trayectorias de los procesos contadores son funciones escalonadas de salto la unidad.

Un proceso contador de gran importancia para el estudio del número de siniestros es el *Proceso de Poisson*, que se caracteriza mediante las siguientes condiciones:

1. $N(0) = 0$

2. Es de *incrementos independientes*, esto es, si (t_0, t_1) y (t_2, t_3) son dos intervalos de tiempo disjuntos, entonces las variables aleatorias:

$$N(t_1) - N(t_0) \quad \text{y} \quad N(t_3) - N(t_2)$$

son independientes.

3. Es de *incrementos estacionarios*, esto es, la distribución de $N(t+h) - N(t)$ sólo depende de h (amplitud del intervalo de tiempo) pero no de t .

4. $\Pr\{[N(t+h) - N(t)] = 1\} = \lambda h + o(h) \quad \forall t \geq 0$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

lo que implica que la probabilidad de que ocurra un único siniestro durante un intervalo de amplitud infinitesimal es proporcional a la duración del intervalo, ignorando infinitesimos de mayor orden.

5. $\Pr\{[N(t+h) - N(t)] > 1\} = o(h) \quad \forall t \geq 0.$

El parámetro λ suele recibir el nombre de *intensidad del proceso* que en este caso es constante para todo t .

La condición 5. supone la *exclusión de siniestros múltiples*, esto es, la imposibilidad de que ocurra más de un siniestro en un mismo instante de tiempo; asimismo excluye la probabilidad de que en un intervalo finito de tiempo ocurran infinitos siniestros.

Bajo las citadas condiciones puede demostrarse (véase Panjer y Willmot (1992) pág 64 y ss.) que:

$$\Pr\{[N(s+t) - N(s)] = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall s, t \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

La discusión de la validez de las hipótesis del proceso de Poisson en el ámbito de los seguros no-vida puede encontrarse en Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984) pp. 20-22. En cuanto a la independencia de sucesos significa intuitivamente que la ocurrencia de un siniestro no influye en la probabilidad de ocurrencia de otros. Esta hipótesis no se verificaría, por ejemplo, en el caso del incendio que puede extenderse a otros riesgos. El problema puede evitarse si tomamos como un solo riesgo la combinación de riesgos cercanos unos de otros.

La estacionariedad de los incrementos significa intuitivamente que el flujo de los siniestros es estacionario, es decir, que no se producen aumentos, disminuciones ni oscilaciones en los mismos más que las debidas a las fluctuaciones aleatorias “normales”.

Esto es admisible en periodos cortos de tiempo en los que el número de pólizas no está sujeto a grandes cambios.

Existen situaciones en las que la estacionariedad no es aplicable estrictamente, por ejemplo, cuando se dan variaciones estacionales, en cuyo caso el intervalo de tiempo considerado puede dividirse en subintervalos, aplicando a estos subintervalos el proceso de Poisson en los que la intensidad es constante (ya que la suma de variables independientes de Poisson es también Poisson). Más adelante nos referiremos a esta propiedad.

En cuanto a la exclusión de siniestros múltiples, podría pensarse que esta condición puede ser fácilmente incumplida (pensemos, por ejemplo, en una colisión de dos vehículos). La hipótesis puede restaurarse considerando el siniestro múltiple como un solo siniestro.

Por otro lado, como es sabido, las condiciones económicas tienen una influencia considerable en muchas clases de seguros de no-vida. Los auges y recesiones económicas dan lugar a aumentos y disminuciones del número de accidentes de tráfico, laborales... etc. Bajo todas estas circunstancias la aplicación elemental del proceso de Poisson está muy limitada, por lo que hay una necesidad de desarrollo de la teoría omitiendo las condiciones de independencia y estacionariedad. A pesar de

estas limitaciones, la función de Poisson proporciona una buena primera aproximación, particularmente para intervalos cortos de tiempo.

La hipótesis de estacionariedad de los incrementos puede eliminarse sin abandonar totalmente el modelo de Poisson. Así, si se supone que la intensidad del proceso λ varía con t , se tiene que (véase Panjer (1992) páginas 70 y ss.) :

$$\Pr\{[N(s+t) - N(s)] = n\} = \frac{e^{-m(t,s)} (m(t,s))^n}{n!}$$

donde

$$m(t,s) = \int_t^{t+s} \lambda(u) du$$

Bajo las hipótesis estudiadas, cuando $t = 1$ (por ejemplo un año), se debe usar una variable aleatoria de Poisson para modelizar el número de siniestros durante ese año (que denotaremos por N en lugar de $N(1)$).

Recordemos a continuación, brevemente, las principales características de la distribución de Poisson

$$\Pr\{N = n\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

- $E(N) = \lambda$
- $E(N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \Pr(N = n) = \lambda + \lambda^2$
- Varianza $\sigma^2(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$
- Función generatriz de momentos

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{sn} \Pr(N = n) = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

- Una propiedad importante de la distribución de Poisson es la de aditividad: la suma de variables de Poisson independientes es también de Poisson, cuyo parámetro λ es el resultado de sumar los parámetros de las primeras:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

La demostración es elemental teniendo en cuenta que la función generatriz de la suma de variables independientes es el

producto de sus funciones generatrices, así,

$$\phi(s) = e^{\lambda_1(e^s-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^s-1)} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n(e^s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)(e^s-1)}$$

Desde el punto de vista del negocio actuarial, la aditividad es una propiedad importante. Así, si tenemos la cartera total dividida en n subcarteras independientes cuyas distribuciones del número de siniestros siguen leyes de Poisson de parámetros λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), entonces el número de siniestros de la cartera total también sigue una distribución de Poisson de parámetro

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i .$$

Por otra parte, puede pensarse en una cartera cuyo número de siniestros sigue la ley de Poisson pero su parámetro varía en distintos subperiodos de tiempo. Aceptándose la independencia del número de siniestros entre los mismos, el número de siniestros para el periodo seguirá la misma ley, y su parámetro será la suma de los parámetros de cada subperiodo.

1.4.1.1.2 Fluctuaciones en las Probabilidades Básicas. Distribución de Poisson Ponderada.

En este apartado consideraremos las llamadas *fluctuaciones en*

las probabilidades básicas, cuya primera modelización se debe a Anmeter (1948).

La modelización de estas fluctuaciones se basa en la consideración de la intensidad del proceso como una variable aleatoria Λ .

Suponemos conocida la función de distribución de Λ , $U(\lambda)$, que recibe el nombre de *función de estructura*.

El modelo de probabilidad es ahora el de la *Distribución de Poisson Ponderada*, que supuesto que $\Lambda \geq 0$ tiene la siguiente expresión:

$$\Pr(N = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dU(\lambda)$$

Refirámonos ahora a las características de esta distribución:

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n \Pr(N = n) = \int_0^\infty \lambda dU(\lambda) = E(\Lambda)$$

$$E(N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \Pr(N = n) = E(\Lambda^2) + E(\Lambda)$$

$$\sigma^2(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = \sigma^2(\Lambda) + E(\Lambda)$$

Función generatriz:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= E(e^{sN}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{sN} \Pr(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{sN} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dU(\lambda) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(e^s-1)} dU(\lambda)\end{aligned}$$

Un caso de gran importancia, en el ámbito de la matemática actuarial, es aquel en el cual la función de estructura es del tipo Gamma, esto es:

$$u(\lambda) = U'(\lambda) = \frac{\tau^a}{\Gamma(a)} e^{-\tau\lambda} \lambda^{a-1} \quad a, \tau > 0 \text{ y } \lambda \geq 0$$

cuya media es $E(\Lambda) = \frac{a}{\tau}$ y su varianza $\sigma^2(\Lambda) = \frac{a}{\tau^2}$.

En este caso tiene como distribución del número de siniestros la Binomial Negativa:

$$\begin{aligned}
\Pr(N = n) &= \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dU(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} U'(\lambda) d\lambda = \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\tau^a}{\Gamma(a)} e^{-\tau\lambda} \lambda^{a-1} d\lambda = \\
&= \binom{n+a-1}{n} \left(\frac{\tau}{1+\tau} \right)^a \left(\frac{1}{1+\tau} \right)^n
\end{aligned}$$

siendo sus características:

$$\begin{aligned}
E(N) &= \frac{a}{\tau} \\
\sigma^2(N) &= \frac{a}{\tau} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau} \right) \\
\varphi(s) &= \left(\frac{\tau}{1+\tau-e^s} \right)^a \quad s < \ln(1+\tau)
\end{aligned}$$

Para mas detalles sobre esta distribución, véase Panjer y Willmot (1992).

Un modo sencillo de calcular las probabilidades de la distribución Binomial Negativa es siguiendo la expresión recursiva

$$\Pr(N = n + 1) = \frac{n + a}{(n + 1)(1 + \tau)} \Pr(N = n)$$

siendo

$$\Pr(N = 0) = \left(\frac{\tau}{1 + \tau} \right)^a$$

Si se desea contrastar la bondad del ajuste de una muestra observada al modelo Binomial Negativa, los estimadores de los parámetros de esta distribución vienen dados por:

1. Para el método de los momentos $\hat{\tau} = \frac{\bar{x}}{s^2 - \bar{x}}$ y $\hat{a} = \frac{\bar{x}^2}{s^2 - \bar{x}}$ donde \bar{x} y s^2 representan la media y la varianza muestrales respectivamente.
2. Para el método de máxima verosimilitud $\hat{\tau} = \frac{\hat{a}}{\bar{x}}$ donde \hat{a} es la solución de la ecuación $\sum_{r=1}^v n_r \left(\frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a+r-1} \right) = \sum_{r=1}^v n_r \ln(1 + \frac{\bar{x}}{a})$ siendo v el número máximo de siniestros y n_r el número de asegurados con r siniestros ($r = 1, \dots, v$).

Mientras la estimación por el método de los momentos conduce a cálculos simples, la estimación por máxima verosimilitud supone cálculos más complejos, incluso para tamaños muestrales pequeños, sin embargo nos proporciona un mejor ajuste.

Si se considera que la variable aleatoria Λ sigue una ley Gamma de parámetros (mc, c) , es decir, si $a = mc$ y $\tau = c$, entonces $E(\Lambda) = m$ y $\sigma^2(\Lambda) = \frac{m}{c}$, en tal caso el parámetro c podría interpretarse como el grado de heterogeneidad de la cartera, correspondiendo a valores de c pequeños cartera heterogénea y a valores de c grandes cartera homogénea (distribución de

Poisson).

Por este motivo, la distribución Binomial Negativa converge al modelo de Poisson cuando

$$a \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty \text{ y } \frac{a}{\tau} \rightarrow \lambda \text{ (constante)}$$

El parámetro a puede interpretarse como una medida del grado de la agrupación en la ocurrencia de siniestros a lo largo del tiempo. Cuando a es grande los siniestros ocurren más o menos de manera aleatoria y se aproximan a una distribución de Poisson. El uso de la distribución Binomial Negativa en lugar del modelo de Poisson parece apropiado cuando a es pequeña.

1.4.1.2 Proceso del Riesgo. Distribución de la Siniestralidad Total

Sea $\{N(t) / t \geq 0\}$ un proceso contador, por ejemplo un proceso de Poisson, $\{X_1, X_2, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias, cada una de las cuales representa la cuantía de un siniestro, independientes, idénticamente distribuidas e independientes de $N(t)$.

Definimos

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$$

El proceso estocástico $\{S(t) / t \geq 0\}$ se denomina *Proceso Compuesto*.

Cuando $\{N(t) / t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson o de Poisson Ponderado, $\{S(t) / t \geq 0\}$ recibe el nombre de *Proceso del Riesgo* o de *siniestros acumulados*.

$S(t)$ representa la cuantía de la siniestralidad total del intervalo de tiempo $(0, t]$.

Es fácil probar que para un periodo de tiempo, $t = 1$, la función de distribución de la siniestralidad total viene dada por

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N = n) V^{*(n)}(x)$$

donde V representa la función de distribución de la variable aleatoria cuantía de un siniestro y $V^{*(n)}$ es la convolución de V consigo misma n veces.

Realizaremos a continuación un estudio de la misma.

Considerando el caso más general de que la distribución del número de siniestros sea Poisson Ponderada, es decir

$$\Pr(N = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dU(\lambda)$$

tenemos las siguientes características de la distribución de la siniestralidad total.

$$E(S) = c_1 E(\Lambda)$$

$$\sigma^2(S) = c_2 E(\Lambda) + c_1^2 \sigma^2(S)$$

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{sx} dF(x) = \int_0^\infty e^{\lambda(\varphi_x(s)-1)} dU(\lambda)$$

siendo $c_r = \int_0^\infty x^r dV(x)$.

Los dos casos particulares de interés nos llevan a la distribución de *Poisson Compuesta* y a la *Binomial Negativa Compuesta*. Así cuando:

a) La variable de estructura Λ tiene una distribución degenerada (con lo cual el parámetro de la variable aleatoria de Poisson vuelve a ser λ constante):

$$dU(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{array} \right\}$$

En este caso S es una variable aleatoria Poisson Compuesta.

b) Cuando la variable de estructura tiene la distribución Gamma:

$$u(\lambda) = U'(\lambda) = \frac{\tau^a}{\Gamma(a)} e^{-\tau\lambda} \lambda^{a-1} \quad a, \tau > 0 \text{ y } \lambda \geq 0$$

En este caso S es una variable aleatoria Binomial Negativa Compuesta. (Véase Panjer y Willmot (1992))

Una importante propiedad de la distribución de Poisson Compuesta se refiere a que la suma de variables aleatorias independientes que siguen una distribución Poisson Compuesta sigue también una distribución Poisson Compuesta. Esto es:

Si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes tal que X_i se distribuye según una Poisson Compuesta de parámetro λ_i y la función de distribución de la cuantía de un siniestro es $V_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ es una distribución Poisson Compuesta con

$$\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i$$

$$V(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} V_i(x)$$

(véase, por ejemplo, Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984) pág. 97).

Este resultado tiene dos importantes consecuencias para la construcción de los modelos de seguros. Primero, si combinamos n carteras, donde la siniestralidad total de cada una de ellas sigue una distribución Poisson Compuesta y estas carteras son independientes entre sí, entonces la siniestralidad total de la cartera combinada también sigue una distribución Poisson Compuesta. En segundo lugar, podemos considerar una única cartera de seguros para un periodo de n años, donde supondremos independencia entre las n siniestralidades totales, y que la siniestralidad total de cada año sigue una distribución Poisson Compuesta. No es necesario que las distribuciones de la siniestralidad total de cada año sean idénticas. Entonces según la propiedad de aditividad, el total de los siniestros para n periodos anuales será una distribución Poisson Compuesta.

Capítulo 2

Teoría de la Credibilidad

2.1 Introducción

Definimos los *factores de riesgo* como aquellas características, medibles o no medibles, del asegurado que influyen en la siniestralidad.

Algunos de estos factores son medibles y pueden ser conocidos antes de suscribir la póliza; les llamaremos *variables a priori* tales como sexo, edad, uso del vehículo, antigüedad del permiso de conducir, lugar de residencia etc. Con el conocimiento de estas variables a priori podríamos dividir la cartera en varios subgrupos con ayuda de técnicas estadísticas. Analizando las pólizas de una cartera durante un periodo se puede observar que los subgrupos así obtenidos no son todo lo homogéneos que sería deseable puesto que individuos con las mismas características a priori tienen valores de la siniestralidad muy diferentes. Eso es debido a que existen otros factores de riesgo, no medibles a priori, que también influyen en la siniestralidad, y por tanto resulta claramente insuficiente clasificar a los asegurados solamente teniendo en cuenta el valor de estas variables a priori.

Debemos buscar estos otros factores de riesgo que también influyen en la siniestralidad, tales como la habilidad del conductor, el comportamiento del conductor ante situaciones imprevistas, nivel medio de alcohol del conductor, etc.. Estos factores también

podrían medirse pero esto resultaría bastante caro e inviable para la empresa aseguradora, ya que tendría que someter a cada asegurado a tests, análisis y otras pruebas periódicas para poder medir estas características.

Como alternativa, se han elaborado metodologías que permiten sacar partido de la relación que existe entre la siniestralidad de un asegurado en periodos cercanos, de forma que la siniestralidad observada en los últimos periodos permita una mejor estimación de la siniestralidad futura.

Una de estas metodologías, rama de la Estadística Matemática, es la *Teoría de la Credibilidad*.

A continuación describimos dicha Teoría de la Credibilidad.

2.2 Credibilidad

La primera preocupación de una empresa aseguradora cuando trata de establecer la prima es asegurarse de que la prima es suficiente para cubrir todas sus obligaciones. Sólo entonces se preocupará de distribuir las primas de forma justa entre los asegurados. Cuando el número de pólizas es suficientemente grande, el desarrollo de un sistema de clasificación es el primer

paso para conseguir una prima justa. Los sistemas de tarificación basada en la experiencia en general y los métodos de teoría de la credibilidad en particular constituyen un segundo paso para la determinación de la prima justa.

Tarificación basada en la experiencia, como el propio nombre sugiere, tiene en cuenta la experiencia individual en el pasado de cada asegurado para establecer la prima. Los sistemas de tarificación basados en la experiencia son especialmente seguidos en algunas líneas de seguro como los seguros de automóvil.

Bühlmann (1969) definió *tarificación basada en la experiencia* como la que asigna a cada riesgo individual su propia prima exacta. La prima exacta para cada periodo depende de la distribución de siniestros (desconocida) del riesgo individual para el mismo periodo.

Si no consideramos la experiencia individual, en algunos casos la prima es globalmente adecuada pero no es justa, la heterogeneidad de la cartera fuerza a la empresa aseguradora a tarificar teniendo en cuenta la experiencia.

La teoría de la credibilidad maneja dos puntos de vista, cada uno de ellos representa un método diferente de incorporar la

experiencia individual en el proceso de tarificación. El primero y más antiguo es el llamado credibilidad de *fluctuación limitada* (también llamada *credibilidad americana*). De acuerdo con este punto de vista, la prima de un asegurado podría estar basada únicamente en su propia experiencia si esta experiencia es significativa y suficientemente estable para considerarla creíble.

El segundo punto de vista se llama credibilidad de *máxima precisión* (también llamada *credibilidad europea*). No se concentra en la estabilidad de la experiencia sino en la heterogeneidad de la experiencia dentro de la cartera. Cuanto más heterogénea sea la cartera, más importante será la experiencia individual y viceversa.

El nacimiento de la teoría de la credibilidad es debido a Mowbray (1914). Mowbray estaba interesado en encontrar el mínimo número de empleados cubiertos por un plan en el cual la prima de cada empleado se pudiera considerar de confianza total, es decir totalmente creíble. La solución del problema de Mowbray necesitaba sólo el conocimiento de la distribución del número total de siniestros para determinar un nivel de credibilidad total. Con esta solución encuentra un nivel por encima del cual se obtiene credibilidad total y por debajo credibilidad cero. La dicotomía entre credibilidad cero y credibilidad total abre el camino para el desarrollo de la credibilidad parcial.

La primera teoría formal fue desarrollada por Whitney (1918), quien planteó el problema de encontrar un punto de equilibrio para el riesgo individual. El objetivo de la teoría de la credibilidad es encontrar este punto de equilibrio. Este punto de equilibrio depende de cuatro elementos: la exposición, el azar, la credibilidad de la tarificación manual (la prima colectiva) y el grado de concentración (en el sentido de homogeneidad del riesgo individual) dentro de la cartera. El punto de vista de Whitney sobre el problema de credibilidad parcial es el primer paso para la credibilidad de máxima precisión, basada en la homogeneidad de la cartera.

El modelo de Whitney supone que las medias individuales están distribuidas de acuerdo con una normal. La prima individual que se obtiene es

$$P = z \bar{x} + (1 - z)m$$

donde \bar{x} es la media de la siniestralidad individual y m es la media de la siniestralidad global de toda la cartera. Es decir, la prima individual es una media ponderada entre \bar{x} y m . Esta expresión de la prima es conocida como *prima de credibilidad* y z es conocido como *factor de credibilidad*. La expresión de z es de la forma

$$z = \frac{n}{n + K}$$

donde K es una constante, no una constante arbitraria sino que depende de varios parámetros del modelo y n el número de siniestros. Whitney sugiere que la determinación de K esté hecha a juicio del actuario.

Describiremos brevemente los modelos aquí mencionados.

2.2.1 Credibilidad de fluctuación limitada

La experiencia de un asegurado individual se considera creíble si fluctúa moderadamente de un periodo a otro. Esto es, el criterio de credibilidad es la estabilidad de la experiencia, lo que habitualmente se incrementa con el volumen de los asegurados. Este volumen se puede expresar como volumen de primas, número de siniestros, número de empleados, etc.

El modelo puede formularse de la siguiente forma:

N_t = El número de siniestros que un asegurado genera durante el t -ésimo periodo.

X_{tj} = Cuantía del j -ésimo siniestro acontecido durante el

t-ésimo periodo.

S_t = Cuantía total de la suma de siniestros acontecidos en el t-ésimo periodo.

Entonces:

$$S_t = X_{t1} + X_{t2} + \dots + X_{tN_t}$$

donde se supone que los X_{ij} y N_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Este es el modelo colectivo clásico de teoría del riesgo.

Sea $\bar{S}_T = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_T}{T}$ la media empírica de cuantía total por siniestros al final de T periodos $T = 1, 2, \dots$. El problema fundamental de la credibilidad de fluctuación limitada es la determinación de los parámetros de la distribución \bar{S}_T tales que el valor esperado esté dentro del 100k percentil con probabilidad p, es decir,

$$\Pr[(1 - k) E[\bar{S}_T] \leq \bar{S}_T \leq (1 + k) E[\bar{S}_T]] \geq p$$

para unos valores de p y de k dados.

Cuando un asegurado cumple los requisitos de esta ecuación, se dice que el asegurado tiene una credibilidad total de orden

(k, p) , y al asegurado se le carga una prima pura basada únicamente en la experiencia de sus propios siniestros.

Para que se cumpla la ecuación es necesario que la distribución de \bar{S}_T esté relativamente centrada alrededor de su media. Como \bar{S}_T es una suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, la distribución de \bar{S}_T se puede aproximar por una normal. Suponiendo que el momento de orden dos de \bar{S}_T es finito, se puede usar la versión del teorema central del límite para suma de variables aleatorias independientes para aproximar la distribución. Esta distribución se aproximará a una Normal.

Las fórmulas para credibilidad parcial se proponen a partir de 1918. Las más usadas son las que toman como valores del factor de credibilidad z en $P = z \bar{x} + (1 - z)m$ los siguientes:

$$z_1 = \min\left\{\sqrt{\frac{n}{n_0}}, 1\right\}$$

$$z_2 = \min\left\{\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}}, 1\right\}$$

$$z_3 = \frac{n}{n + K}$$

donde n_0 es el nivel de credibilidad total y K es una constante determinada a juicio del actuario.

El rango de aplicaciones de la credibilidad de fluctuación limitada es muy limitado. La clave para recordar cuándo usar credibilidad de fluctuación limitada es que confía únicamente en el criterio de estabilidad, para lo cual es necesario, generalmente, un gran volumen de asegurados o un gran número de periodos con experiencia de siniestros. El caso de credibilidad parcial es incluso más delicado, tiene en cuenta la heterogeneidad del bloque de asegurados de una aseguradora cargando diferentes primas a diferentes grupos de asegurados. Esta diferenciación está basada solamente en el volumen de asegurados o en la extensión de su historia de siniestros y no es necesariamente justa. El objetivo de la credibilidad de fluctuación limitada parcial es incorporar a la prima tanta experiencia individual como sea posible manteniendo la prima suficientemente estable.

2.2.2 Credibilidad de máxima precisión

La credibilidad de máxima precisión (o credibilidad bayesiana) es un campo más moderno, versátil y complejo de teoría de la credibilidad. Es otro punto de vista del problema de credibilidad que trata de encontrar la “mejor” prima en el sentido de que el

estimador de la prima sea el más próximo posible a la verdadera prima pura.

Un importante punto a tener en cuenta cuando pasamos de fluctuación limitada a credibilidad de máxima precisión es que un alto factor de credibilidad (es decir, z próximo a 1) no es un gran objetivo en sí mismo. Incluso el factor de credibilidad, en este caso, será más un reflejo del grado de heterogeneidad de la cartera, que del grado de estabilidad de la experiencia individual. Para una cartera homogénea, la credibilidad de máxima precisión plantea que no es necesario asignar una prima diferente a los asegurados. El factor de credibilidad será, por tanto, pequeño, es decir próximo a 0. Al contrario, a mayor heterogeneidad en la cartera, mayor consideración de la experiencia individual, y por tanto mayor factor de credibilidad.

El modelo puede formularse de la siguiente forma:

Se considera una cartera de seguros compuesta por I asegurados. La situación ideal para tarificar ocurre si esta cartera es relativamente homogénea, es decir, si los asegurados tienen características de riesgo similares. El grupo de características de un asegurado i que refleja el nivel de riesgo de los asegurados está dado por un parámetro de riesgo λ_i para cada asegurado $i = 1, 2, \dots, I$. Este parámetro de riesgo incorpora aquellas

características del asegurado que no se pueden medir de otra forma para el proceso inicial de clasificación de riesgos.

El parámetro λ_i es desconocido y se supone que permanece constante durante toda la vida de la póliza de seguro. Modelizaremos matemáticamente la heterogenidad de la cartera suponiendo que el parámetro de cada asegurado λ_i se comporta como una variable aleatoria cuya función de distribución acumulativa es $U(\Lambda)$. Siguiendo a Bühlmann (1969) $U(\Lambda)$ se llama *función de estructura*. Esto es esencialmente un punto de vista empírico bayesiano donde la función de estructura existe pero es desconocida y debe ser estimada con los datos de la cartera.

En un puro sentido bayesiano, $U(\Lambda)$ representa lo que en principio cree la aseguradora sobre el nivel de riesgo de los asegurados. Después de recoger los datos de los asegurados al final de un periodo, el juicio inicial de la aseguradora se revisa teniendo en cuenta estos datos. Esta interpretación es particularmente seguida en el caso donde hay un único asegurado o donde la aseguradora tiene poca información y debe ser prudente al calcular la prima pura inicial.

Consideremos el escenario puramente bayesiano con un solo asegurado (por lo que omitimos el subíndice i). Las cuantías totales por siniestros en cada periodo S_t ($t = 1, 2, \dots$) son

independientes e igualmente distribuidas, sólo para un λ dado, parámetro de riesgo del asegurado. Sin embargo, los S_i no condicionados no son necesariamente independientes. La función de distribución condicionada de $(S|\Lambda = \lambda)$ se representa por $F(x|\lambda)$. La función de distribución de la no condicionada (o marginal) S_i viene dada por

$$F(x) = \int_{\lambda} F(x|\lambda) dU(\lambda)$$

La determinación de la cuantía de la siniestralidad se hace en dos pasos: primero se obtiene el nivel de riesgo del asegurado de la función de distribución $U(.)$ y después la cuantía de la siniestralidad de la distribución condicional $F(.|\lambda)$.

En adelante razonaremos sobre una póliza arbitraria con parámetro λ y siniestralidades observadas en n periodos $S_1|\lambda, \dots, S_n|\lambda$.

Nos planteamos el problema de calcular la prima pura para dicha póliza, $E[S|\lambda]$. Desgraciadamente desconocemos el valor del parámetro λ de la póliza que nos ocupa, por lo que tenemos un problema de estimación:

$$\text{Estimar } \mu(\lambda) : = E[S|\lambda]$$

obsérvese que $\mu(\lambda)$ es una variable aleatoria que es función de λ .

Para resolver este problema de estimación consideramos las siguientes hipótesis:

- Conocemos la función de estructura $U(\lambda)$
- $S_1|\lambda, \dots, S_n|\lambda$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (para λ fijo) con función de distribución $F(S|\lambda)$

Como consecuencia de estas hipótesis, mediante el Teorema de Bayes podemos calcular

$$u(\lambda|S_1, \dots, S_n) = \frac{f(S_1|\lambda) \dots f(S_n|\lambda) u(\lambda)}{\int_{\lambda'} f(S_1|\lambda') \dots f(S_n|\lambda') u(\lambda') d\lambda'}$$

Puesto que hemos adoptado el paradigma bayesiano, para estimar el valor de $\mu(\lambda)$ debemos especificar:

- Una función de pérdida: tomaremos la más usual, la función de pérdida cuadrática.
- Una distribución a priori para λ : como es natural, tomaremos la función de estructura $U(\lambda)$.

La estimación a priori de $\mu(\lambda)$ será el valor de P que haga mínima la pérdida esperada:

$$\min_P E_\lambda[(P - \mu(\lambda))^2] = \int_\lambda (P - \mu(\lambda))^2 u(\lambda) d\lambda$$

Mediante procedimientos conocidos se demuestra que

$$P = E_\lambda(\mu(\lambda)) = \int_\lambda \mu(\lambda) u(\lambda) d\lambda$$

es decir,

$$P = E_\lambda[E[S|\lambda]] = E[S]$$

obtenemos, como es natural, que la prima pura a priori es la siniestralidad media en toda la cartera.

Ahora bien, en la estimación bayesiana, si tenemos oportunidad de observar los valores S_1, \dots, S_n , el problema pasa a ser: encontrar el valor de P' que minimice

$$\int_\lambda (P' - \mu(\lambda))^2 u(\lambda|S_1, \dots, S_n) d\lambda$$

y por tanto la prima a posteriori será ahora

$$P' = \int_{\lambda} \mu(\lambda) u(\lambda | S_1, \dots, S_n) d\lambda = E_{\lambda} [E[S|\lambda] | S_1, \dots, S_n]$$

luego

$$P' = \int_{\lambda} E[S|\lambda] u(\lambda | S_1, \dots, S_n) d\lambda$$

Observemos que se verifica que

1. La esperanza de las primas a posteriori coincide con la prima pura a priori

$$E_{S_1, \dots, S_n} [P'] = E_{S_1, \dots, S_n} [E_{\lambda} [E[S|\lambda] | S_1, \dots, S_n]] = E_{\lambda} [E[S|\lambda]] = E[S]$$

luego el sistema es justo, en el sentido de que es *financieramente equilibrado*.

2. Como consecuencia de la estimación bayesiana es posible demostrar, en nuestro caso, que la prima a posteriori, P' , converge hacia el valor del parámetro λ cuando $n \rightarrow \infty$. Véase De Groot (1970) pp. 201-203.
3. Si la siniestralidad de cada póliza individual $S|\lambda$ se distribuye según una Poisson de parámetro λ y suponemos que los valores de λ tienen una distribución a priori Λ que es una Gamma de

parámetros (a, τ) , entonces la prima pura a priori será

$$P = E[S] = E_{\lambda}[E[S|\lambda]] = E_{\lambda}[\Lambda] = \frac{a}{\tau}$$

Si la siniestralidad en n periodos es S_1, \dots, S_n , entonces la distribución de probabilidad de $\Lambda|S_1, \dots, S_n$ es una Gamma de parámetros $(a + \sum_{i=1}^n S_i, \tau + n)$ y la prima a posteriori será

$$P' = E_{\lambda}[E[S|\lambda] | S_1, \dots, S_n] = E_{\lambda}[\Lambda | S_1, \dots, S_n] = \frac{a + \sum_{i=1}^n S_i}{\tau + n}$$

La credibilidad bayesiana resulta ser el enfoque más riguroso, pero no está exento de problemas, como por ejemplo:

- La dificultad de cálculo del estimador bayesiano cuando no son aplicables las distribuciones conjugadas.
- La dificultad del ajuste de la función de estructura o distribución a posteriori de Λ .

Algunos bayesianos como Klugman intentan superar estos problemas desarrollando métodos de cálculo numérico y tomando distribuciones impropias como funciones de estructura. Otros autores como Bühlmann, Goovaerts, DeVyllder y Jewell intentan

calcular aproximaciones del estimador bayesiano. El primero y más famoso de estos enfoques se debe a Bühlmann (1967). Otros enfoques alternativos son el modelo de Bühlmann-Straub, Credibilidad Jerárquica y Credibilidad de Clasificación Cruzada. Véase Goulet (1998). De todos ellos sólo comentaremos brevemente el debido a Bühlmann.

2.2.2.1 Credibilidad de Bühlmann

El estimador bayesiano de $\mu(\lambda) = E[S|\lambda]$ es

$$P' = E_{\lambda}[E[S|\lambda] | S_1, \dots, S_n]$$

y se calculó como el valor que minimiza la expresión

$$\int_{\lambda} (P' - \mu(\lambda))^2 u(\lambda | S_1, \dots, S_n) d\lambda$$

Ahora bien, si nos restringimos a valores de P' que sean una función lineal de las siniestralidades observadas S_1, \dots, S_n , es decir

$$P' = c_0 + c_1 S_1 + c_2 S_2 + \dots + c_n S_n$$

entonces el valor de P' que minimiza la expresión anterior es el llamado *estimador de Bühlmann*, que resulta ser análogo a la fórmula de credibilidad de Whitney

$$P' = z \bar{x} + (1 - z)E[S]$$

siendo \bar{x} la siniestralidad media de la póliza, $E[S]$ la siniestralidad media de la cartera y el factor de credibilidad z se define como

$$z = \frac{n}{n + K}$$

para el valor de la constante K :

$$K = \frac{E_{\lambda}[Var[S|\lambda]]}{Var_{\lambda}[E[S|\lambda]]}$$

En la práctica, a partir de una muestra se estima $Var[S]$ y $E_{\lambda}[Var[S|\lambda]]$, mientras que el término $Var_{\lambda}[E[S|\lambda]]$ se calcula a partir de la identidad

$$Var[S] = E_{\lambda}[Var[S|\lambda]] + Var_{\lambda}[E[S|\lambda]]$$

El estimador de Bühlmann es sencillo de calcular y tiene propiedades razonables. De hecho, coincide básicamente con el estimador de Whitney comentado anteriormente.

Finalmente, otra ventaja del estimador de Bühlmann es que coincide con el estimador bayesiano en un gran número de casos. Así, por ejemplo, si N es una Poisson (λ) y Λ es una Gamma

(a, τ) , entonces

$$K = \frac{E_{\lambda}[Var_N[N|\lambda]]}{Var_{\lambda}[E_N[N|\lambda]]} = \frac{E_{\lambda}[\Lambda]}{Var_{\lambda}[\Lambda]} = \frac{\frac{a}{\tau}}{\frac{a}{\tau^2}} = \tau$$

luego

$$z = \frac{n}{n+K} = \frac{n}{n+\tau}$$

y el estimador de Bühlmann resulta ser

$$z \frac{\sum N_i}{n} + (1-z) \frac{a}{\tau} = \frac{n}{n+\tau} \frac{\sum N_i}{n} + \frac{\tau}{n+\tau} \frac{a}{\tau} = \frac{a + \sum N_i}{\tau + n}$$

luego coincide con el estimador bayesiano.

Este resultado es un caso particular de un resultado más amplio que establece la igualdad entre el estimador bayesiano y el de Bühlmann cuando se usa una distribución conjugada como distribución a priori de Λ y la siniestralidad $S|\lambda$ pertenece a una familia lineal de distribuciones exponenciales. Véase Jewell (1974).

Capítulo 3

Sistemas Bonus-Malus

3.1. Introducción

Como hemos visto en el capítulo 2, la prima de credibilidad a posteriori nos proporciona un buen método de tarificación ya que las primas así obtenidas cumplen los importantes objetivos de mantener el equilibrio financiero de la empresa y de asignar una prima justa a los asegurados, puesto que dicha prima converge al verdadero valor medio de la siniestralidad individual, cuando la antigüedad de la póliza es suficientemente grande.

No obstante, surge un problema al aplicar este método en la práctica, ya que si la cartera de asegurados es grande y los diferentes asegurados tienden, con el paso del tiempo, a tener diferentes primas, el sistema se hace muy difícil de gestionar.

En la práctica este inconveniente se suele solventar utilizando los *Sistemas Bonus- Malus* que describimos a continuación.

En este capítulo estudiamos los sistemas Bonus-Malus, revisando la literatura, exponemos los principales sistemas Bonus-Malus utilizados a lo largo de la historia, haciendo especial hincapié en aquellos que han tenido mayor importancia. Explicamos con ejemplos dichos sistemas Bonus-Malus.

3.2. Sistemas Bonus-Malus

Como punto de partida, consideramos grupos de pólizas homogéneos con respecto a algunas características de riesgo observables. No obstante, pueden existir diferencias en la siniestralidad dentro del grupo, debidas a factores no observables. Como es habitual en la literatura actuarial, se supone que las características de riesgo de cada póliza están resumidas en el valor de un cierto parámetro Λ , y que las variables aleatorias número de siniestros durante los diferentes años de vida de la póliza, son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidas para cada valor del parámetro de riesgo de la póliza. Suponemos también que las cuantías de la siniestralidad individual son independientes del número de siniestros y del parámetro de riesgo, y mutuamente independientes e idénticamente distribuidas. El número de siniestros y las cuantías de éstos se consideran también independientes de la elección del sistema B-M, es decir, el hambre de bonus y el riesgo moral no son tenidos en cuenta.

Como es habitual en la literatura (véanse por ejemplo Lemaire (1985,1995), Walhin and Paris (1999)), identificamos el valor del parámetro de riesgo de una póliza con su frecuencia media de siniestros. Dicha frecuencia media de siniestros se supone que es

estacionaria en el tiempo, es decir, no depende del tiempo. En este caso, tomando la media de la siniestralidad individual como unidad monetaria, nuestro objetivo consiste en calcular una prima pura para cada asegurado tan próxima como sea posible al verdadero valor (desconocido) de su parámetro. Para tratar de conseguir este objetivo, adoptaremos un *sistema Bonus-Malus* (en adelante B-M). Por lo comentado anteriormente, dicho sistema estará basado en el número de siniestros y no en su cuantía. De hecho, casi todos los sistemas B-M reales que se aplican en el mundo están exclusivamente basados en el número de siniestros (véase Lemaire (1985, p. 129)).

Finalmente, suponemos que el parámetro de riesgo Λ es una variable aleatoria con función de estructura $U(\cdot)$ conocida. Dicha distribución no es una distribución subjetiva en el puro sentido bayesiano, sino que se interpreta, como ya hemos comentado, como los diferentes valores del parámetro de riesgo que toman las diferentes pólizas.

Siguiendo a Lemaire (1995, p. 6), decimos que una compañía de seguros utiliza un sistema B-M cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- Existe un número finito de clases (C_1, \dots, C_K) tales que cada póliza permanece en una clase durante cada periodo de seguro

(habitualmente un año).

- La prima para cada póliza depende únicamente de la clase en la que está.
- La clase en la que está una póliza en un periodo dado está determinada por la clase en el periodo precedente y el número de siniestros declarados en ese periodo (*Condición de Markov*).

Cada sistema B-M está determinado por tres elementos:



- La *clase inicial*, que es la que se asigna a las pólizas nuevas.
- La *escala de primas* $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)$, donde π_i es la prima para la clase C_i .
- Las *reglas de transición*, es decir, las reglas que establecen las condiciones bajo las cuales una póliza que está en la clase C_i pasa a la clase C_j en el siguiente periodo.

En este último punto, dichas reglas pueden estar definidas mediante transformaciones T_r tales que $T_r(i) = j$ cuando los asegurados en la clase C_i que declaran r siniestros pasan a la clase C_j en el siguiente periodo. Las transformaciones T_r son habitualmente descritas mediante matrices, del siguiente modo

$$T_r = (t_{ij}^r)$$

donde

$$t_{ij}^r = 1 \text{ si } T_r(i) = j$$

$$t_{ij}^r = 0 \text{ si } T_r(i) \neq j$$

Las reglas de transición pueden venir expresadas también, de forma equivalente, por una matriz de dimensión $K \times K$, donde

$$T = (T_{ij})$$

y sus elementos cumplen las siguientes condiciones:

T_{ij} son conjuntos de números enteros r tales que una póliza pasa de la clase C_i a la clase C_j si durante ese periodo declara r siniestros.

$$\bigcup_{j=1}^K T_{ij} = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ y } T_{ij} \cap T_{ij'} = \emptyset \text{ cuando } j \neq j'$$

La *probabilidad de transición* condicionada de C_i a C_j en un periodo, para un valor de $\Lambda = \lambda$ dado, se puede calcular de la siguiente forma:

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r(\lambda) t_{ij}^r$$

donde $p_r(\lambda)$ es la probabilidad condicionada de declarar r siniestros en un periodo dado $\Lambda = \lambda$, esto es,

$$p_r(\lambda) = \Pr[N = r \mid \Lambda = \lambda]$$

La *matriz de transición* condicionada, dado $\Lambda = \lambda$, se define como

$$P(\lambda) = (p_{ij}(\lambda))$$

Estas definiciones nos permiten considerar el sistema B-M como una cadena de Markov. Esta cadena de Markov es homogénea, puesto que hemos supuesto que la frecuencia de siniestros, λ , es estacionaria en el tiempo. La matriz de transición $P(\lambda)$ definida anteriormente será la matriz de transición de dicha cadena de Markov.

Si suponemos también que todos los estados de la cadena de Markov son recurrentes en tiempo esperado finito, entonces, como vimos en el capítulo 1, existe una *distribución de probabilidad estacionaria* (condicionada) $(p_1(\lambda), \dots, p_K(\lambda))$, donde $p_i(\lambda)$ está

definida como el valor del límite (cuando el número de periodos $\rightarrow \infty$) de la probabilidad condicionada de que una póliza pertenezca a la clase C_i , dado $\Lambda = \lambda$.

Como vimos también en el capítulo 1, la distribución de probabilidad estacionaria coincide con el autovector por la izquierda asociado al autovalor 1 de la correspondiente matriz de transición, cuyas componentes sean positivas y sumen la unidad.

Es posible definir también la distribución de probabilidad estacionaria (no condicionada) (p_1, \dots, p_K) para una póliza arbitraria como el valor medio de las distribuciones de probabilidad estacionaria condicionadas $(p_1(\lambda), \dots, p_K(\lambda))$. Es decir

$$p_i = \int p_i(\lambda) dU(\lambda)$$

Es claro que las probabilidades p_i y $p_i(\lambda)$ pueden ser interpretadas como la fracción de pólizas arbitrarias y de pólizas condicionadas a $\Lambda = \lambda$, respectivamente, que pertenecen a la clase C_i una vez alcanzado el estado estacionario.

Parece claro que el conocimiento de las distribuciones estacionarias debería ser útil para el diseño de un sistema B-M, puesto que nos informa de la distribución de las pólizas al cabo de

cierto tiempo.

3.3 Revisión de la literatura sobre los sistemas Bonus-Malus

3.3.1 Los primeros desarrollos

El pionero de la teoría B-M fue U. Grenander quien en 1957 consideró el problema de encontrar una escala de primas π dadas las reglas de transición del sistema B-M. Consideró únicamente reglas del tipo “claims-no claims” (siniestros-no siniestros), llamadas así porque las reglas de transición del sistema B-M dependen sólo de si un asegurado ha tenido o no siniestros y no del número de éstos, es decir que sólo podemos tener:

$$T_{ij} = \emptyset, \quad T_{ij} = \{0\} \quad \text{o} \quad T_{ij} = \{1, 2, \dots\}$$

Como criterio para la elección de la escala de primas del sistema, π , estableció que $E_{\lambda}S$ debería ser aproximadamente igual que la esperanza condicionada a $\Lambda = \lambda$ de todas las posibles

escalas de primas que se pudieran obtener basadas en la experiencia de siniestros del asegurado, para todos los valores λ que pudiera tomar Λ . Aplicando este criterio con las reglas de transición del sistema B-M dadas por

$$T = \begin{pmatrix} \{1,2,\dots\} & \{0\} & \emptyset \\ \{1,2,\dots\} & \emptyset & \{0\} \\ \emptyset & \{1,2,\dots\} & \{0\} \end{pmatrix}$$

Grenander encontró la siguiente escala $\pi = (0.637, 1.086, 0.109)$ lo que implica que un año sin siniestros en la clase 1 nos lleva a un incremento en la prima, mientras que un año sin siniestros en la clase 2 nos lleva a una disminución bastante grande en la prima. Este resultado tan insatisfactorio indica las deficiencias del criterio de Grenander que se pueden explicar de la siguiente manera.

Este criterio establece que para cada póliza la prima media por periodo debería ser aproximadamente igual a la prima pura si el número de periodos tiende a infinito. Una forma de expresar esto es decir que

$$E\{E_\lambda \pi - E_\lambda S\}^2$$

debería ser pequeña. Parecería razonable también decir que la prima debería tener pequeñas variaciones alrededor de este valor

esperado, puesto que la prima por sí misma se puede considerar como una variable aleatoria. Esto significa que también

$$E \text{ var}_\lambda \pi$$

debería de ser pequeña.

K. Loimaranta en 1972 se dio cuenta de este problema y propuso minimizar $\text{var}_\lambda \pi$ respecto de λ bajo la condición de que el valor $E_\lambda \pi$ esté próximo a $E_\lambda S$ para todos los valores de λ que sean interesantes. La teoría de Loimaranta fue aplicada a varios sistemas B-M que se han usado en la práctica.

También Pesonen en 1963 consideró el problema de encontrar una escala de primas conveniente cuando las reglas de transición del sistema B-M son las “claims-no claims” dadas por T . Consideró que el parámetro de riesgo λ es la realización de una variable aleatoria, Λ , y consideró independencia entre las variables número de siniestros y cuantía de estos y que el número de siniestros está distribuido según una Poisson de parámetro λ cuando $\Lambda = \lambda$. La esperanza de la cuantía total por siniestros en el periodo n , para una póliza que está en la clase j , es la prima de credibilidad $\pi_S^{(n)}(j)$ definida por

$$\pi_S^{(n)}(j) = E(E_\lambda S_n | Z_{S,n} = j) \quad j = 1, 2, \dots, K$$

donde $Z_{S,n}$ representa las *bases de tarificación* (para el periodo n), es decir, la información conocida al comienzo del periodo n sobre la experiencia de siniestros individual en los $n-1$ periodos anteriores.

Pesonen planteó que los valores en el límite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_S^{(n)}(j)$, constituyen una aceptable escala de primas, en caso de que estos límites existan.

El trabajo sobre sistemas B-M, que más importancia ha tenido posteriormente, es el que presentó Ragnar Norberg en 1976.

A continuación comentamos brevemente este trabajo de Norberg así como otros posteriores que se basan en él y complementan dicho trabajo.

3.3.2 El sistema B-M de Ragnar Norberg (1976): La escala de Bayes.

Retomemos de nuevo la notación establecida en el apartado 2, suponiendo que la clase C_1 es la peor y C_K es la mejor.

En la construcción de un sistema B-M se suelen distinguir tres

problemas:

- La elección del número de clases y de las reglas de transición.

- La elección de la clase inicial.

- El cálculo de la prima correspondiente a cada clase.

La elección del número de clases y las reglas de transición sigue siendo un problema abierto, véase Lemaire (1995) . No es posible todavía encontrar el número de clases y las reglas de transición óptimas en general, aunque es posible comparar diferentes conjuntos de reglas en base a ciertas medidas de eficiencia.

La elección de una clase inicial óptima no puede basarse en la distribución estacionaria, ya que ésta no depende de dicha clase inicial. Lo que sí depende de la clase inicial es, obviamente, la velocidad de convergencia a la distribución estacionaria.

La solución al tercer problema sí puede basarse en la distribución estacionaria. Norberg (1976) apoyándose en el sistema de Pesonen que hemos descrito en el apartado anterior, propuso tomar como prima asociada a una clase la pérdida esperada anual de una póliza “infinitamente vieja” perteneciente a

esa clase, es decir, de una póliza perteneciente a esa clase después de que el sistema haya alcanzado su estado estacionario. Por tanto

$$\pi_i = E[\Lambda \mid \text{la póliza está en } C_i \text{ después de } \infty \text{ periodos}]$$

luego

$$\pi_i = \frac{1}{p_i} \int \lambda p_i(\lambda) d\lambda \quad (3.1)$$

Norberg demostró que dicha escala (conocida como *escala de Bayes*) minimiza la esperanza del cuadrado del error de tarificación, definido como la esperanza del cuadrado de la diferencia entre la verdadera prima pura y la prima realmente pagada para una póliza infinitamente vieja elegida al azar. Dicha esperanza del cuadrado del error de tarificación se usa también para comparar las escalas de Bayes asociadas con diferentes reglas de transición. Así, se define la eficiencia de un sistema B-M como la esperanza de las primas al cuadrado, que es máxima cuando la esperanza del cuadrado del error de tarificación es mínima (véase Norberg (1976) teorema 4.3).

Para aclarar el modelo de sistema B-M propuesto por Norberg

estudiaremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Se supone que el número de siniestros, condicionado a $\Lambda = \lambda$, sigue una distribución de Poisson de parámetro λ y se supone que Λ está distribuida según una gamma, con función de densidad

$$\frac{dU(\lambda)}{d\lambda} = \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \lambda^{\gamma-1} e^{-c\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Se supone que la cuantía media de un siniestro es la unidad y se comparan los sistemas B-M dados por dos reglas de transición T y T' resumidas en las siguientes matrices:

$$T = \begin{pmatrix} \{1,2,\dots\} & \{0\} & - \\ \{1,2,\dots\} & - & \{0\} \\ \{1,2,\dots\} & - & \{0\} \end{pmatrix}$$

y

$$T' = \begin{pmatrix} \{1,2,\dots\} & - & \{0\} \\ \{1,2,\dots\} & - & \{0\} \\ - & \{1,2,\dots\} & \{0\} \end{pmatrix}$$

Se calculan las distribuciones estacionarias, las primas y la eficiencia de las reglas del sistema B-M obtenidas en los dos ejemplos, para algunos valores de los parámetros c y γ .

Los resultados se muestran en la siguiente tabla

c	γ	reglas	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	e
0.1	0.15	T	.302	.065	.633	4.65	.77	.07	6.5746
		T'	.238	.065	.698	5.70	.77	.13	7.7782
1	0.5	T	.293	.130	.577	1.10	.62	.17	0.4227
		T'	.163	.130	.707	1.49	.62	.25	0.4552
1	1	T	.500	.167	.333	1.50	.83	.33	1.2778
		T'	.333	.167	.500	1.83	.83	.50	1.3611
10	5	T	.379	.219	.402	.575	.524	.417	0.2550
		T'	.160	.219	.621	.644	.524	.455	0.2547

Observamos que para los valores de $(c, \gamma) = (0.1, 0.15)$, $(c, \gamma) = (1, 0.5)$ y $(c, \gamma) = (1, 1)$ son más eficientes las reglas dadas por T' mientras que para el valor de $(c, \gamma) = (10, 5)$ lo son las dadas por T .

Ejemplo 2: Noruega 1975

Estudiamos el sistema B-M que se aplicaba en Noruega en 1975 puesto que sobre este ejemplo se aplicaron los sistemas B-M estudiados en este capítulo.

Los periodos a los que se aplica el sistema B-M son de un año, el primer año se aplica la misma prima a todos los asegurados, en años sucesivos, la prima se incrementa en un 20% por cada siniestro y baja un 10% por cada año sin siniestros, pudiendo tomar un valor mínimo del 30% de la póliza inicial y un valor máximo del 150% de la póliza inicial. Hay una excepción: 140% y 150% bajan al 120% en un año sin siniestros.

Con estos datos, si un asegurado da parte de un siniestro el 1^{er} año, un siniestro el 3^o año y un siniestro el 6^o año, mientras que otro asegurado da parte de un siniestro el 7^o año, un siniestro el 11^o año y un siniestro el 13^o año, el primero paga una prima muy superior al segundo durante los 13 primeros años, (en algunos años, como por ejemplo el 6^o paga casi el triple que el segundo asegurado), luego las primas dependen en gran medida del momento en que se producen los siniestros y no sólo del número de ellos. Esta observación llevó a Norberg a modificar el sistema B-M tratando de que fuera más “justo”.

El sistema noruego anteriormente descrito tiene $K = 13$ clases, la clase inicial es $k = 6$ y la escala del sistema B-M se calcula en función de la prima inicial $\pi(6)$ mediante la siguiente relación

$$\pi(j) = (1 + \frac{6-j}{10}).\pi(6), \quad j = 1, 2, \dots, 13$$

y las reglas de transición del sistema vienen dadas por

$$T(j, r) = \begin{cases} \max(4, \min(j+1, 13)) & \text{si } r = 0 \\ \max(1, j-2r) & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

con lo que obtenemos la siguiente matriz de transición

$$T = \begin{pmatrix} \{1,2,\dots\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{1,2,\dots\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{1,2,\dots\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3,\dots\} & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3,\dots\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - \\ \{3,4,\dots\} & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - \\ \{3,4,\dots\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - \\ \{4,5,\dots\} & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - \\ \{4,5,\dots\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - \\ \{5,6,\dots\} & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - \\ \{5,6,\dots\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - \\ \{6,7,\dots\} & \{5\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} \\ \{6,7,\dots\} & - & \{5\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & \{0\} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

El nivel de prima que viene determinado por $\pi(6)$, se ajusta con

el nivel medio de riesgo de cada grupo.

Si tomamos $\pi(6) = 0.152$ obtenemos que la escala de primas que se aplicaban en Noruega en 1975 será

j	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(j)$.228	.213	.198	.182	.167	.152	.137

8	9	10	11	12	13
.122	.106	.091	.076	.061	.046

Para aplicar el modelo en este caso necesitamos conocer la distribución de la variable Λ y discretizarla.

Norberg (1976) calculó la distribución estacionaria no condicionada, que representamos por p_T , donde el subíndice T es debido a la matriz T de las reglas de transición, y la escala de primas del sistema B-M π_T cuando el número de siniestros está distribuida según una Poisson de parámetro λ , condicionado a $\Lambda = \lambda$, y Λ está distribuida de acuerdo a una función de estructura discreta dada en la siguiente tabla:

λ_i	.033	.067	.1	.133	.167	.2	.233	.267	.3	.333	.367
$P(\Lambda = \lambda_i) = q_i$.143	.172	.143	.114	.1	.086	.072	.057	.043	.029	.014

.4	.433	.467	.5	.533	.567	.6	.633	.667
.007	.006	.004	.003	.001	.001	.001	.0001	.0001

Esta función de estructura se aproxima bastante bien a la función de estructura de las pólizas de seguros de coches particulares en Noruega en 1975, y tomando el coste medio de un siniestro, como unidad monetaria, se obtiene $ES = E\Lambda = 0.152$.

Norberg (1976) trató de mejorar el sistema B-M que se aplicaba en Noruega, aplicando su modelo de sistema B-M del siguiente modo:

Se calculan $p_T(j)$, probabilidad de que una póliza aleatoria siguiendo las reglas de transición T acabe estando en la clase j cuando el número de periodos tiende a ∞ , y $\pi_T(j)$, la prima que siguiendo esas mismas reglas de transición se debería pagar en la clase j , estos valores se muestran en la siguiente tabla.

Clase j	$p_T(j)$	$\pi_T(j)$
1	0.006	0.418
2	0.004	0.379
3	0.004	0.349
4	0.014	0.357
5	0.015	0.329
6	0.016	0.305
7	0.020	0.278
8	0.023	0.260
9	0.036	0.229
10	0.040	0.215
11	0.095	0.173
12	0.080	0.166
13	0.646	0.114

(3.3)

En este caso el valor de la eficiencia es $e = 0.0274$

Se toma como clase inicial $k = 12$ pues es la que minimiza la esperanza del cuadrado de la diferencia entre la verdadera prima pura y la prima realmente pagada el primer año, en lugar de $k = 6$ que es la que se había usado en π . Observamos que el rango de π es demasiado grande, ya que $\frac{\pi(1)}{\pi(13)} = 5$ mientras que $\frac{\pi_T(1)}{\pi_T(13)} < 4$. También se observa que $\pi_T(4) > \pi_T(3)$, por lo que la escala de primas no es monótona, esta peculiaridad es debida a que las pólizas de la clase 4 están mezcladas con las pólizas que provienen de la clase 1 (la peor), que han estado un año sin

siniestros.

Norberg (1976) se planteó modificar estas reglas de forma que fuesen una versión “consistente” de las reglas del sistema B-M de Noruega, los cambios planteados son

$$\tilde{T}_{12} = \tilde{T}_{23} = \{0\}, \quad \tilde{T}_{14} = \tilde{T}_{24} = \emptyset$$

los demás elementos de la matriz \tilde{T} son los mismos que los de T .

Por lo que la matriz \tilde{T} queda

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \{1,2,\dots\} & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3,\dots\} & \{1\} & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3,\dots\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - \\ \{3,4,\dots\} & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - \\ \{3,4,\dots\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - \\ \{4,5,\dots\} & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - \\ \{4,5,\dots\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - \\ \{5,6,\dots\} & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - \\ \{5,6,\dots\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - \\ \{6,7,\dots\} & \{5\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} \\ \{6,7,\dots\} & - & \{5\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & \{0\} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Se calculan también las probabilidades de la distribución estacionaria no condicionada $p_{\tilde{T}}(j)$ y las primas $\pi_{\tilde{T}}(j)$ que se

muestran en la siguiente tabla.

Clase j	$p_{\tilde{T}}(j)$	$\pi_{\tilde{T}}(j)$
1	0.012	0.409
2	0.011	0.381
3	0.011	0.354
4	0.012	0.331
5	0.013	0.308
6	0.014	0.290
7	0.018	0.267
8	0.021	0.251
9	0.034	0.222
10	0.038	0.210
11	0.093	0.170
12	0.079	0.163
13	0.643	0.113

(3.5)

El valor de la eficiencia en este caso es $e = 0.0278$

Vemos que para estas nuevas reglas la escala de primas $\pi_{\tilde{T}}(j)$ es estrictamente decreciente. Vemos también que la eficiencia $e(\tilde{T}) > e(T)$, por lo que las reglas de transición \tilde{T} parece que son mejores bases de tarificación que las reglas T . Ambas reglas tienen la propiedad de que la mayoría de pólizas antiguas están en la mejor clase.

Norberg (1976) se planteó también la posibilidad de que el sistema noruego fuese mejorado introduciendo cambios que hicieran la distribución de las pólizas menos sesgada. Esto se obtiene modificando de nuevo las reglas de transición del sistema B-M \tilde{T} de forma que una póliza se mueve tres clases para abajo con cada siniestro. Estas nuevas reglas de transición, vienen dadas por la matriz T^*

$$T^* = \begin{pmatrix} \{1,2,\dots\} & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{1,2,\dots\} & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{1,2,\dots\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{1,2,\dots\} & - & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3,\dots\} & \{1\} & - & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3,\dots\} & - & \{1\} & - & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3,\dots\} & - & - & \{1\} & - & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - \\ \{3,4,\dots\} & \{2\} & - & - & \{1\} & - & - & - & \{0\} & - & - & - & - \\ \{3,4,\dots\} & - & \{2\} & - & - & \{1\} & - & - & - & \{0\} & - & - & - \\ \{3,4,\dots\} & - & - & \{2\} & - & - & \{1\} & - & - & - & \{0\} & - & - \\ \{4,5,\dots\} & \{3\} & - & - & \{2\} & - & - & \{1\} & - & - & - & \{0\} & - \\ \{4,5,\dots\} & - & \{3\} & - & - & \{2\} & - & - & \{1\} & - & - & - & \{0\} \\ \{4,5,\dots\} & - & - & \{3\} & - & - & \{2\} & - & - & \{1\} & - & - & \{0\} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Los valores para la distribución de probabilidad estacionaria no condicionada $p_{T^*}(j)$ y la escala de primas del sistema B-M para las

reglas de transición T^* se dan en la siguiente tabla

Clase j	$p_{T^*}(j)$	$\pi_{T^*}(j)$
1	0.033	0.333
2	0.030	0.310
3	0.028	0.291
4	0.028	0.270
5	0.028	0.253
6	0.028	0.239
7	0.035	0.215
8	0.036	0.202
9	0.036	0.192
10	0.075	0.155
11	0.065	0.149
12	0.056	0.143
13	0.524	0.100

(3.7)

En este caso el valor de la eficiencia es $e = 0.0281$.

Se observa que el valor $p_{T^*}(13)(= 0.524)$ es considerablemente menor que $p_T(13)(= 0.646)$ y que $p_{\tilde{T}}(13)(= 0.643)$. Como era de esperar, T^* es mejor que T y \tilde{T} en el sentido de que la eficiencia $e(T^*) > e(\tilde{T}) > e(T)$.

Por supuesto estas conclusiones dependen de la validez de las suposiciones del modelo y de la elección de la función de

Los cálculos realizados con otras funciones de estructura llevaron a las mismas conclusiones.

3.3.3 El criterio no asintótico para la evaluación de sistemas B-M de Borgam, Hoem y Norberg (1981)

En este apartado comentamos el nuevo criterio propuesto por Ornulf Borgan, Jan M. Hoem y Ragnar Norberg en 1981.

En el criterio asintótico, propuesto por Norberg en 1976, se puede objetar que en la realidad el número de periodos de vigencia de las pólizas es finito. Aunque se pueda considerar que, a partir de un cierto número de periodos n_0 la póliza está suficientemente próxima al estado estacionario, también habrá en la compañía aseguradora otras pólizas que no cumplan esta condición. Si la mayoría de las pólizas están lejos del estado estacionario, parece razonable modificar el criterio para así tener en cuenta el error de tarificación también para las nuevas pólizas y las que lleven un tiempo moderado de permanencia en la empresa. El principal propósito de este trabajo es proponer dicha modificación, basándose en la idea de que el rendimiento de la aplicación de un sistema B-M se puede medir por una media

ponderada de la esperanza de los cuadrados de los errores de tarificación para los periodos de seguro seleccionados.

De este modo, un criterio no asintótico permite el tratamiento racional de varios aspectos importantes en la práctica que no podrían ser analizados aplicando el criterio asintótico, como la elección de la clase óptima inicial y la heterogeneidad de riesgos a través del tiempo.

Los resultados basados en este nuevo criterio generalizan los obtenidos con el criterio asintótico propuesto por Norberg (1976) en el siguiente sentido:

Dado un conjunto de reglas del sistema B-M fijas, existe una única escala de primas óptima y los diferentes conjuntos de reglas del sistema B-M pueden ser comparados mediante una medida de eficiencia.

Los pesos utilizados en la media ponderada podrían tener varias interpretaciones, los autores nos dan dos:

- i) Son factores de descuento correspondientes a un tipo de interés dado.
- ii) Expresan la distribución de las edades de las pólizas en la

cartera.

Siendo esta segunda interpretación la que hemos dado anteriormente.

Las conclusiones parecen ser bastante robustas para los cambios efectuados en los pesos utilizados en la media ponderada.

A continuación exponemos algunos ejemplos en los que se emplea este método.

Ejemplos:

Ejemplos para la determinación de la clase inicial

Se han tomado las reglas de Noruega 1975, ya hemos visto que con el modelo de Norberg que está basado en la distribución asintótica, la elección de la clase inicial es arbitraria y se debe elegir atendiendo a otras consideraciones. Sin embargo, este modelo no asintótico permite elegir la clase inicial como aquella que tenga máxima eficiencia. Se han hecho varias elecciones de los pesos

Caso 1: $w_1 = \dots = w_{20} = \frac{1}{20}$ $w_n = 0$ si $n > 20$

Caso 2: $w_n = (\frac{1}{1.05})^{n-1}$ si $n \leq 20$ $w_n = 0$ si $n > 20$

Caso 3: $w_n = (\frac{1}{1.15})^{n-1}$ si $n \leq 20$ $w_n = 0$ si $n > 20$

Se ha calculado la eficiencia tomando como clase inicial cada una de las posibles y se han obtenido los siguientes valores

Caso 1		Caso 2		Caso 3	
<i>k</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>e</i>
1	0.02430	1	0.02399	1	0.02361
2	0.02443	2	0.02413	2	0.02377
3	0.02446	3	0.02417	3	0.02381
4	0.02466	4	0.02437	4	0.02399
5	0.02496	5	0.02466	5	0.02426
6	0.02517	6	0.02587	6	0.02443
7	0.02532	7	0.02502	7	0.02455
8	0.02542	8	0.02511	8	0.02462
9	0.02547	9	0.02517	9	0.02466
10	0.02549	10	0.02520	10	0.02469
11	0.02548	11	0.02520	11	0.02470
12	0.02539	12	0.02512	12	0.02464
13	0.02530	13	0.02502	13	0.02453

Obteniéndose como clases iniciales óptimas $k = 10$ en el caso 1, $k = 10$ y $k = 11$ en el caso 2 y la clase $k = 11$ en el caso 3.

Se han calculado también las escalas de primas óptimas en cada uno de los casos, obteniéndose

Caso 1 $k = 10$	Caso 2 $k = 10$	Caso 2 $k = 11$	Caso 3 $k = 11$																																																																																																																
<table><tr><th>C_j</th><th>π_j</th></tr><tr><td>1</td><td>0.399</td></tr><tr><td>2</td><td>0.359</td></tr><tr><td>3</td><td>0.333</td></tr><tr><td>4</td><td>0.336</td></tr><tr><td>5</td><td>0.309</td></tr><tr><td>6</td><td>0.285</td></tr><tr><td>7</td><td>0.264</td></tr><tr><td>8</td><td>0.240</td></tr><tr><td>9</td><td>0.219</td></tr><tr><td>10</td><td>0.177</td></tr><tr><td>11</td><td>0.165</td></tr><tr><td>12</td><td>0.155</td></tr><tr><td>13</td><td>0.117</td></tr></table>	C_j	π_j	1	0.399	2	0.359	3	0.333	4	0.336	5	0.309	6	0.285	7	0.264	8	0.240	9	0.219	10	0.177	11	0.165	12	0.155	13	0.117	<table><tr><th>C_j</th><th>π_j</th></tr><tr><td>1</td><td>0.398</td></tr><tr><td>2</td><td>0.358</td></tr><tr><td>3</td><td>0.332</td></tr><tr><td>4</td><td>0.333</td></tr><tr><td>5</td><td>0.307</td></tr><tr><td>6</td><td>0.282</td></tr><tr><td>7</td><td>0.262</td></tr><tr><td>8</td><td>0.235</td></tr><tr><td>9</td><td>0.216</td></tr><tr><td>10</td><td>0.171</td></tr><tr><td>11</td><td>0.161</td></tr><tr><td>12</td><td>0.152</td></tr><tr><td>13</td><td>0.117</td></tr></table>	C_j	π_j	1	0.398	2	0.358	3	0.332	4	0.333	5	0.307	6	0.282	7	0.262	8	0.235	9	0.216	10	0.171	11	0.161	12	0.152	13	0.117	<table><tr><th>C_j</th><th>π_j</th></tr><tr><td>1</td><td>0.407</td></tr><tr><td>2</td><td>0.368</td></tr><tr><td>3</td><td>0.341</td></tr><tr><td>4</td><td>0.344</td></tr><tr><td>5</td><td>0.316</td></tr><tr><td>6</td><td>0.295</td></tr><tr><td>7</td><td>0.271</td></tr><tr><td>8</td><td>0.255</td></tr><tr><td>9</td><td>0.226</td></tr><tr><td>10</td><td>0.212</td></tr><tr><td>11</td><td>0.167</td></tr><tr><td>12</td><td>0.157</td></tr><tr><td>13</td><td>0.120</td></tr></table>	C_j	π_j	1	0.407	2	0.368	3	0.341	4	0.344	5	0.316	6	0.295	7	0.271	8	0.255	9	0.226	10	0.212	11	0.167	12	0.157	13	0.120	<table><tr><th>C_j</th><th>π_j</th></tr><tr><td>1</td><td>0.407</td></tr><tr><td>2</td><td>0.368</td></tr><tr><td>3</td><td>0.342</td></tr><tr><td>4</td><td>0.342</td></tr><tr><td>5</td><td>0.313</td></tr><tr><td>6</td><td>0.294</td></tr><tr><td>7</td><td>0.269</td></tr><tr><td>8</td><td>0.253</td></tr><tr><td>9</td><td>0.222</td></tr><tr><td>10</td><td>0.208</td></tr><tr><td>11</td><td>0.162</td></tr><tr><td>12</td><td>0.152</td></tr><tr><td>13</td><td>0.122</td></tr></table>	C_j	π_j	1	0.407	2	0.368	3	0.342	4	0.342	5	0.313	6	0.294	7	0.269	8	0.253	9	0.222	10	0.208	11	0.162	12	0.152	13	0.122
C_j	π_j																																																																																																																		
1	0.399																																																																																																																		
2	0.359																																																																																																																		
3	0.333																																																																																																																		
4	0.336																																																																																																																		
5	0.309																																																																																																																		
6	0.285																																																																																																																		
7	0.264																																																																																																																		
8	0.240																																																																																																																		
9	0.219																																																																																																																		
10	0.177																																																																																																																		
11	0.165																																																																																																																		
12	0.155																																																																																																																		
13	0.117																																																																																																																		
C_j	π_j																																																																																																																		
1	0.398																																																																																																																		
2	0.358																																																																																																																		
3	0.332																																																																																																																		
4	0.333																																																																																																																		
5	0.307																																																																																																																		
6	0.282																																																																																																																		
7	0.262																																																																																																																		
8	0.235																																																																																																																		
9	0.216																																																																																																																		
10	0.171																																																																																																																		
11	0.161																																																																																																																		
12	0.152																																																																																																																		
13	0.117																																																																																																																		
C_j	π_j																																																																																																																		
1	0.407																																																																																																																		
2	0.368																																																																																																																		
3	0.341																																																																																																																		
4	0.344																																																																																																																		
5	0.316																																																																																																																		
6	0.295																																																																																																																		
7	0.271																																																																																																																		
8	0.255																																																																																																																		
9	0.226																																																																																																																		
10	0.212																																																																																																																		
11	0.167																																																																																																																		
12	0.157																																																																																																																		
13	0.120																																																																																																																		
C_j	π_j																																																																																																																		
1	0.407																																																																																																																		
2	0.368																																																																																																																		
3	0.342																																																																																																																		
4	0.342																																																																																																																		
5	0.313																																																																																																																		
6	0.294																																																																																																																		
7	0.269																																																																																																																		
8	0.253																																																																																																																		
9	0.222																																																																																																																		
10	0.208																																																																																																																		
11	0.162																																																																																																																		
12	0.152																																																																																																																		
13	0.122																																																																																																																		

Se concluye que el sistema noruego se podría mejorar tomando una clase inicial más alta y ajustando los valores de la escala de primas.

Ejemplos para incluir la heterogeneidad de riesgos a través del tiempo

Otra interpretación que se da a los pesos en este trabajo es

que permite introducir heterogeneidad en el tiempo, ya que los modelos basados en distribuciones asintóticas requieren la hipótesis de homogeneidad en el tiempo para los valores de la variable Λ , siniestralidad media individual, que no siempre es posible validar.

Para ilustrar este efecto se supone que se continúa con el modelo de Noruega 1975 todos los elementos siguen siendo los mismos, pero al parámetro λ se le multiplica por un factor $a_n > 1$ para valores de n pequeños, se calculan las primas óptimas y las eficiencias con las mismas fórmulas que en el caso anterior.

Caso a:

$$a_1 = 3, a_2 = 2.5, a_3 = 2, a_4 = 1.75, a_5 = 1.5, a_6 = 1.25,$$

$$a_7 = 1.15, a_8 = 1.05 \text{ y } a_n = 1 \text{ para } n > 8.$$

Caso b:

$$a_1 = 2, a_2 = 1.6, a_3 = 1.4, a_4 = 1.25, a_5 = 1.15, a_6 = 1.1,$$

$$a_7 = 1.05 \text{ y } a_n = 1 \text{ para } n > 7.$$

Se calculan las primas óptimas y la eficiencia para los diferentes valores de los pesos $\{w_n\}$ y de los coeficientes $\{a_n\}$ y

cada clase de entrada k . Se obtienen los siguientes resultados:

Caso 1, a		Caso 3, a		Caso 1, b		Caso 3, b	
k	e	k	e	k	e	k	e
1	0.05016	1	0.08237	1	0.03328	1	0.04363
2	0.04983	2	0.08186	2	0.03328	2	0.04363
3	0.04970	3	0.08173	3	0.03325	3	0.04359
4	0.04994	4	0.08095	4	0.03357	4	0.04387
5	0.04928	5	0.08052	5	0.03377	5	0.04397
6	0.04918	6	0.08023	6	0.03395	6	0.04409
7	0.04912	7	0.08011	7	0.03406	7	0.04415
8	0.04898	8	0.07985	8	0.03411	8	0.04417
9	0.04867	9	0.07956	9	0.03405	9	0.04412
10	0.04816	10	0.07896	10	0.03388	10	0.04397
11	0.04681	11	0.07722	11	0.03336	11	0.04336
12	0.04575	12	0.07546	12	0.03289	12	0.04271
13	0.04282	13	0.06875	13	0.03173	13	0.04024

Para el caso 1, a se obtiene que la clase inicial óptima es $k = 1$.

Para el caso 3, a se obtiene que la clase inicial óptima es $k = 1$.

Para el caso 1, b se obtiene que la clase inicial óptima es $k = 8$.

Para el caso 3, b se obtiene que la clase inicial óptima es

$k = 8$.

En cada uno de estos casos los valores que se obtienen para la escala de primas del sistema B-M son los siguientes:

Caso 1, a $k = 1$		Caso 3, a $k = 1$		Caso 1, b $k = 8$		Caso 3, b $k = 8$	
C_j	π_j	C_j	π_j	C_j	π_j	C_j	π_j
1	0.442	1	0.456	1	0.375	1	0.385
2	0.307	2	0.314	2	0.344	2	0.359
3	0.260	3	0.256	3	0.306	3	0.307
4	0.291	4	0.301	4	0.316	4	0.326
5	0.230	5	0.226	5	0.284	5	0.283
6	0.198	6	0.187	6	0.272	6	0.280
7	0.175	7	0.159	7	0.242	7	0.240
8	0.158	8	0.139	8	0.262	8	0.278
9	0.147	9	0.128	9	0.204	9	0.204
10	0.137	10	0.119	10	0.178	10	0.171
11	0.126	11	0.112	11	0.154	11	0.146
12	0.118	12	0.106	12	0.142	12	0.132
13	0.091	13	0.087	13	0.105	13	0.103

También se observa que al tener en cuenta los coeficientes $\{a_n\}$ la propensión a accidentes aumenta en todos los asegurados y por tanto aumentan las primas, también es curioso observar que en el caso a, cuando mayor valor toman los coeficientes $\{a_n\}$ para todos los valores de $\{w_n\}$ estudiados la clase inicial óptima es $k = 1$, que es la peor clase, sin embargo en el caso b en el que los coeficientes $\{a_n\}$ toman valores menores, se tiene menos

influencia sobre la clase inicial óptima, ya que en este caso pasamos de la clase inicial $k = 11$ a la clase inicial $k = 8$ que son relativamente próximas.

3.3.4 El sistema B-M con escalas lineales de Gilde y Sundt(1989)

En este apartado comentamos el artículo de Vibeke Gilde y Bjorn Sundt de la Universidad de Oslo.

Este trabajo estudia sistemas B-M, con escalas de primas lineales, como una mejora del trabajo propuesto por Borgam, Hoem y Norberg en 1981.

Una deseable propiedad de una escala de primas de un sistema B-M es que la prima no se incremente cuando pasamos a una clase más alta. Desafortunadamente aplicando el criterio no asintótico de Borgam, Hoem y Norberg en algunos casos esta propiedad no se cumple (véase Sundt (1984)). Asimismo, en un ejemplo anterior hemos visto que con el sistema B-M propuesto por Norberg (1976) tampoco se cumple esta propiedad. Para evitar este problema en este trabajo se sugiere restringir las escalas de primas permitidas a aquellas que sean lineales

respecto al número de la clase del B-M, es decir,

$$\pi(j) = a - bj \text{ para } j = 1, \dots, K$$

y la prima óptima se obtiene mediante la misma metodología que estableció Norberg (1976). Sundt (1984) encontró los valores óptimos para estos coeficientes a y b , para unas reglas del sistema B-M dadas, en términos de varianzas y covarianzas. Los autores denominan a la prima así obtenida *prima de credibilidad* basada en la clase del sistema B-M. Se argumenta incluso que, si esta escala no tiene la propiedad de monotonía, las reglas de transición no serían razonables y podrían ser alteradas. Comparando la escala general obtenida con otros criterios de optimización y la escala lineal, ésta es mucho más fácil de recordar y de entender para los agentes y para los asegurados. De hecho, las escalas lineales son utilizadas en muchos sistemas B-M aplicados en la práctica.

Como medida de la bondad del sistema B-M se toma la pérdida cuadrática esperada.

Se llama *riesgo de Bayes* a la pérdida cuadrática esperada para la escala de Bayes y *riesgo de credibilidad* a la pérdida cuadrática para la escala lineal, también llamada de credibilidad. A partir de estos valores se define una medida llamada *eficiencia de*

credibilidad, que es el cociente entre el riesgo de Bayes y el riesgo de credibilidad.

Ilustramos este método con cuatro ejemplos basados en el sistema B-M de Noruega 1975.

Ejemplo 1

Las reglas de transición son las de Noruega 1975, que describimos de nuevo.

$$T(j, r) = \left\{ \begin{array}{ll} \max(4, \min(j + 1, 13)) & \text{si } r = 0 \\ \max(1, j - 2r) & \text{si } r > 0 \end{array} \right\}$$

La póliza se mueve entre las clases 1,...,13, una clase arriba por un año sin siniestros y dos clases abajo por cada siniestro. Sin embargo, desde las tres primeras clases pasa a la clase 4 por un año sin siniestros.

Se supone que no hay heterogeneidad en el tiempo y se toman los valores $c_n = 1$ (coeficientes que multiplican al parámetro λ) para todo n . La variable aleatoria Na se supone uniformemente distribuida sobre los valores 1,...,20.

Se toman todas las posibles clases iniciales y para cada una de ellas se calculan los coeficientes a y b , el riesgo de credibilidad,

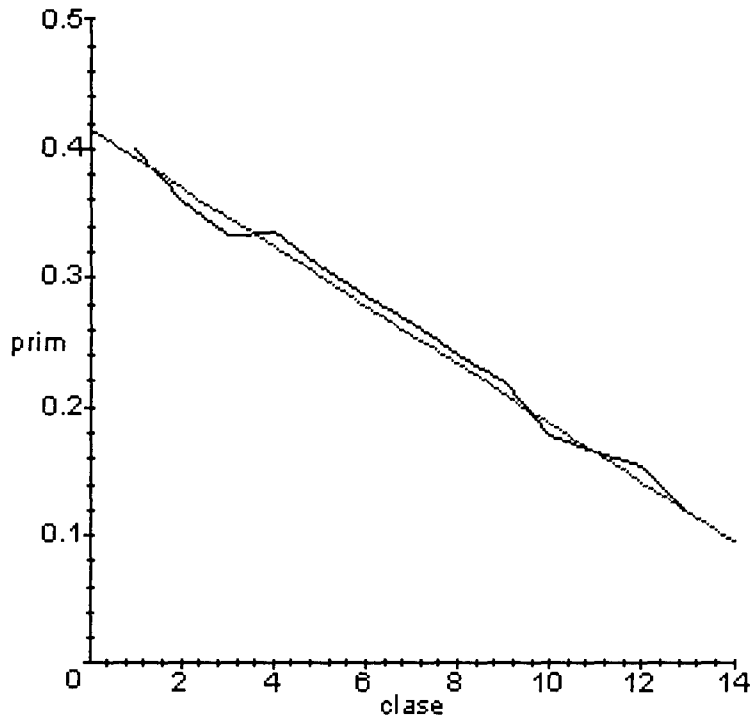
el riesgo de Bayes, la eficiencia de credibilidad y la escala de primas. Esta escala de primas viene dada, como es habitual en la práctica del seguro, por un porcentaje de la prima de la clase inicial (la prima base); lo que se representa en porcentaje es el paso entre dos clases adyacentes

Clase Inicial	a	b	% paso	Riesgo cred.	Riesgo Bayes	Eficiencia cred
1	0.226	0.0090	4.15	0.00921	0.00892	0.969
2	0.230	0.0095	4.50	0.00915	0.00880	0.962
3	0.234	0.0099	4.85	0.00909	0.00876	0.964
4	0.251	0.0113	5.49	0.00885	0.00856	0.967
5	0.270	0.0127	6.15	0.00863	0.00827	0.958
6	0.293	0.0144	6.97	0.00844	0.00806	0.954
7	0.320	0.0162	7.84	0.00828	0.00790	0.954
8	0.350	0.0183	8.99	0.00815	0.00781	0.958
9	0.383	0.0206	10.43	0.00806	0.00775	0.962
10	0.415	0.0228	12.19	0.00803	0.00773	0.963
11	0.442	0.0245	14.20	0.00806	0.00775	0.961
12	0.455	0.0253	16.71	0.00816	0.00783	0.960
13	0.457	0.0252	19.47	0.00828	0.00793	0.957

Observamos que el menor riesgo de Bayes y el menor riesgo de credibilidad se obtienen tomando la clase inicial $k = 10$.

Se representan también gráficamente la escala de Bayes y la

escala de credibilidad para las primas para esta clase inicial $k = 10$.



Se observa que la eficiencia de credibilidad varía muy poco al tomar las diferentes clases iniciales. En la escala de Bayes para las primas calculada por Norberg (1976) vemos que $\pi(4) > \pi(3)$, problema se evita si tomamos la escala lineal.

Ejemplo 2

Las reglas de transición son las mismas del ejemplo 1. Se supone también que no hay heterogeneidad en el tiempo y se

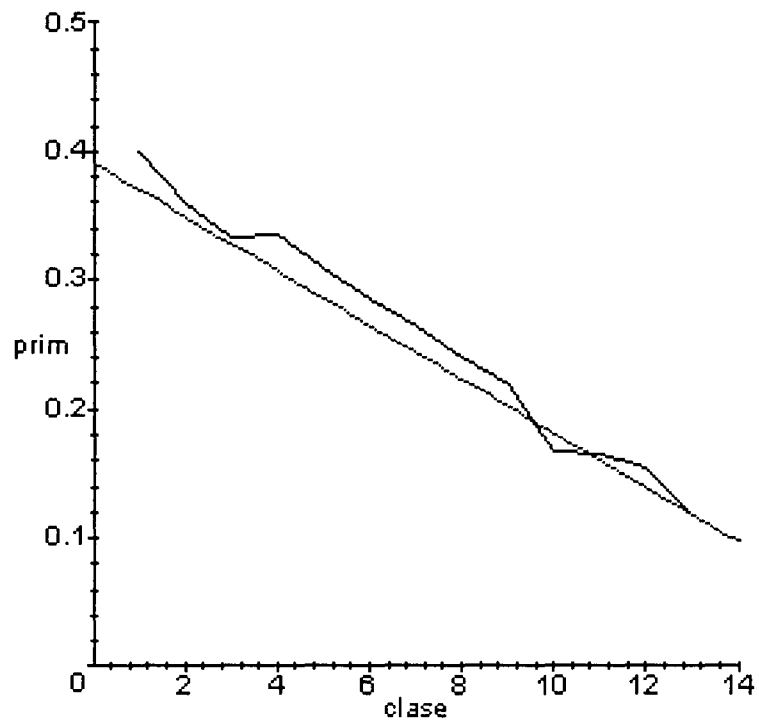
toman $c_n = 1$ para todo n . La distribución de Na está dada por

$$w_1 = 0.10, w_2 = w_3 = 0.09, w_4 = w_5 = 0.08, \dots, w_{18} = w_{19} = 0.01$$

se hacen los mismos cálculos que en el ejemplo anterior y en este caso se obtiene

Clase Inicial	a	b	% paso	Riesgo cred.	Riesgo Bayes	Eficiencia cred
1	0.200	0.0074	3.84	0.00967	0.00942	0.974
2	0.205	0.0080	4.23	0.00961	0.00927	0.965
3	0.210	0.0086	4.67	0.00955	0.00923	0.966
4	0.226	0.0100	5.38	0.00933	0.00903	0.968
5	0.244	0.0113	6.03	0.00914	0.00875	0.957
6	0.264	0.0127	6.76	0.00898	0.00856	0.953
7	0.288	0.0142	7.53	0.00885	0.00843	0.953
8	0.317	0.0161	8.55	0.00874	0.00836	0.956
9	0.351	0.0184	9.92	0.00865	0.00832	0.961
10	0.391	0.0210	11.60	0.00859	0.00829	0.966
11	0.430	0.0236	13.85	0.00859	0.00830	0.966
12	0.456	0.0251	16.21	0.00868	0.00837	0.964
13	0.459	0.0251	18.91	0.00881	0.00847	0.952

y la representación de la escala de Bayes y la escala lineal



Comparando con las del ejemplo 1 vemos que las clases iniciales y las escalas óptimas varían muy poco con la distribución de la edad . Esto indica que estos elementos son robustos ante la especificación de la distribución de la edad, lo cual es satisfactorio en la práctica ya que a veces es muy difícil estimar esta distribución.

Ejemplo 3

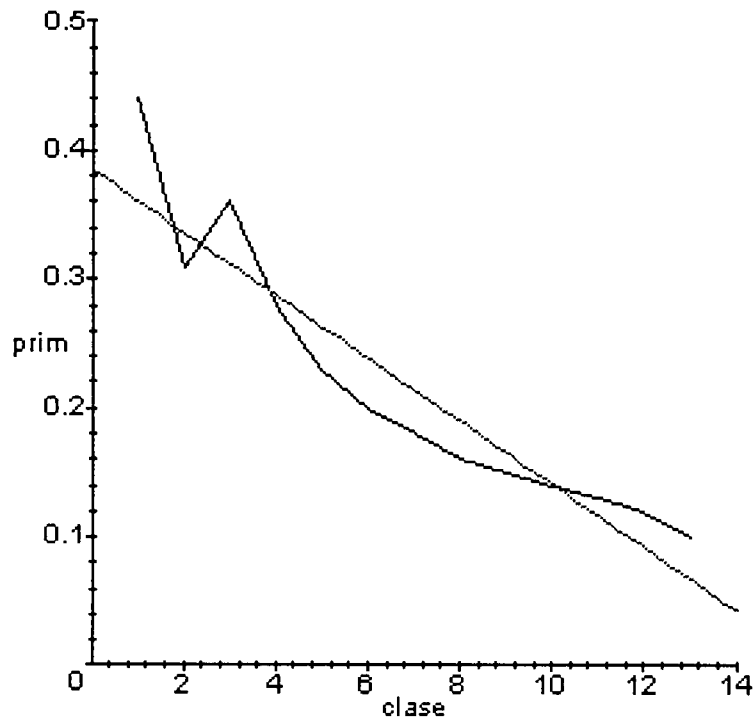
Las reglas de transición son las mismas que para los ejemplos 1 y 2. Se introduce la heterogeneidad en el tiempo y se toman los

coeficientes

$$c_1 = 3, c_2 = 2.5, c_3 = 2, c_4 = 1.75, c_5 = 1.5, c_6 = 1.25, c_7 = 1.15, \\ c_8 = 1.05, c_n = 1 \quad \forall n > 8$$

la distribución Na se toma la misma del ejemplo 1, uniforme que toma los valores $1, \dots, 20$. La interpretación que se puede dar a los coeficientes c_n decrecientes es que los conductores van aprendiendo y mejorando su forma de conducir con el tiempo. Los resultados obtenidos en este caso se muestran en la siguiente tabla y figura

Clase Inicial	a	b	% paso	Riesgo cred.	Riesgo Bayes	Eficiencia cred
1	0.385	0.0244	6.77	0.01884	0.01720	0.913
2	0.388	0.0246	7.26	0.01909	0.01753	0.918
3	0.389	0.0246	7.80	0.01940	0.01767	0.911
4	0.405	0.0255	8.42	0.01923	0.01792	0.932
5	0.421	0.0263	9.08	0.01914	0.01809	0.945
6	0.441	0.0271	9.73	0.01915	0.01818	0.949
7	0.459	0.0278	10.51	0.01935	0.01825	0.943
8	0.478	0.0284	11.32	0.01978	0.01839	0.930
9	0.491	0.0285	12.15	0.02047	0.01869	0.913
10	0.499	0.0282	13.00	0.02144	0.01921	0.896
11	0.496	0.0270	13.57	0.02264	0.02055	0.908
12	0.480	0.0249	13.74	0.02395	0.02161	0.902
13	0.456	0.0224	13.59	0.02502	0.02454	0.981



Observamos que para la clase inicial $k = 6$ el paso en la escala de credibilidad es 9.73%, muy próximo al 10% que es el que se aplica en la práctica. Sin embargo el riesgo de Bayes se podría reducir considerablemente si tomamos como clase inicial $k = 1$ en vez de $k = 6$.

Ejemplo 4

Se toman las siguientes reglas de transición:

$$T^*(j,r) = \left\{ \begin{array}{ll} \min(j+1, 13) & r = 0 \\ \max(1, j-3r) & r > 0 \end{array} \right\}$$

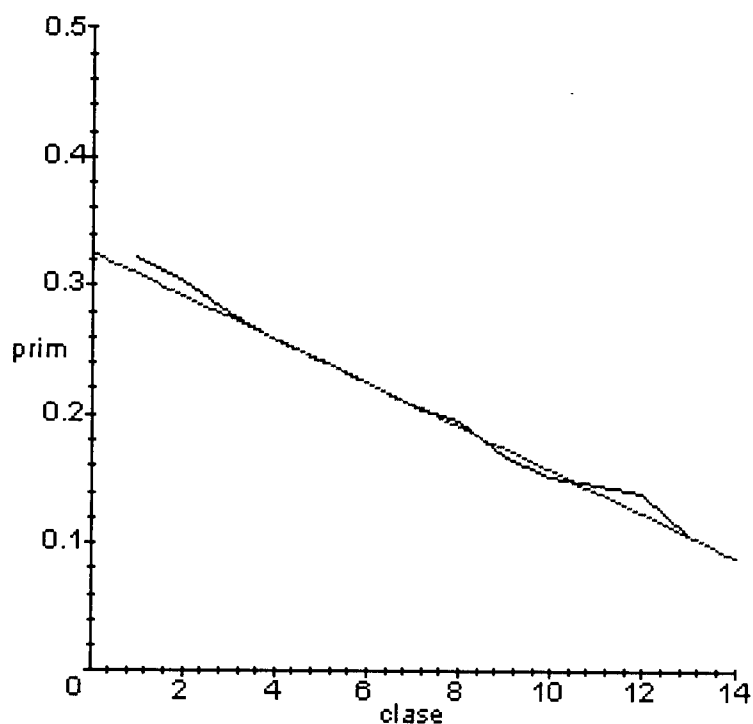
después de un año sin siniestros pasa a una clase mejor hasta llegar a la clase 13 que es la mejor de todas, por cada siniestro baja 3 clases. Las demás suposiciones son como en el ejemplo 1.

En este caso los resultados obtenidos son

Clase Inicial	a	b	% paso	Riesgo cred.	Riesgo Bayes	Eficiencia cred
1	0.212	0.0096	4.74	0.00889	0.00875	0.985
2	0.223	0.0105	5.20	0.00862	0.00834	0.968
3	0.235	0.0114	5.68	0.00837	0.00803	0.959
4	0.248	0.0123	6.19	0.00813	0.00778	0.957
5	0.263	0.0132	6.70	0.00792	0.00757	0.956
6	0.279	0.0142	7.33	0.00775	0.00743	0.959
7	0.295	0.0151	8.74	0.00754	0.00729	0.967
9	0.326	0.0169	9.72	0.00751	0.00728	0.970
10	0.339	0.0175	10.67	0.00755	0.00731	0.968
11	0.347	0.0178	11.77	0.00764	0.00739	0.967
12	0.351	0.0178	12.95	0.00776	0.00749	0.965
13	0.351	0.0176	14.40	0.00786	0.00761	0.968

y la siguiente representación de la escala de primas de Bayes y

la escala lineal



Observando estos resultados y comparando con el ejemplo 1 vemos que aplicando las reglas de transición T^* se reducen los riesgos de Bayes y de credibilidad.

Considerando los cuatro ejemplos se observa que la eficiencia de credibilidad varía entre 0.896 y 0.985. Si en cada ejemplo tomamos como clase inicial la que tenga menor riesgo de credibilidad, entonces varía entre 0.963 y 0.97, excepto en el

ejemplo 3 en que la eficiencia de credibilidad vale 0.913. Sin embargo, los autores creen que para los valores c_n del ejemplo 3 los efectos del aprendizaje son muy grandes y difícil que ocurran en la práctica. Se deduce que la pérdida de eficiencia tomando la escala de credibilidad en lugar de la escala de Bayes es bastante pequeña, considerando las ventajas que la escala de credibilidad tiene sobre la escala de Bayes, por lo que se aconseja que se aplique la escala de credibilidad.

Capítulo 4

Diseño de un sistema Bonus-Malus alternativo: El sistema GPBM

4.1 Introducción

Los sistemas B-M comentados en el capítulo 3 están contruidos minimizando la esperanza de los cuadrados de los errores de tarificación.

Aunque razonable desde el punto de vista teórico, la escala de Bayes tiene algunos inconvenientes en las aplicaciones prácticas.

Algunos de estos inconvenientes ya han sido mencionados. Por ejemplo, los niveles de las primas pueden no formar una secuencia monótona; la diferencia entre las primas asociadas con dos clases consecutivas puede ser demasiado grande o demasiado pequeña, así como puede serlo también la diferencia entre las primas de las clases extremas; pueden ser demasiado penalizados los asegurados de cierta clase,... En resumen, la escala de Bayes puede ser inadecuada por su falta de flexibilidad para cumplir algunas características razonables de las escalas B-M que realmente aplican las empresas aseguradoras.

En este capítulo proponemos una nueva metodología de diseño de sistemas B-M que nos permita evitar estos inconvenientes.

4.2 La escala de Bayes

Reconsideremos de nuevo la escala de Bayes obtenida por Norberg cuyas características comentamos en el capítulo 3. En primer lugar, observamos que el resultado de Norberg se puede obtener como la solución óptima de un cierto *Problema de Decisión Bayesiano*.

En los problemas de decisión generales es bien conocido (véase DeGroot (1970)) que, si las preferencias del decisor sobre las posibles consecuencias de sus decisiones son consistentes con ciertos axiomas de comportamiento racional, entonces es posible definir una función sobre dichas consecuencias (llamada *utilidad* de las consecuencias) tal que una decisión factible será preferida a otra si, y sólo si, la utilidad esperada de las posibles consecuencias es mayor para la primera decisión que para la segunda. En los problemas de decisión es habitual considerar la utilidad negativa, o *pérdida*. Entonces el decisor debería elegir como decisión óptima aquella que minimiza la pérdida esperada de sus consecuencias.

Más específicamente, el decisor tiene que proceder del siguiente modo: en primer lugar, tiene que definir una consecuencia para cada decisión factible y cada posible realización de los parámetros aleatorios; en segundo lugar, tiene

que especificar una pérdida numérica asociada a cada consecuencia; finalmente, tiene que calcular la pérdida esperada para cada decisión factible y elegir como óptima la decisión con mínima pérdida esperada.

Para aplicar este comportamiento general a nuestro caso particular, consideramos una póliza cualquiera que ha alcanzado el estado estacionario. Si nos planteamos un problema de decisión en el que los estados de la naturaleza son el parámetro λ de la póliza y la clase C_i alcanzada, las decisiones factibles son las posibles escalas (π_1, \dots, π_K) y la pérdida asociada a cada estado (λ, C_i) y cada posible decisión (π_1, \dots, π_K) es una pérdida cuadrática $(\pi_i - \lambda)^2$, entonces la decisión óptima es la que minimiza la pérdida esperada

$$\int \sum_{i=1}^K (\pi_i - \lambda)^2 \cdot p_i(\lambda) \cdot dU(\lambda)$$

que es precisamente el error cuadrático de tarificación esperado. Por tanto, la decisión óptima será adoptar la escala de Bayes.

Como hemos visto en el capítulo 3, el modelo de Norberg basado en escalas de Bayes constituye el modelo matemático estándar para la construcción de un sistema B-M óptimo. Más aún, el uso de funciones de pérdida cuadráticas implica que la

esperanza de las primas es igual a la esperanza de los siniestros, es decir, que el sistema es financieramente equilibrado, lo que supone una atractiva propiedad en el cálculo de primas. Sin embargo, tiene algunos inconvenientes. Ya vimos que Gilde y Sundt (1989) objetaron que la escala de Bayes no es necesariamente monótona, y propusieron como solución restringir las clases de escalas admisibles a escalas lineales. También Borgam, Hoem y Norberg (1981) modificaron el modelo con el objeto de incluir las pólizas jóvenes que no han tenido suficiente tiempo para llegar al estado estacionario.

Pero los anteriores no son los únicos inconvenientes de las escalas de Bayes, pensamos que el problema de decisión que fundamenta la escala de Bayes está sujeto a otras limitaciones, como las siguientes:

- El uso de funciones de pérdida cuadráticas implica valorar igualmente las desviaciones por exceso que por defecto en el cálculo de las primas. Sin embargo, podría resultar interesante distinguir entre ganancias excesivas de la empresa y ganancias excesivas del asegurado.
- La fórmula para la esperanza de los errores de tarificación al cuadrado valora igual el error cometido en todas las clases. Pero pensamos que los pesos podrían depender del valor de Λ : parece

claro que un error $(\pi_i - \lambda)^2 = 1$, es menos importante cuando $\lambda = 10$ que cuando $\lambda = \frac{1}{2}$, por ejemplo.

- No está clara la forma en que se puede “suavizar” un sistema B-M en caso de que, en el sistema original, las penalizaciones resulten excesivas y los asegurados estén tentados de cambiar de compañía aseguradora. Así como tampoco está clara la forma de incluir en ellos otras posibles características que por distintas razones (comerciales, de gestión, etc.) la empresa podría considerar deseables, tales como la existencia de un límite superior para la diferencia entre las primas de la mejor y la peor clase, de un límite superior para la diferencia entre dos clases consecutivas, de un límite superior para la prima de la peor clase o de un límite inferior para la prima de la mejor clase, etc.

En suma, pensamos que otros inconvenientes del modelo radican en su falta de flexibilidad para incorporar algunas propiedades razonables. Esto se debe a la gran dificultad de resolver un programa cuadrático con restricciones. Además, la nueva solución óptima no verificará, en general, las propiedades deseables mencionadas previamente, como la de equilibrio financiero.

Ilustramos este hecho con un ejemplo sencillo:

Ejemplo

Queremos diseñar una sistema B-M con tres clases. Debemos calcular la prima que deberán pagar los asegurados en cada una de las tres clases, es decir debemos calcular π_1, π_2 y π_3 . Conocemos la distribución discreta de la variable Λ que viene dada en la siguiente tabla:

λ_i	0.5	1	1.5
q_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

También conocemos las probabilidades condicionadas $p_i(\lambda_j)$ que representan la probabilidad de que un asegurado cuyo parámetro de riesgo es λ_j pertenezca, en el estado estacionario, a la clase C_i y vienen dadas en la siguiente matriz:

$$P(\lambda) = (p_i(\lambda_j)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calculamos el valor de las primas utilizando la norma L^2 , es decir, utilizando el método de Norberg. Debemos entonces resolver el siguiente programa cuadrático sin restricciones:

$$\begin{aligned} &Min[(\pi_1 - \lambda_1)^2 \frac{1}{5} \frac{1}{3} + (\pi_1 - \lambda_2)^2 \frac{1}{6} \frac{1}{3} + (\pi_1 - \lambda_3)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{3} \\ &+ (\pi_2 - \lambda_1)^2 \frac{1}{5} \frac{1}{3} + (\pi_2 - \lambda_2)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{3} + (\pi_2 - \lambda_3)^2 \frac{1}{4} \frac{1}{3} + \\ &(\pi_3 - \lambda_1)^2 \frac{3}{5} \frac{1}{3} + (\pi_3 - \lambda_2)^2 \frac{1}{3} \frac{1}{3} + (\pi_3 - \lambda_3)^2 \frac{1}{4} \frac{1}{3}] \end{aligned}$$

Resolvemos con Maple V este problema, véase el programa ejem-cap4 y obtenemos como resultado:

$$\pi_1 = \frac{61}{52} \simeq 1.17, \pi_2 = \frac{39}{38} \simeq 1.02 \text{ y } \pi_3 = \frac{121}{142} \simeq 0.85$$

Comprobamos que el sistema B-M así obtenido es financieramente equilibrado.

Valor esperado de ingresos por primas:

$$\frac{61}{52} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} + \frac{39}{38} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{3} + \frac{121}{142} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{3} = 1$$

Valor esperado de pagos por siniestros:

$$\frac{3}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = 1$$

Luego es financieramente equilibrado.

Supongamos que el sistema resulta inadecuado para nuestros propósitos en la práctica, por ejemplo porque los asegurados prefieren diferencias más grandes entre las dos primas extremas.

En este caso, por razones de marketing se recomienda un sistema B-M en el que los buenos conductores paguen, por ejemplo, la mitad que los malos. Es decir, en términos matemáticos, $\pi_1 = 2\pi_3$. Añadimos esta restricción a nuestra función objetivo y obtenemos un programa cuadrático con restricciones.

Resolvemos el nuevo problema con Maple, véase el programa ejem-cap4, y obtenemos como valores de las primas

$$\pi_1 = 1.30082, \pi_2 = 1.02632 \text{ y } \pi_3 = 0.65412$$

Con esta nueva solución obtenemos:

Valor esperado de ingresos por primas: 0.960951812

Valor esperado de pagos por siniestros: 1

Desafortunadamente, hemos perdido la propiedad de equilibrio financiero y en este caso la empresa pierde dinero, ya que el valor esperado de ingresos por primas es menor que el valor esperado de pagos por siniestros, por lo que la empresa a la larga se arruinaría.

La introducción de restricciones adicionales en los problemas

de pérdida cuadrática no es conveniente, puesto que se pierde, en general, la propiedad de equilibrio financiero, que es una importante propiedad de la escala de Bayes. Además la resolución de los programas cuadráticos con restricciones resulta difícil en muchos problemas reales con un gran número de clases y de restricciones. Un procedimiento alternativo podría ser modificar las reglas de transición y/o el número de clases. Pero también en los sistemas B-M que se aplican en el mundo real sería difícil encontrar, por prueba y error, las reglas de transición dadas las escalas con las propiedades apropiadas.

En la siguiente sección proponemos un sistema B-M alternativo obtenido como solución de un programa lineal. En dicho programa es fácil introducir las propiedades del sistema B-M deseadas, tales como equilibrio financiero y posibles requerimientos comerciales , añadiendo restricciones lineales.

4.3 Un modelo alternativo para la construcción de un sistema B-M óptimo: El sistema GPBM

4.3.1 Construcción teórica

Con el objetivo de resolver todos los problemas mencionados anteriormente, sugerimos un cambio en la formulación del problema bayesiano que nos conduce al sistema B-M.

El problema de decisión bayesiano, para diseñar un sistema B-M óptimo, definido en la sección anterior no es la única formulación posible. Una póliza arbitraria que alcanza el estado estacionario no está necesariamente, a partir de ese momento, en una clase fija. Es la probabilidad $p_i(\lambda)$ de que pertenezca (temporalmente) a esa clase C_i lo que permanece constante para una póliza con parámetro λ en el estado estacionario. Cada póliza puede cambiar de clase de acuerdo a esas probabilidades, y por tanto el valor medio de las primas pagadas por esos asegurados será

$$\sum_{i=1}^K \pi_i p_i(\lambda)$$

En esta tesis proponemos un nuevo problema de decisión bayesiano en el cual las posibles decisiones son de nuevo la escala de primas $(\pi_1 \dots \pi_K)$, los estados aleatorios son los valores de Λ , y la pérdida asociada a cada posible decisión (π_1, \dots, π_K) y cada realización de Λ es el valor absoluto del error de tarificación

$$\left| \sum_{i=1}^K \pi_i p_i(\lambda) - \lambda \right| \quad (4.1)$$

En este caso, la decisión óptima será la escala (π_1, \dots, π_K) que minimice

$$\int \left| \sum_{i=1}^K \pi_i p_i(\lambda) - \lambda \right| dU(\lambda)$$

Esta expresión es, en general, bastante difícil de resolver. No obstante, si suponemos de ahora en adelante, como es normal en la literatura (véase Norberg (1976)), que el parámetro Λ tiene una distribución discreta (tomando los posibles valores $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ con

p.253)), es decir, sólo uno de ellos puede ser no nulo, y entonces

$$\forall j, \left| \sum_{i=1}^K \pi_i p_i(\lambda_j) - \lambda_j \right| = x_j^0 + y_j^0$$

Es importante destacar que este programa es un caso particular de la técnica de programación multiobjetivo conocida como *Programación por metas (Goal Programming)*, lo que justifica que de ahora en adelante denominemos al sistema B-M que proponemos como GPBM, iniciales de “Goal Programming Bonus Malus”.

Este hecho tiene una fácil interpretación: En los programas generales de programación por metas el decisor intenta encontrar los valores de las variables de decisión tales que ciertas funciones objetivo tomen valores tan próximos como sea posible a un conjunto de metas previas. En nuestro problema dichas metas son $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, los posibles valores del parámetro Λ , e intentamos encontrar los valores de las variables de decisión π_1, \dots, π_K tales que se aproximen, para cada póliza de parámetro λ_j , el valor de la media de las primas pagadas por ese asegurado ($\sum_{i=1}^K \pi_i p_i(\lambda_j)$) y su frecuencia de siniestros real λ_j .

La metodología de programación por metas se ha convertido en una de las más importantes herramientas para resolver problemas de optimización multicriterio, quizás porque es una técnica fácil de manejar con una gran flexibilidad para incorporar las características de los problemas reales. Veremos que esta flexibilidad nos permite añadir a nuestro sistema B-M todas las características razonables mencionadas en la sección anterior.

En efecto, sustituyendo la función objetivo del programa lineal por la siguiente,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m (v_i \cdot x_i + w_i \cdot y_i) \cdot q_i$$

es posible valorar de forma diferente (incluso dependiendo de los distintos valores del parámetro Λ) los errores de tarificación positivos y negativos, siendo v_i y w_i los pesos asociados a dichos errores.

Asimismo es posible establecer una relación entre la solución óptima del programa anterior y el grado de desequilibrio financiero. De hecho, éste viene medido por la expresión

$$\sum_{i=1}^K \pi_i p_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j q_j \quad (4.3)$$

donde $p_i = \sum_{j=1}^m p_i(\lambda_j) q_j$ es una discretización de $p_i = \int p_i(\lambda) dU(\lambda)$.

Valores positivos de (4.3) denotan una ganancia para la compañía aseguradora, mientras que valores negativos denotan una pérdida (y por lo tanto ganancia de los asegurados). Multiplicando cada restricción del programa lineal por su probabilidad y sumando todas estas restricciones, obtenemos una segunda expresión equivalente para el grado de equilibrio financiero

$$\sum_{i=1}^m (x_i^0 - y_i^0) \cdot q_i \quad (4.4)$$

donde x_i^0, y_i^0 son las variables de desviación óptimas solución del programa lineal.

De esta forma, la formulación lineal del programa de decisión permite incorporar fácilmente numerosas características que se consideran necesarias. Por ejemplo, haciendo nula una de las expresiones previas (4.3) o (4.4), conseguimos introducir la condición de equilibrio financiero en nuestro programa lineal, mediante una nueva restricción lineal.

La no negatividad de las primas se podría introducir con las restricciones

$$\pi_i \geq 0, \forall i$$

Restricciones lineales del tipo

$$\pi_i - \pi_{i+1} \geq d$$

introducen un límite inferior para la distancia entre dos primas consecutivas. Incluso este límite inferior puede ser diferente para cada dos primas consecutivas, lo que se consigue con restricciones del tipo

$$\pi_i - \pi_{i+1} \geq d_i$$

De modo similar, la restricción

$$0 \leq \pi_1 - \pi_K \leq D$$

introduce un límite superior para la distancia entre primas extremas. Las restricciones del tipo

$$0 \leq \pi_i - \pi_{i+1} \leq D_i$$

introducen límites superiores para las distancias entre dos primas consecutivas.

Estos valores D_i y d_i pueden ser constantes o funciones lineales de las primas.

Como en el caso de la escala de Bayes, las primas obtenidas como soluciones óptimas de nuestro programa lineal no forman necesariamente una secuencia monótona. Para conseguir la propiedad de monotonía simplemente debemos de incluir las restricciones adicionales

$$\pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_K$$

Sustituyendo el valor de la prima π_i por $a - bi$ se obtiene una escala de primas lineal en el número de la clase como la obtenida por Gilde y Sundt.

También es posible modificar nuestro programa para considerar la existencia de pólizas que no han llegado al estado estacionario como hicieron Borgam, Hoem y Norberg.

Consideremos los vectores de probabilidad, condicionados a $\Lambda = \lambda$, para cada año n de vida de la póliza.

Si $n = 1$, es decir, el primer año $\vec{p}^{(1)}(\lambda) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, todas las coordenadas son nulas salvo la k -ésima que es la unidad, ya que la póliza estará en C_k puesto que es la clase de entrada.

Si $n = 2$, el vector de probabilidad condicionada se obtiene $\vec{p}^{(2)}(\lambda) = \vec{p}^{(1)}(\lambda).P$, siendo P la matriz de probabilidades de un paso correspondiente a la cadena de Markov.

Así sucesivamente, $\vec{p}^{(n)}(\lambda) = \vec{p}^{(1)}(\lambda).P^{n-1} = \dots = \vec{p}^{(n-1)}(\lambda).P$.

Si $n \rightarrow \infty$, $\vec{p}(\lambda)$ es el autovector asociado al autovalor unidad cuyas componentes son no negativas y suman la unidad.

Consideramos también la variable aleatoria, Na , número de años de antigüedad de la póliza y tomamos como valores de los pesos $w_n = \Pr(Na = n)$.

En este caso, la escala de primas óptima se podría calcular resolviendo el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \left(\sum_{j=1}^m (x_j + y_j) \cdot q_j \right) \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^K \pi_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n p_i^{(n)}(\lambda_j) \right) + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, m \\ \pi_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, K \\ x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Aunque podría parecer que este programa lineal tiene infinitos sumandos en las m primeras restricciones, el número de sumandos se reduce a un número finito ya que $\Pr(Na \geq n_0) = 0$ para algún número de años de antigüedad de la póliza n_0 ; y por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty}$ se podría sustituir por $\sum_{n=1}^{n_0}$, quedando así un número finito de incógnitas.

Finalmente, debemos recordar que los requisitos previos para encontrar una escala de primas son conocer el número de clases y las reglas de transición. Como en el caso de las escalas de Bayes, se pueden evaluar diferentes conjuntos de clases (iniciales) y reglas de transición y compararlos de acuerdo con el valor óptimo de la función objetivo.

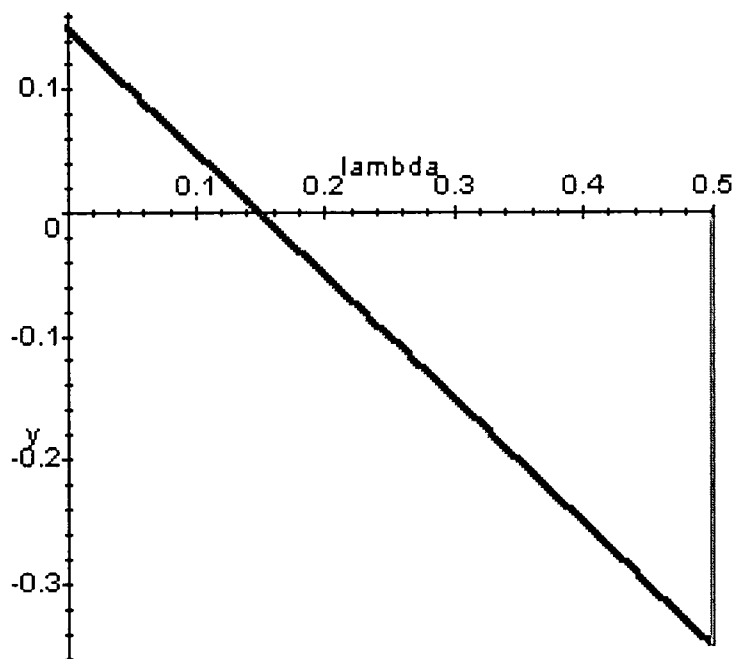
4.3.2 Comparación de sistemas B-M

La comparación de sistemas B-M, utilizando esta nueva metodología, se puede llevar a cabo comparando los valores que toma la función objetivo, sustituyendo los valores que toman las variables (primas y errores de tarificación), en cada uno de los sistemas B-M a comparar. Puesto que el problema de programación lineal trata de minimizar la función objetivo, diremos que es *mejor* solución aquella para la que la función objetivo tome un valor menor. (Evidentemente, el sistema B-M óptimo en este sentido será nuestro GPBM).

No obstante, tenemos también otros elementos que permiten una comparación más exhaustiva de sistemas B-M. Estos elementos son los errores de tarificación. Considerando el programa lineal de programación por metas propuesto, la solución ideal sería aquella en que todos los errores de tarificación fuesen nulos, en cuyo caso alcanzaríamos todas las metas; pero como habitualmente no es posible encontrar una solución que cumpla este requisito, podemos representar gráficamente estos errores de tarificación para cada valor de Λ y considerar que, en general, un sistema B-M es mejor que otro cuando sus errores de

tarificación están más próximos al eje de abscisas.

Veamos esto más detalladamente. Supongamos que no se aplica ningún sistema B-M, entonces la prima pura para todos los asegurados, independientemente de su siniestralidad, es $E[\Lambda]$; por lo tanto, los errores de tarificación vienen dados por la función $y = E[\Lambda] - \Lambda$, cuya representación gráfica es



Veamos algunas características que nos aporta la representación de esta función:

1. Si en un punto de la gráfica es $y > 0$ entonces $E[\Lambda] > \lambda$ y por tanto, los asegurados cuyo parámetro de siniestralidad sea λ , están pagando una prima mayor que su siniestralidad media; se comete un error positivo que es desfavorable para el asegurado.
2. Si en un punto de la gráfica es $y < 0$ entonces $E[\Lambda] < \lambda$ y por tanto, los asegurados cuyo parámetro de siniestralidad sea λ , están pagando una prima menor que su siniestralidad media; se comete un error negativo que es desfavorable para la empresa.
3. Los puntos de corte con los ejes son:

$(E[\Lambda], 0)$, que está en el eje de abscisas; y por lo tanto no se comete error de tarificación para los asegurados cuya siniestralidad media individual coincida con la siniestralidad media de toda la cartera ($\lambda = E[\Lambda]$) y

$(0, E[\Lambda])$ que significa que para los asegurados cuyo parámetro de siniestralidad es cero, es decir, nunca tienen siniestros, se comete el mayor error de tarificación positivo $E[\Lambda]$. (Evidentemente, estos asegurados ideales no existen).

4. Si todos los asegurados pagan la misma prima pura $E[\Lambda]$, el sistema es financieramente equilibrado y por tanto

$$\int_0^{+\infty} (E[\Lambda] - \Lambda) dU(\Lambda) = 0$$

luego el área ponderada que está sobre el eje de abscisas y el que está debajo de él tienen el mismo valor pero de signo contrario:

$$\int_0^{E[\Lambda]} (E[\Lambda] - \Lambda) dU(\Lambda) = - \int_{E[\Lambda]}^{+\infty} (E[\Lambda] - \Lambda) dU(\Lambda)$$

Como hemos mencionado en el capítulo 2, utilizando teoría de la credibilidad bayesiana, la prima a posteriori converge hacia el verdadero valor de λ cuando $n \rightarrow \infty$. (Véase De Groot (1970) pp. 202-203). Por este motivo, la situación ideal sería que los errores de tarificación fueran siempre nulos, con lo que la gráfica de errores coincidiría con el eje de abscisas.

Teniendo en cuenta estas características, si representamos gráficamente los errores de tarificación de un sistema B-M, podemos decir que es *mejor* cuanto valores más pequeños tomen estas áreas ponderadas.

Minimizando el valor de dichas áreas surge de nuevo nuestro modelo GPBM.

4.3.3 Ejemplificación de la nueva metodología

Como un ejemplo sencillo de la nueva metodología, podemos aplicarla a la construcción de un sistema B-M para el ejemplo expuesto en la sección 4.2 . Recordemos que habíamos calculado la escala de Bayes y suponíamos que no era satisfactoria por tener un rango demasiado pequeño. Por supuesto, podríamos intentar definir nuevas clases y/o reglas de transición, con el objetivo de encontrar una escala de Bayes con las propiedades deseadas. Dicha metodología puede tener éxito en muchos casos, pero también puede ser inadecuada cuando el sistema tiene un gran número de clases y reglas de transición complicadas. En este caso, podría ser razonable introducir las propiedades deseadas como restricciones lineales usando la metodología de Programación por Metas. En este ejemplo el programa lineal es

$$\begin{aligned} & \min[(x_1 + y_1)\frac{1}{3} + (x_2 + y_2)\frac{1}{3} + (x_3 + y_3)\frac{1}{3}] \\ & \text{sujeto a} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 + x_1 - y_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 + x_2 - y_2 = 1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + x_3 - y_3 = \frac{3}{2} \\ \pi_1 \geq \pi_2 \\ \pi_2 \geq \pi_3 \\ (x_1 - y_1)\frac{1}{3} + (x_2 - y_2)\frac{1}{3} + (x_3 - y_3)\frac{1}{3} = 0 \\ \pi_1 = 2\pi_3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

y se obtiene como solución, (véase el programa ejem-cap4), $\pi_1 = 0.66667$, $\pi_2 = 1.11111$ y $\pi_3 = 1.33333$, que cumple todas las propiedades requeridas, siendo además el sistema B-M financieramente equilibrado.

En los siguientes capítulos expondremos aplicaciones más detalladas de la nueva metodología a la construcción de sistemas B-M sobre datos reales.

Capítulo 5

Comparación con
los sistemas
Bonus Malus
teóricos más
importantes

5.1 Introducción

En este capítulo comparamos los sistemas B-M, relacionados con el que se aplicaba en Noruega en 1975 y que se han estudiado en el capítulo 3, con el sistema GPBM que defendemos en esta tesis.

Para aplicar nuestro modelo necesitamos conocer la distribución de la variable Λ y discretizarla.

En el artículo de Norberg (1976) se calcula una discretización de esta variable aleatoria, dada en la siguiente tabla:

λ_i	.033	.067	.1	.133	.167	.2	.233	.267	.3	.333
$\Pr(\Lambda = \lambda_i) = q_i$.143	.172	.143	.114	.1	.086	.072	.057	.043	.029
	.367	.4	.433	.467	.5	.533	.567	.6	.633	.667
	.014	.007	.006	.004	.003	.001	.001	.001	.0001	.0001

(5.1)

En cada caso se toma el sistema B-M estudiado y con las mismas reglas se plantea un nuevo sistema con el modelo GPBM y se van variando las restricciones, ya que este modelo permite la introducción de nuevas restricciones, con las mismas reglas del sistema, para satisfacer necesidades de mercado, como vimos en

el capítulo 4.

Con el objeto de hacer estas comparaciones hemos aplicado el modelo GPBM con cada una de las reglas de transición dadas por las matrices (3.2), (3.4) y (3.6). En cada caso se han resuelto diferentes programas para añadir las restricciones convenientes. La solución de cada uno de estos programas nos proporciona una escala de primas y unos valores de los errores de tarificación óptimos.

Posteriormente, se calculan los errores de tarificación cometidos al cambiar los valores de la escala de primas óptima para el modelo GPBM por la escala de primas del sistema B-M con el que queremos comparar; se calcula también el valor de la función objetivo para esta escala de primas y se hace la representación gráfica de los errores de tarificación cometidos en ambos casos.

Para calcular estos valores hemos trabajado con el lenguaje de programación Maple V, hemos realizado varios programas de los que explicamos brevemente su contenido.

Para el cálculo de la distribución estacionaria, puesto que ésta depende únicamente de las reglas de transición, hemos tomado las tres reglas utilizadas: Las expresadas en (3.2) que son las que

se utilizaban en Noruega en 1975, las expresadas en (3.4) que son las propuestas en la primera modificación que utilizó Norberg (1976) y las expresadas en (3.6) que son las propuestas en la siguiente modificación que utilizó Norberg en dicho trabajo. Los programas referentes a esta parte se llaman:

- Dis-est-Noru75: Calcula la distribución estacionaria para los valores de Λ que hemos tomado en la distribución discretizada (5.1), con las reglas dadas por la matriz (3.2).
- Dis-est-Norberg2: Calcula la distribución estacionaria para los valores de Λ que hemos tomado en la distribución discretizada (5.1), con las reglas dadas por la matriz (3.4).
- Dis-est-Norberg3: Calcula la distribución estacionaria para los valores de Λ que hemos tomado en la distribución discretizada (5.1), con las reglas dadas por la matriz (3.6).
- Dis-Borgam: Calcula la distribución no estacionaria para los valores de Λ que hemos tomado en la distribución discretizada (5.1), con las reglas dadas por la matriz (3.2), para el ejemplo propuesto por Borgam Hoem y Norberg (1981).

Para resolver los programas de programación por metas:

- Pro-lin-Noru75: Resuelve los programas P_1, P_2, \dots, P_6 utilizados

para comparar con el sistema B-M que se utilizaba en Noruega en 1975. También resuelve los programas P1Norberg1, P2Norberg1 y P3Norberg1, utilizados para comparar el sistema propuesto por Norberg (1976) con las reglas de transición dadas por (3.2). En este caso, así como en los posteriores, hemos utilizado la abreviatura $P_n\text{Norberg}_m$, donde n representa el número de programa para cada una de las reglas y m se refiere al número ordinal de las reglas, es decir, si $m = 1$ se refiere a las primeras reglas utilizadas por Norberg y así sucesivamente.

- Pro-lin-Norberg2: Resuelve los programas P1Norberg2, P2Norberg2,..., P6Norberg2 utilizados para comparar el sistema propuesto por Norberg (1976) con las reglas de transición dadas por (3.4).
- Pro-lin-Norberg3: Resuelve los programas P1Norberg3, P2Norberg3,..., P6Norberg3 utilizados para comparar el sistema propuesto por Norberg (1976) con las reglas de transición dadas por (3.6).
- Pro-lin-Borgam: Resuelve los problemas lineales propuestos por Borgam, Hoem y Norberg (1981).
- Primas-lineales: Resuelve los programas utilizados para

comparar el sistema propuesto por Gilde y Sundt (1981).

Para calcular los valores de la función objetivo y de los errores de tarificación para la escala de primas óptima propuesta por los diferentes autores en el sistema B-M que queremos comparar, se han realizado los siguientes programas:

- Fun-obj-Noru75: Calcula el valor de la función objetivo y de los errores de tarificación para la escala de primas utilizada en Noruega en 1975.
- Fun-obj-Norberg1: Calcula el valor de la función objetivo y de los errores de tarificación para la escala de primas propuesta por Norberg (1976) para las reglas de transición dadas en (3.2).
- Fun-obj-Norberg2: Calcula el valor de la función objetivo y de los errores de tarificación para la escala de primas propuesta por Norberg (1976) para las reglas de transición dadas en (3.4).
- Fun-obj-Norberg3: Calcula el valor de la función objetivo y de los errores de tarificación para la escala de primas propuesta por Norberg (1976) para las reglas de transición dadas en (3.6).
- Fun-obj-Borgam: Calcula el valor de la función objetivo y de los errores de tarificación para la escala de primas propuesta por

Borgam, Hoem y Norberg (1981).

- Fun-obj-Gilde: Calcula el valor de la función objetivo y de los errores de tarificación para la escala de primas, lineales en el número de la clase, propuesta por Gilde y Sundt (1989) para las reglas de transición dadas en (3.2).

Para hacer las representaciones gráficas de los errores de tarificación y la comparación entre los sistemas B-M propuestos por los diferentes autores y el sistema GPBM se han realizado los siguientes programas en Maple V:

- Var-holg-Noru75: Representaciones gráficas que permiten la comparación entre el sistema B-M utilizado en Noruega en 1975 y el sistema GPBM propuesto en esta tesis.
- Var-holg-Norberg1: Representaciones gráficas que permiten la comparación entre el sistema B-M propuesto por Norberg (1976) con las reglas dadas por (3.2) y el sistema GPBM propuesto en esta tesis.
- Var-holg-Norberg2: Representaciones gráficas que permiten la comparación entre el sistema B-M propuesto por Norberg (1976) con las reglas dadas por (3.4) y el sistema GPBM propuesto en esta tesis.

- Var-holg-Norberg3: Representaciones gráficas que permiten la comparación entre el sistema B-M propuesto por Norberg (1976) con las reglas dadas por (3.6) y el sistema GPBM propuesto en esta tesis.
- Var-holg-Borgam: Representaciones gráficas que permiten la comparación entre el sistema B-M propuesto por Borgam, Hoem y Norberg (1981) y el sistema GPBM propuesto en esta tesis.
- Var-holg-Gilde: Representaciones gráficas que permiten la comparación entre el sistema B-M propuesto por Gilde y Sundt (1981) con las reglas dadas por (3.2) y el sistema GPBM propuesto en esta tesis.

5.2 Comparación con Noruega 1975

El sistema noruego anteriormente descrito tiene $K = 13$ clases, la clase inicial es $k = 6$ y la escala del sistema B-M se da en función de la prima inicial $\pi(6)$ mediante la siguiente relación

$$\pi(j) = \left(1 + \frac{6-j}{10}\right) \cdot \pi(6), \quad j = 1, 2, \dots, 13$$

Si tomamos $\pi(6) = 0.152$ obtenemos que la escala de primas que se aplicaban en Noruega en 1975 es

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
π_j	.228	.213	.198	.182	.167	.152	.137	.122	.106	.091	.076	.061	.046

La función de estructura (5.1) se aproxima bastante bien a la función de estructura de las pólizas de seguros de coches particulares en Noruega en 1975, y tomando EX , es decir el coste medio de un siniestro, como unidad monetaria, se obtiene $ES = E\Lambda = 0.152$.

Con el fin de aplicar el modelo GPBM , formulamos el siguiente problema de programación por metas:

$$\begin{aligned}
 P1 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\ \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

donde $p_i(\lambda_j)$ representa la probabilidad de que una póliza aleatoria

cuya siniestralidad media sea λ_j se encuentre en la clase C_i en el estado estacionario, π_i representa el valor de la prima que deberá ser pagada en la clase C_i , x_j e y_j los errores de tarificación negativo y positivo, respectivamente, para una póliza aleatoria cuya siniestralidad media sea λ_j .

La resolución de este programa de programación por metas se ha hecho utilizando el lenguaje de programación Maple V, la resolución pormenorizada está en los programas Dist-est-Noru75 y pro-lin-Noru75.

Los resultados obtenidos para las escalas de primas óptimas se encuentran en las tablas correspondientes al final de cada apartado.

En el programa P1 la escala de primas óptima está en la tabla 5.2.1, el valor de la función objetivo es

$$Obj1 = 0.003729$$

y el valor del desequilibrio financiero

$$Deseq = 0.0008558$$

Nuestro deseo es que el sistema BM sea financieramente

equilibrado por lo que añadimos una nueva restricción para que el desequilibrio sea nulo, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20
 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

resolviendo este nuevo programa lineal se obtienen los nuevos valores para la escala de primas óptima (véase tabla 5.2.2), y un valor de la función objetivo

$$Obj2 = 0.0037516$$

En el caso de Noruega 75 la clase inicial era $k = 6$, ajustándose el valor de $\pi(6)$ con el riesgo medio del grupo, que en este caso es $\lambda = 0.152$. Con el objeto de que también se cumpla esta condición, podemos añadir una nueva restricción a nuestro programa que será $\pi(6) = 0.152$, quedando el siguiente programa

lineal

$$\begin{aligned}
 P3 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

obteniéndose, en este caso, como solución la escala de primas dada en la tabla 5.2.3 y como valor de la función objetivo

$$Obj3 = 0.0390649$$

En este caso el cociente entre la prima de mayor valor y la de menor valor es $\frac{\pi_1}{\pi_{13}} = \frac{1.18476}{0.08407} = 14.093$ que puede resultar un valor demasiado grande ya que en el caso de Noruega $75 \frac{\pi_1}{\pi_{13}} \leq 5$. Este inconveniente podemos solventarlo añadiendo la nueva restricción $\pi_1 \leq 5\pi_{13}$ con lo que el programa lineal nos queda

$$\begin{aligned}
 P4 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152 \\
 \pi_1 \leq 5 * \pi_{13}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Obteniéndose la nueva escala de primas (véase tabla 5.2.4) y valor de la función objetivo

$$Obj4 = 0.054366$$

Las soluciones obtenidas hasta ahora tienen la peculiaridad de que la escala de primas no es estrictamente decreciente, sino que las primas de varias clases consecutivas son iguales. Esta característica puede parecer extraña a los asegurados, que no verán qué mejora supone ascender una o varias clases si deben pagar la misma prima. Para solventar este inconveniente

podemos añadir nuevas restricciones que obligen a la escala de primas a ser estrictamente decreciente. Estas restricciones nuevas pueden ser de dos tipos. En primer lugar, se puede obligar a que la escala de primas decrezca al menos una cantidad constante, por ejemplo una milésima, obteniendo de este modo el nuevo programa lineal

$$\begin{aligned}
 P5 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152, \quad \pi_1 \leq 5 * \pi_{13} \\
 \pi_i - \pi_{i+1} \geq 0.001 \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene la escala de primas (véase tabla 5.2.5) y un valor de la función objetivo

$$Obj5 = 0.05497$$

O también podríamos añadir restricciones que obligen a decrecer al valor de la prima de una clase un porcentaje del valor de la prima de la clase anterior, con lo que se obtiene el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P6 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152 \\
 \pi_1 \leq 5 * \pi_{13} \\
 \pi_i \leq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

obteniéndose la escala de primas (véase tabla 5.2.6) y el siguiente valor de la función objetivo

$$Obj6 = 0.0557369$$

Al aplicar nuestro modelo, cumpliéndose todas las condiciones

deseables, el valor de la función objetivo es por tanto

$$Obj6 = 0.0557369$$

La función objetivo no es directamente función de los valores de las primas sino que es función de las variables de holgura (variables no deseadas), que son precisamente los errores de tarificación. Con el propósito de comparar los valores de la función objetivo del sistema B-M que se aplicaba en Noruega en 1975 y el valor de la función objetivo del sistema GPBM, calculamos estas variables de holgura, para la escala de primas de Noruega, comparando la prima realmente pagada con la verdadera prima pura, es decir, comparando $\sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \cdot \pi(i)$ con λ_i siendo $p_i(\lambda_j)$ la probabilidad de que un asegurado cuyo parámetro de riesgo es λ_j esté en la clase i en el estado estacionario y $\pi(i)$ la prima pagada en la clase i . Estos cálculos, así como el valor del desequilibrio financiero en el sistema B-M de Noruega, se han realizado en el programa fun-obj-Noru75.

Una vez calculadas las variables de holgura y sustituidas en la función objetivo y en la función que nos muestra el desequilibrio financiero. (Ver programa fun-obj-Noru75). Se obtiene un valor para la función objetivo

$$Obj(Noruega75) = .09017431773$$

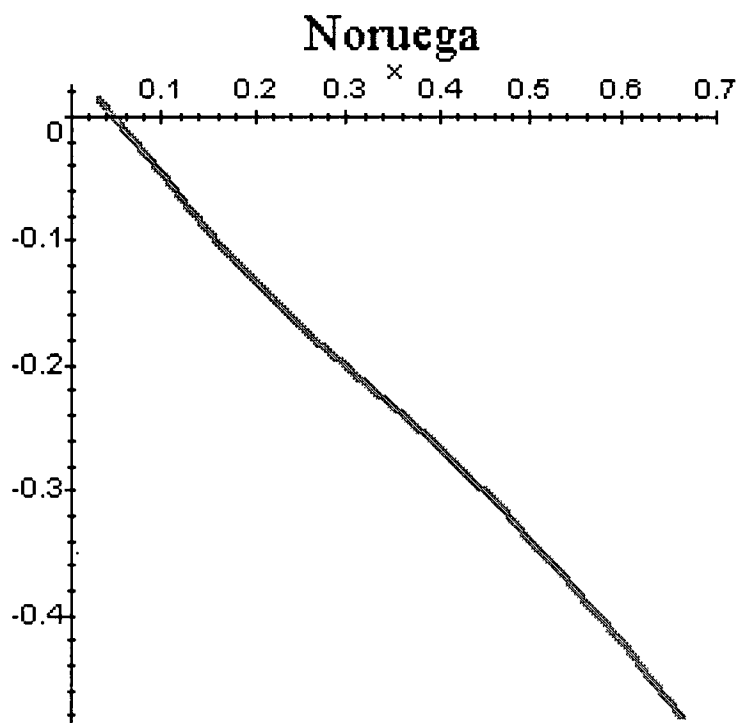
y un valor del desequilibrio financiero

$$Deseq(Noruega75) = .08597477794$$

por lo que según nuestro criterio no es financieramente equilibrado, siendo además este desequilibrio desfavorable para la empresa.

Como hemos visto, se puede interpretar las variables de holgura del programa lineal como errores de tarificación; los x_j son errores negativos, es decir, se está cobrando al asegurado menos de lo que le correspondería por su siniestralidad media, y los y_j errores positivos en el sentido de que se está cobrando al asegurado más de su siniestralidad media. Se han calculado los errores de tarificación y se han representado en un gráfico donde, en el eje de abscisas se han representado los valores de λ , es decir, la siniestralidad media individual, y en el eje de ordenadas los errores de tarificación (ver programa var-holg-Noru75).

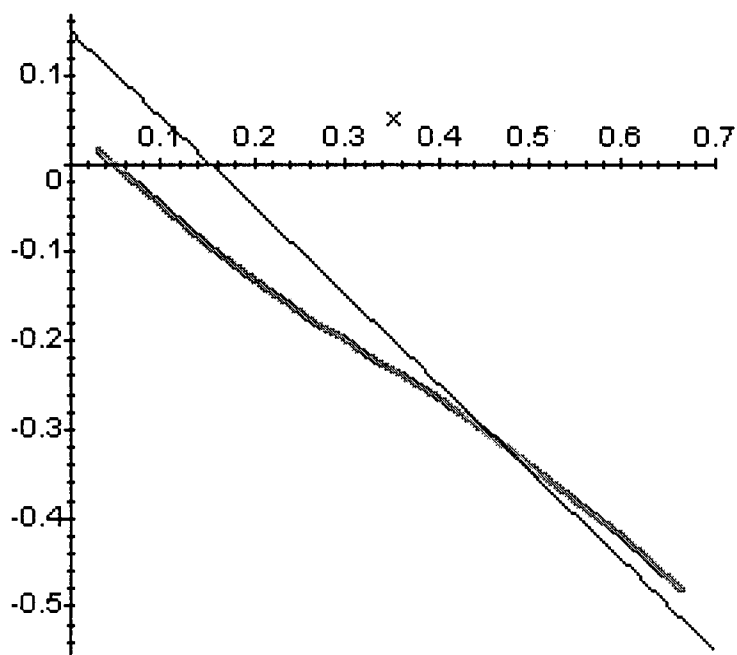
Veamos en primer lugar la representación gráfica de los errores de tarificación de Noruega 1975.



podemos observar que los errores de tarificación que se cometen aplicando este sistema B-M son siempre negativos, salvo para aquellos asegurados cuya siniestralidad media sea menor que 0.033, y que el valor de la integral de esta función, ponderada por la función de estructura de Λ , es negativo, y por tanto, no existe equilibrio financiero; lo que ya habíamos comprobado, por otra parte, calculando analíticamente el valor del desequilibrio.

Comparamos ahora los errores de tarificación del sistema B-M aplicado en Noruega en 1975 con los que se cometerían si no aplicamos sistema B-M

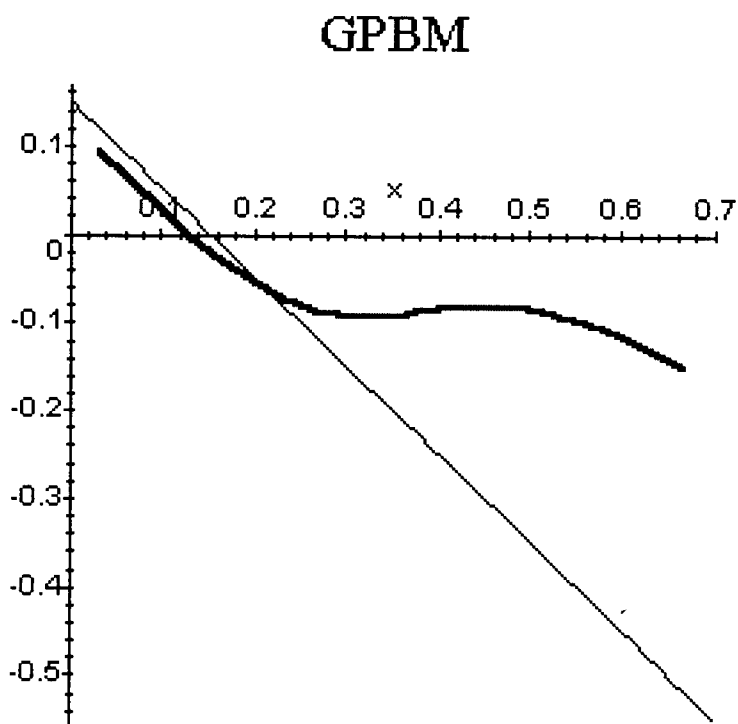
Noruega



observamos que para valores de la siniestralidad media individual comprendidos entre 0.05 y 0.45 la gráfica no se encuentra dentro de las regiones aconsejables, para todos los valores de la siniestralidad media menores que 0.45 (que representan la mayoría de asegurados de la cartera) se está cometiendo un error de tarificación, si éste es positivo menor y si es negativo mayor, que sin aplicar sistema B-M. Esta situación es beneficiosa para el asegurado, pero como es debida al desequilibrio financiero es peligrosa para la empresa a largo plazo.

Comparamos ahora los errores de tarificación del sistema

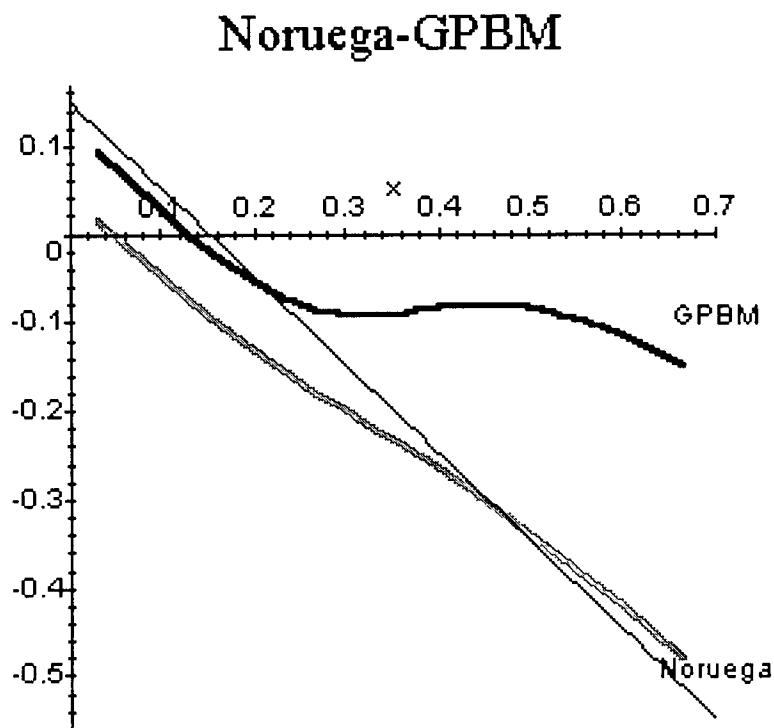
GPBM con los que se cometerían si no aplicamos sistema B-M



en este caso, podemos observar que la gráfica de los errores de tarificación está prácticamente dentro de la región aconsejable, tan sólo hay un pequeño intervalo, entre 0.13 y 0.15 en el que se comete mayor error negativo que si no aplicamos sistema B-M. Esto también puede ser debido a que la gráfica de los errores de tarificación se ha representado como una poligonal (uniendo puntos) puesto que sólo conocemos los valores de los errores de tarificación para algunos valores concretos de Λ .

Representamos ahora los errores de tarificación en los tres

casos y obtenemos



y analizamos cada uno de los intervalos:

En $[0, 0.04]$, en todos los casos se comete error de tarificación positivo y, por tanto, se penaliza al asegurado; el sistema de Noruega comete un error menor que el sistema GPBM y éste a su vez menor que si no se aplica sistema B-M.

En $[0.04, 0.13]$, la gráfica de errores de Noruega se sale de la región que se puede considerar aceptable, la del sistema GPBM está dentro de la región y además se cometen errores menores

que sin aplicar sistema B-M.

En $[0.13, 0.2]$, en este pequeño intervalo, tanto la gráfica de errores correspondientes al sistema B-M de Noruega, como al sistema GPBM se salen de la región considerada aceptable, y se cometen mayores errores negativos en el caso de Noruega.

En $[0.2, 0.45]$ la gráfica de errores del sistema B-M de Noruega se sale de la región aceptable, mientras que la del sistema GPBM está dentro de la región aceptable y además se cometen menores errores que si no se aplica sistema B-M.

En $[0.45, 0.7]$, los errores correspondientes a los dos sistemas, de Noruega y GPBM están dentro de la región considerada aceptable, pero además con el sistema GPBM se cometen menores errores.

En general, podemos concluir del estudio gráfico de los errores que es mejor el sistema GPBM puesto que la probabilidad del primer intervalo, en el que se podría considerar mejor el sistema de Noruega, tiene una probabilidad acumulada de 0.15; luego en el 85% de los casos se puede considerar que es mejor GPBM.

Tabla 5.2.1

Escala de primas óptima solución del programa P1 con las reglas de Noruega 1975

j	$\pi^1(j)$
1	1.09689
2	0.39288
3	0.39288
4	0.39288
5	0.39288
6	0.39288
7	0.39288
8	0.39288
9	0.39288
10	0.39288
11	0.39288
12	0.39288
13	0.01250

Tabla 5.2.2

Escala de primas óptima solución del programa P2 con las reglas de Noruega 1975

j	$\pi^2(j)$
1	1.02387
2	0.39823
3	0.39823
4	0.39823
5	0.39823
6	0.39823
7	0.39823
8	0.39823
9	0.39823
10	0.39823
11	0.39823
12	0.39823
13	0.01160

Tabla 5.2.3

Escala de primas óptima solución del programa P3 con las reglas de Noruega 1975

j	$\pi^3(j)$
1	1.18476
2	1.18476
3	1.18476
4	1.18476
5	1.18476
6	0.152
7	0.152
8	0.152
9	0.152
10	0.152
11	0.152
12	0.152
13	0.08407

Tabla 5.2.4

Escala de primas óptima solución del programa P4 con las reglas de Noruega 1975

j	$\pi^4(j)$
1	0.60747
2	0.60747
3	0.60747
4	0.60747
5	0.60747
6	0.152
7	0.152
8	0.152
9	0.152
10	0.152
11	0.152
12	0.152
13	0.12149

Tabla 5.2.5

Escala de primas óptima solución del programa P5 con las reglas de Noruega 1975

j	$\pi^5(j)$
1	0.61546
2	0.61446
3	0.61346
4	0.61246
5	0.61146
6	0.152
7	0.151
8	0.150
9	0.149
10	0.148
11	0.147
12	0.146
13	0.12313

Tabla 5.2.6

Escala de primas óptima solución del programa P6 con las reglas de Noruega 1975

j	$\pi^6(j)$
1	0.62254
2	0.61637
3	0.61027
4	0.60423
5	0.59825
6	0.152
7	0.15050
8	0.149
9	0.1473
10	0.14607
11	0.14462
12	0.14319
13	0.12451

5.2.1 Conclusiones

En resumen, comparando el sistema B-M aplicado en Noruega en 1975 con el sistema GPBM propuesto en esta tesis tenemos:

Valores de la función objetivo

$$Obj(Noruega75) = 0.09017$$

$$Obj(GPBM) = 0.05573$$

lo que muestra un menor valor de la función objetivo en el sistema GPBM

Valores del desequilibrio financiero:

$$Deseq(Noruega75) = 0.08597$$

$$Deseq(GPBM) = 0$$

lo que muestra que el sistema GPBM es financieramente equilibrado y el sistema B-M aplicado en Noruega en 1975 no lo es; en el estudio gráfico de los errores de tarificación, también hemos concluido que es preferible el sistema GPBM.

5.3 Comparación con Norberg (1976)

Vamos ahora a comparar los resultados obtenidos por Norberg con los que se hubieran obtenido aplicando nuestro modelo.

Norberg aplicó su modelo a tres reglas de sistema B-M diferentes:

1.- Tomó como reglas de transición las de Noruega 1975, que vienen determinadas por la matriz T (3.2), y tomó como clase inicial $k = 12$. Obteniendo la escala de primas $\pi_T(j)$ (3.3). Si aplicamos nuestro modelo (véase programa pro-lin-Noru75) resolveremos los siguientes programas lineales:

i).- Exigimos, en primer lugar, que se cumplan las mismas restricciones que se han considerado en el caso de Noruega 75, pero en este caso la clase inicial sería la clase $k = 12$ y por eso la prima en dicha clase debe ser la siniestralidad media 0.152.

$$\begin{aligned}
 P1Norberg1 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_{12} = 0.152 \\
 \pi_1 \leq 5 * \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

cuya solución nos da una valor de la función objetivo

$$Obj = .03037505977$$

y la escala de primas de la tabla 5.3.1.

ii).- Si no exigimos que la prima pagada en la clase 12 sea la siniestralidad media, puesto que la clase inicial podría ser cualquiera y en el caso del sistema B-M que propone Norberg tampoco se cumple la condición de que en la clase inicial se pague la siniestralidad media, obtenemos

$$\begin{aligned}
 P2Norberg1 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, 13 \\
 x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 \pi_1 \leq 5 * \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

cuya solución nos da una valor de la función objetivo

$$Obj(P2Norberg1) = 0.0300246$$

que no mejora prácticamente respecto al caso anterior. Los valores de las primas en este caso se recogen en la tabla 5.3.2

iii).- Si tampoco exigimos que la prima en la clase peor sea a lo sumo quíntuple de la prima en la clase mejor, condición que podríamos valorar si se considera imprescindible o si se puede cambiar por otra menos exigente, planteamos el siguiente

programa

$$\begin{aligned}
 P3Norberg1 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, 13 \\
 x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1}, i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

cuyo valor de la función objetivo en el punto óptimo es

$$Obj(P3Norberg1) = 0.0043488$$

que mejora mucho sobre los casos anteriores. En este caso la escala de primas viene dada por la tabla 5.3.3.

Con el propósito de comparar el sistema B-M propuesto por Norberg (1976) para las reglas de transición dadas por la matriz T (3.2), si calculamos el valor de la función objetivo propuesta con el modelo GPBM (véase fun-obj-Norberg1) y sustituímos los valores

de las primas propuestas por Norberg para las reglas de transición (3.2), se obtiene

$$\text{Objetivo}(\text{Norberg1}) = .05250822938$$

que es un valor considerablemente más alto que el obtenido aplicando nuestro modelo.

El valor del desequilibrio financiero en este caso es

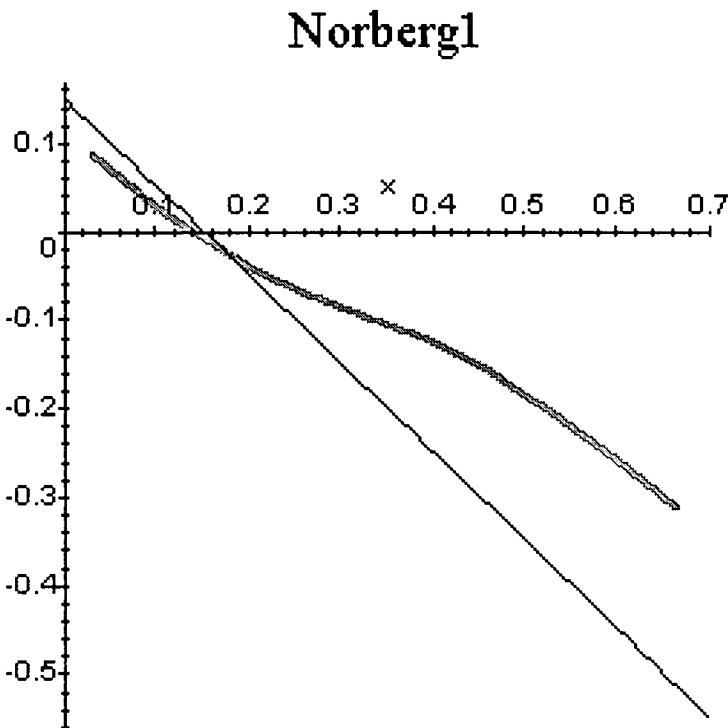
$$\text{Deseq}(\text{Norberg1}) = 0$$

luego el modelo de Norberg es financieramente equilibrado como era de esperar, porque la escala de Bayes cumple dicha propiedad.

Si comparamos los errores de tarificación como hemos hecho en el caso de Noruega 75 (véase programa var-holg-Norberg1) se obtienen los siguientes gráficos:

Comparación entre el sistema B-M propuesto por Norberg para las reglas (3.2) y no aplicar sistema B-M

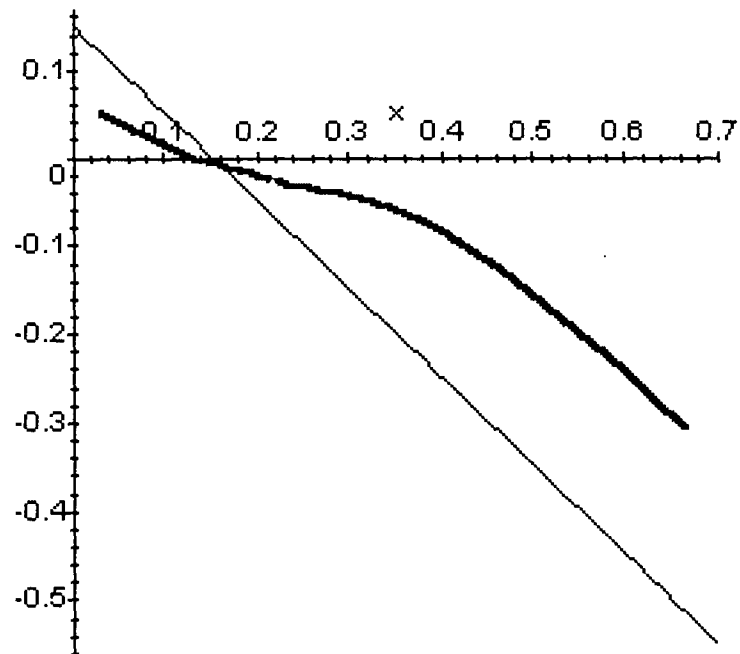




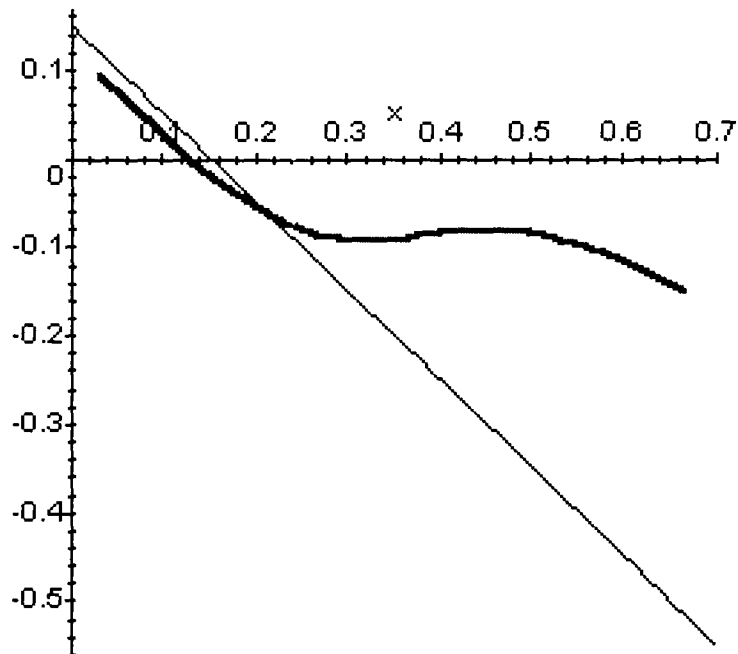
claramente, los errores de tarificación del sistema B-M propuesto por Norberg para las reglas (3.2) se encuentran aproximadamente en la región aceptable y además el área ponderada que encierra dicha función es menor que si no se aplica sistema B-M.

Representamos ahora los errores de tarificación obtenidos en los tres programas lineales que hemos resuelto para comparar con el sistema B-M propuesto por Norberg para las reglas (3.2)

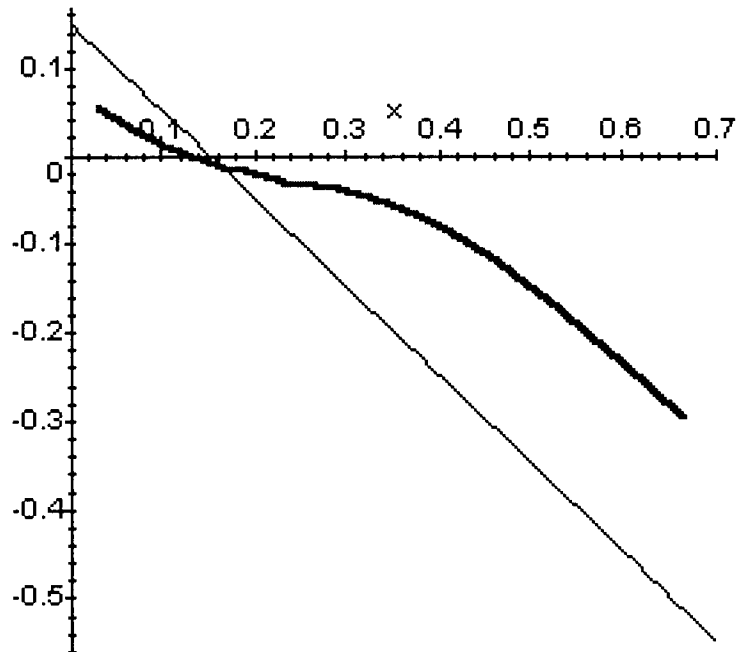
GPBM-1Norberg1



GPBM-2Norberg1



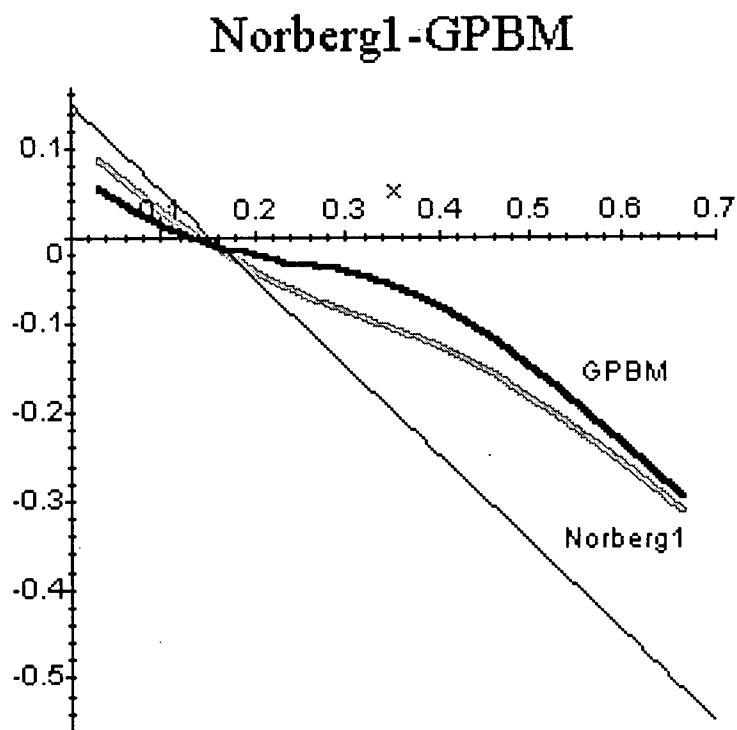
GPBM-3Norberg1



podemos apreciar que los errores de tarificación en el modelo GPBM casi siempre están en la región considerada aceptable y se aproximan más al eje de abscisas; en el caso en que no se ha exigido que ninguna clase pague la siniestralidad media y en el caso que se exige que la siniestralidad media se pague en la clase 12, los resultados son muy similares, para asegurados cuya siniestralidad media sea menor que 0.4, es mejor este sistema B-M que para asegurados cuya siniestralidad media sea mayor que 0.4, para los que sería mejor, según nuestro criterio, el sistema B-M que se obtiene tomando como clase inicial la clase

$k = 6$ y pagando en esta clase la siniestralidad media total 0.152.

Comparamos ahora los errores de tarificación del sistema propuesto por Norberg para las reglas (3.2) con los errores de tarificación del programa P3Norberg1, que es el que tiene menor valor de la función objetivo de los tres programas resueltos para comparar en este caso; el gráfico obtenido es



lo que muestra que es siempre preferible el sistema GPBM.

2.- Norberg tomó como reglas de transición las dadas por la matriz \tilde{T} (3.4) sin modificar la clase inicial. Obtuvo la escala de

primas $\pi_T(j)$ (3.5). Aplicando nuestro modelo en este caso (véase programa pro-lin-Norberg2) se han resuelto 6 programas lineales:

i) En el programa P1Norberg2 simplemente se han exigido las condiciones de monotonía de las primas y de equilibrio financiero, es decir se ha resuelto el programa

$$\begin{aligned}
 P1Norberg2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\ \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

obteniéndose como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P1Norberg2) = 0.0048385$$

y la escala de primas óptima de la tabla 5.3.4.

ii) En el programa P2Norberg2 se ha añadido la condición de que las primas aumenten un porcentaje de la prima en la clase

posterior, obteniéndose el siguiente programa

$$\begin{aligned}
 P2Norberg2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

que nos da como valor de la función objetivo

$$Obj(P2Norberg2) = 0.0294$$

y la escala de primas de la tabla 5.3.5.

iii) En el programa P3Norberg2, se ha supuesto que la clase inicial es la clase $k = 6$ y se ha obligado a que la prima en esa clase sea la siniestralidad media total, 0.152; no se ha exigido ninguna otra condición sobre las primas salvo la de monotonía, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P3Norberg2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

cuyo valor de la función objetivo en el punto óptimo es

$$Obj(P3Norberg2) = 0.0409$$

y la escala de primas se muestra en la tabla 5.3.6.

iv) En el programa P4Norberg2 se ha añadido a las restricciones del programa anterior la de que la prima en cada clase decrezca al menos un porcentaje de la prima en la clase precedente, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P4Norberg2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152 \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

y se ha obtenido como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P4Norberg2) = 0.05054$$

y la escala de primas óptima es la dada por la tabla 5.3.7.

v) En el programa P5Norberg2 se ha supuesto que la clase inicial es la clase $k = 12$ y que en esa clase se paga la siniestralidad media total, 0.152; no se ha exigido ninguna otra condición a las primas salvo la de monotonía, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P5Norberg2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\ \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\ \pi_{12} = 0.152 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Se ha obtenido como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P5Norberg2) = 0.0085$$

y la escala de primas óptima de la tabla 5.3.8.

vi) En el programa P6Norberg2 se ha añadido a las restricciones del programa anterior la de que la prima en cada clase decrezca al menos un porcentaje de la prima en la clase precedente, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P6Norberg2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_{12} = 0.152 \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

y se ha obtenido como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P6Norberg2) = 0.0298$$

y la escala de primas en dicho punto óptimo de la tabla 5.3.9.

Si calculamos el valor de la función objetivo obtenida con nuestro modelo sustituyendo los valores de las primas de Norberg para las reglas \tilde{T} , dadas en (3.4), se obtiene (véase programa fun-obj- Norberg2)

$$Obj(Norberg2) = 0.05087$$

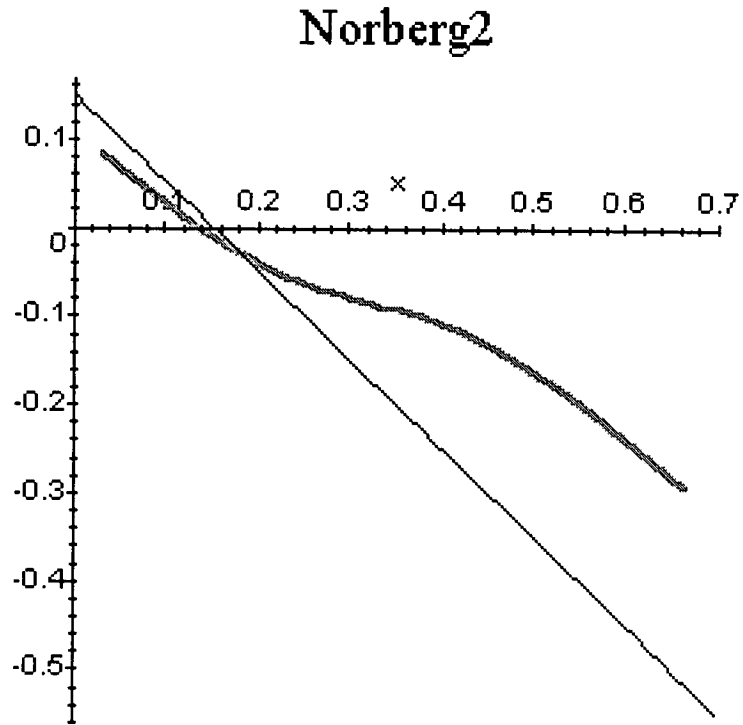
que es también considerablemente mayor que el nuestro en prácticamente todos los casos, y como valor del desequilibrio financiero

$$Deseq(Norberg2) = 0$$

lo que ratifica de nuevo que el modelo de Norberg es también financieramente equilibrado.

Como en el caso de las reglas T (3.2), caso que hemos denominado Norberg¹, se han estudiado los valores de las variables de holgura. Hemos considerado más interesantes los casos en que se ha exigido a las primas que decrezcan un porcentaje de la prima en el nivel anterior, por las razones que ya expusimos anteriormente; por este motivo se han representado los valores de los errores de tarificación de las soluciones de los programas P2Norberg2, P4Norberg2 y P6Norberg2 en un gráfico como se hizo en el caso Norberg1 (véase programa var-holg-Norberg2).

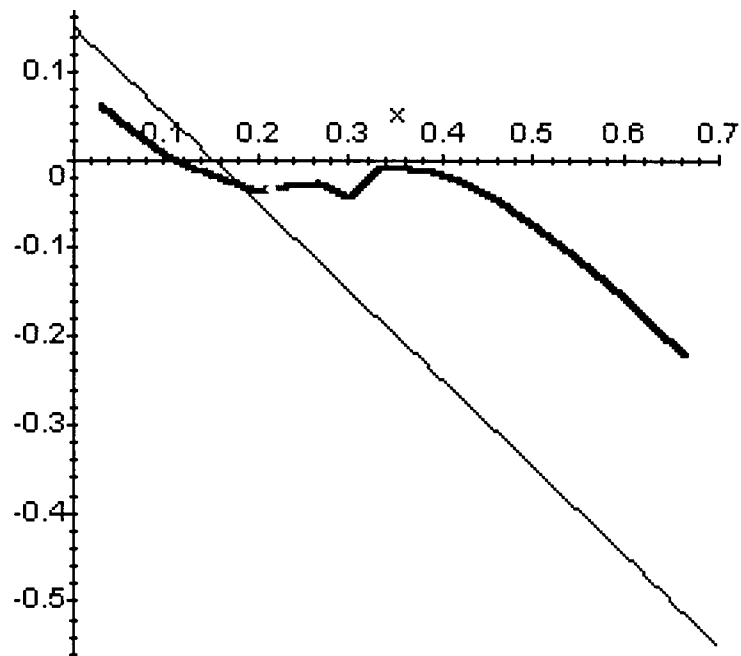
En primer lugar, representamos los errores de tarificación para el sistema B-M propuesto por Norberg para las reglas (3.4):



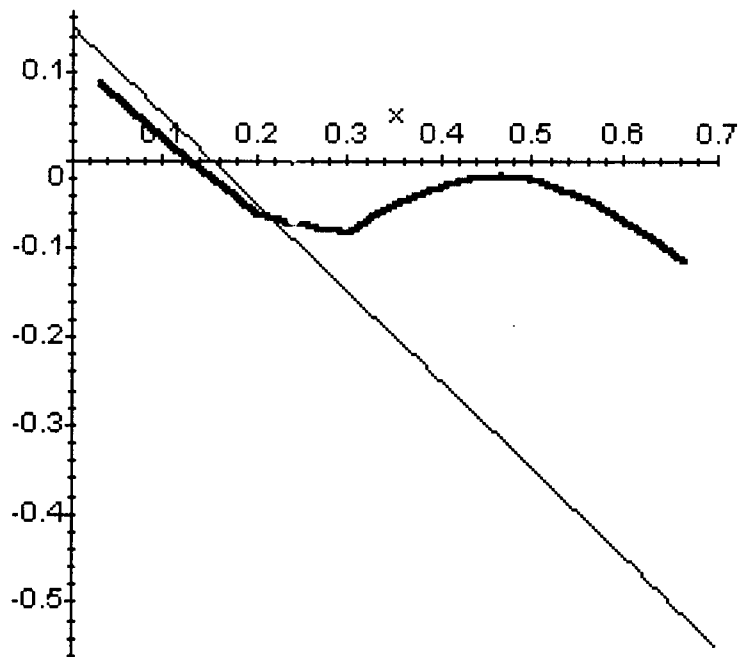
Comprobamos que la gráfica de los errores se encuentra dentro de la región aceptable.

Representamos ahora las gráficas de los errores para el sistema GPBM

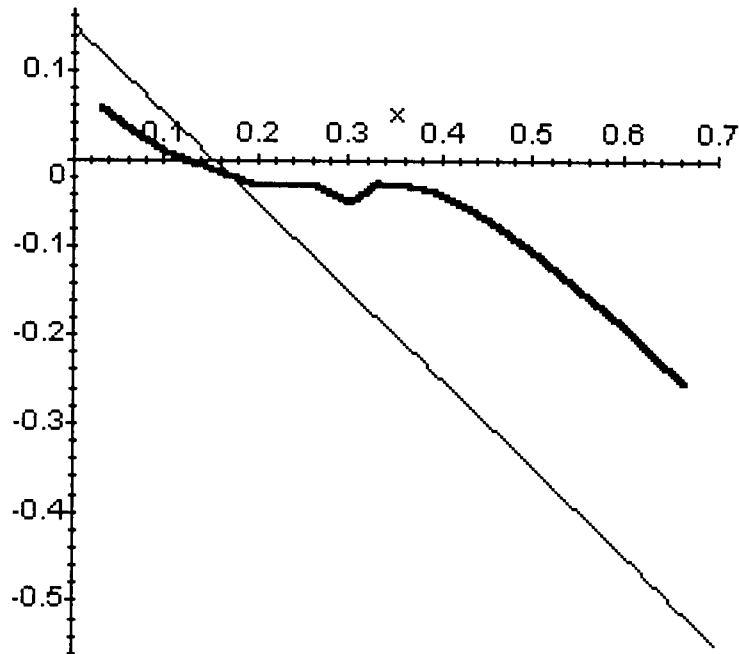
GPBM-P2Norberg2



GPBM-P4Norberg2



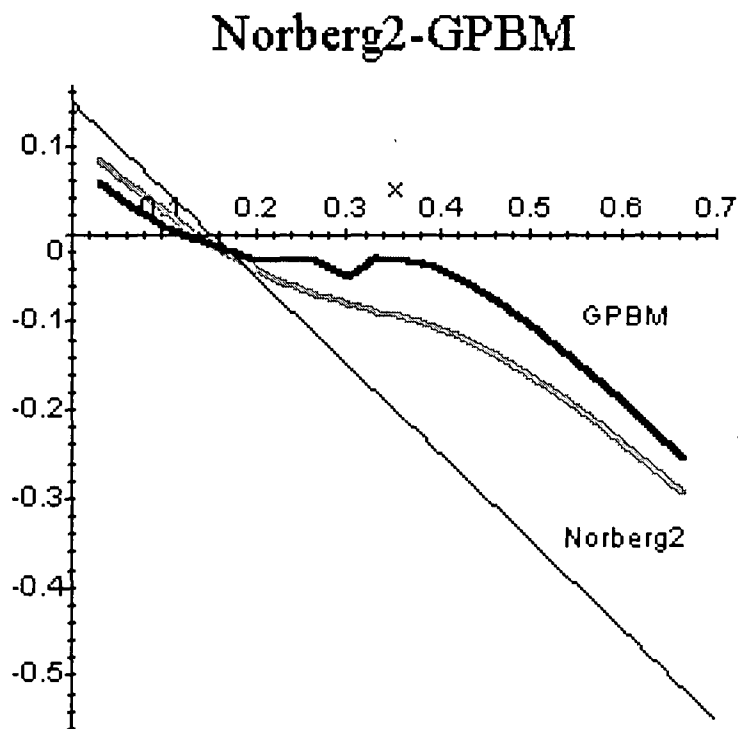
GPBM-P6Norberg2



Comprobamos que en todos los casos se encuentra dentro de la región aceptable y que para valores de la siniestralidad media individual comprendidos entre 0.133 y 0.433 son claramente mejores los sistemas B-M que se obtienen tomando como clase inicial la clase $k = 12$, o sin tener en cuenta la clase inicial, mientras que para el resto de valores de la siniestralidad media individual es mejor el sistema B-M que se obtiene tomando como clase inicial la clase $k = 6$ y pagando en esa clase la siniestralidad media total.

Como las gráficas de los errores de todos los sistemas GPBM

representados están en la región aceptable, tomamos el sistema GPBM-P6Norberg2 que es el que tiene menor valor de la función objetivo; representamos entonces los errores de Norberg2 y GPBM en este caso y obtenemos



Vemos que en cualquier punto es claramente mejor GPBM que Norberg2.

3.- Norberg tomó como reglas de transición las dadas por la matriz T^* (3.6) sin modificar la clase inicial. Obtuvo la escala de primas $\pi_{T^*}(j)$ (3.7). Aplicando nuestro modelo en este caso (véase

programa pro-lin-Norberg3) se han resuelto 6 programas lineales:

i) En el programa P1Norberg3 simplemente se han exigido las condiciones de monotonía de las primas y de equilibrio financiero, es decir se ha resuelto el programa

$$\begin{aligned}
 &P1Norberg3 : \text{Min} \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 &\text{sujeto a} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\ \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

obteniéndose como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P1Norberg3) = .00609194$$

y como escala de primas óptima la tabla 5.3.10.

ii) En el programa P2Norberg3 se ha añadido la condición de que las primas aumenten un porcentaje de la prima en la clase posterior, obteniéndose el siguiente programa

$$\begin{aligned}
 P2Norberg3 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

que nos da como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P2Norberg3) = .01969453$$

y la escala de primas óptima de la tabla 5.3.11.

iii) En el programa P3Norberg3, se ha supuesto que la clase inicial sea la clase 6 y se ha obligado a que la prima en esa clase es la siniestralidad media total, 0.152; no se ha exigido ninguna otra condición sobre las primas salvo la de monotonía, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P3Norberg3 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

cuyo valor de la función objetivo en el punto óptimo es

$$Obj(P3Norberg3) = .019473477$$

y la escala de primas óptima de la tabla 5.3.12.

iv) En el programa P4Norberg3 se ha añadido a las restricciones del programa anterior la de que la prima en cada clase decrezca al menos un porcentaje de la prima en la clase precedente, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P4Norberg3 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.152 \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Se ha obtenido como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P4Norberg3) = .029333008$$

y la escala de primas óptima de la tabla 5.3.13.

v) Se ha supuesto que la clase inicial es la clase 12 y que en esa clase se paga la siniestralidad media total, 0.152; no se ha exigido ninguna otra condición a las primas salvo la de monotonía, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P5Norberg3 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_{12} = 0.152
 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Se ha obtenido como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P5Norberg3) = 0.00702884$$

y la escala de primas óptima de la tabla 5.3.14.

vi) En el programa P6Norberg3 se ha añadido a las restricciones del programa anterior la de que la prima en cada clase decrezca al menos un porcentaje de la prima en la clase precedente, obteniéndose el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P6Norberg3 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
 \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_{12} = 0.152 \\
 \pi_i \geq 1.01 \pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13
 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Se ha obtenido como valor de la función objetivo en el punto óptimo

$$Obj(P6Norberg3) = 0.02406111$$

y escala de primas óptima (véase 5.3.15)

Si calculamos el valor de la función objetivo utilizada en el modelo GPBM sustituyendo los valores de las primas de Norberg para las reglas T^* dadas en (3.6), se obtiene (véase programa fun-obj-Norberg3)

$$Obj(Norberg3) = .0428618$$

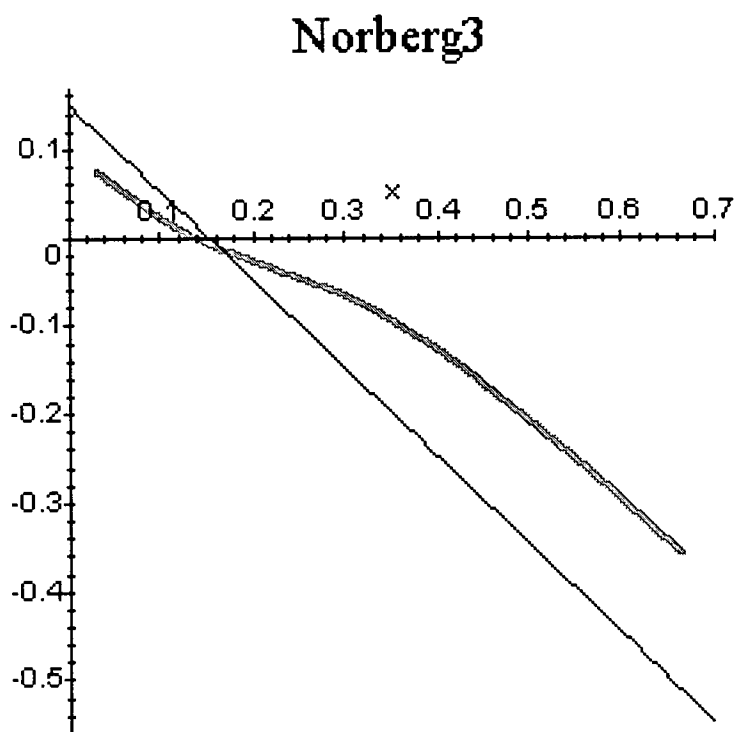
que es también considerablemente mayor que el valor de la función objetivo para el modelo GPBM en prácticamente todos los casos, y como valor del desequilibrio financiero

$$Deseq(Norberg3) = 0$$

lo que ratifica de nuevo que el modelo de Norberg es también financieramente equilibrado.

Como en los casos anteriores, se han estudiado los valores de las variables de holgura. Hemos considerado más interesantes los casos en que se ha exigido a las primas que decrezcan un porcentaje de la prima en el nivel anterior, por las razones que ya expusimos anteriormente. Por este motivo se han representado los valores de los errores de tarificación de las soluciones de los programas P2Norberg3, P4Norberg3 y P6Norberg3 en un gráfico como se hizo en los casos Norberg1 y Norberg2 (ver programa var-holg-Norberg3).

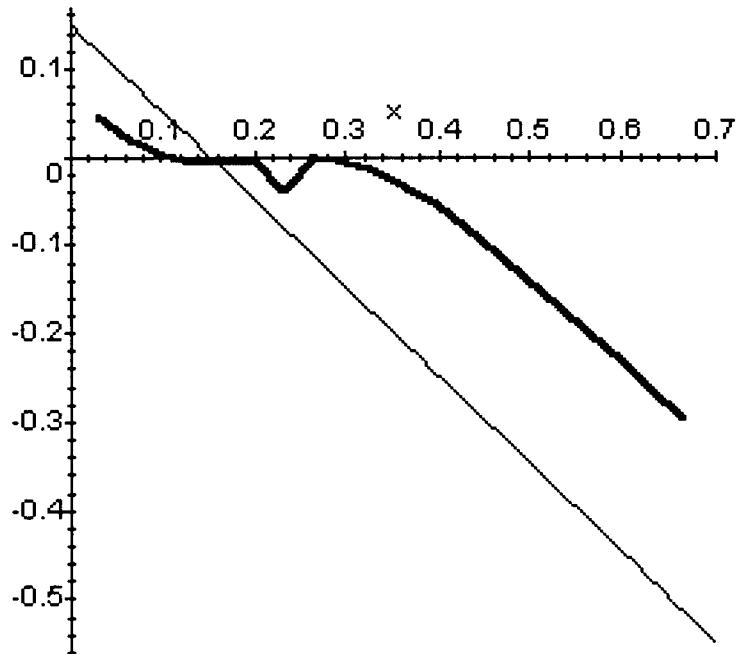
En primer lugar, representamos los errores de tarificación para el sistema B-M propuesto por Norberg para las reglas (3.6):



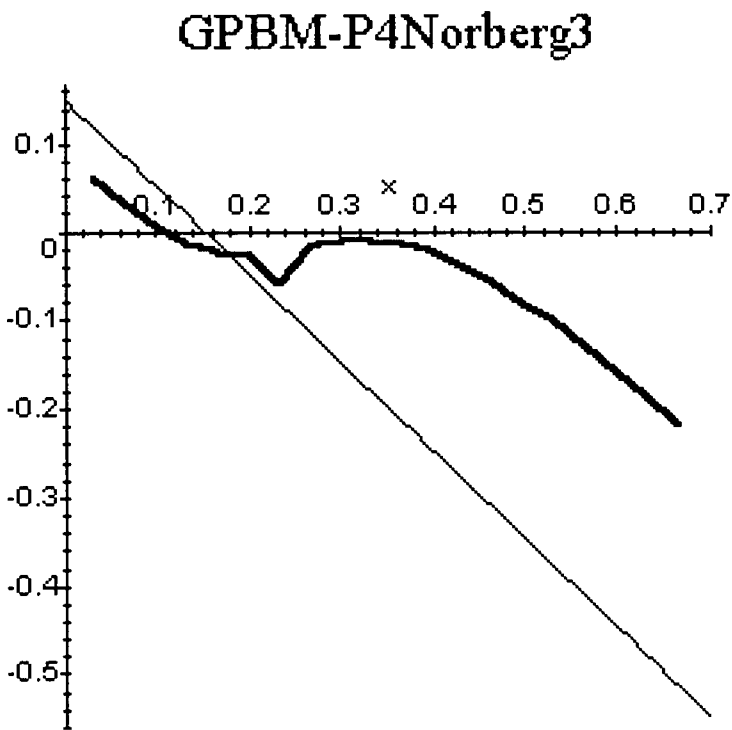
Comprobamos que la gráfica de los errores se encuentra dentro de la región aceptable.

Representamos ahora las gráficas de los errores para el sistema GPBM

GPBM-P2Norberg3

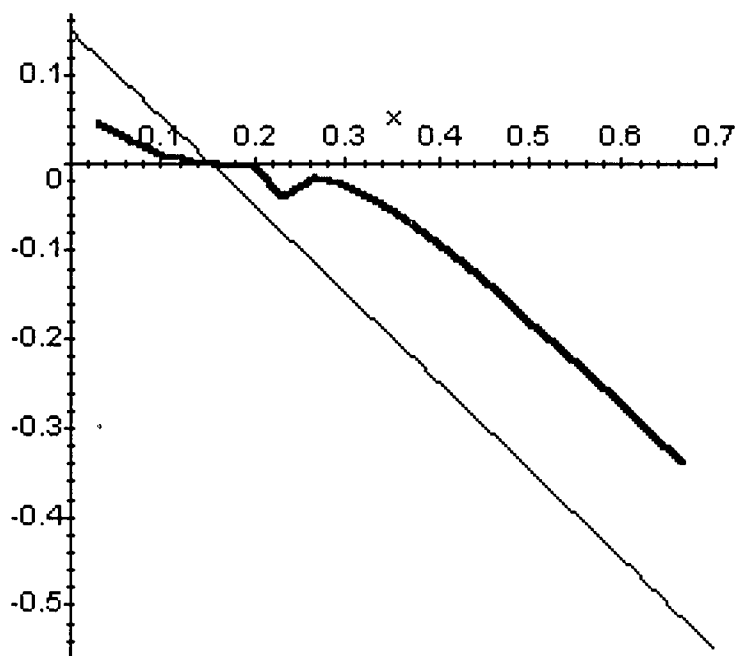


Vemos que la gráfica de los errores de tarificación está dentro de la región aceptable y bastante próxima al eje de abscisas para valores de la siniestralidad individual comprendidos entre 0.1 y 0.2 (que es el intervalo en el que se encuentran la mayoría de los asegurados), así como entre 0.24 y 0.3



En este caso, para valores de la siniestralidad individual comprendidos entre 0.12 y 0.15 la gráfica de los errores no está dentro de la región considerada aceptable; el gráfico está más alejado del eje de abscisas, por lo que se puede considerar “peor” que el caso anterior.

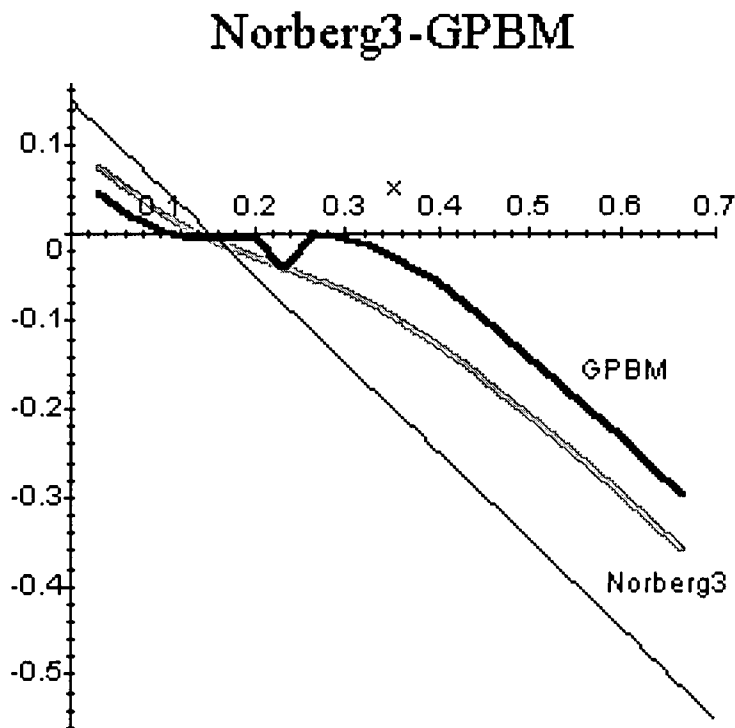
GPBM-P6Norberg3



En este caso la gráfica de los errores también se encuentra dentro de la región aceptable.

Para valores de la siniestralidad media individual comprendidos entre 0.133 y 0.233 son claramente mejores, los sistemas B-M que se obtienen tomando como clase inicial la clase $k = 12$, o sin tener en cuenta la clase inicial, mientras que para el resto de valores de la siniestralidad media individual es mejor el sistema B-M que se obtiene tomando como clase inicial la clase $k = 6$ y pagando en esa clase la siniestralidad media total.

Comparamos ahora los errores de tarificación de Norberg3 con los obtenidos en P2Norberg3, que es el que consideramos más adecuado en este caso, ya que tiene menor valor de la función objetivo y la gráfica de los errores más próxima al eje de abscisas.



Podemos comprobar que la gráfica de los errores en el modelo GPBM está más próxima al eje de abscisas en todos los puntos que la de los errores de Norberg3.

Tabla 5.3.1

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa P1Norberg1.

j	$\pi(j)$
1	0.371
2	0.362
3	0.364
4	0.361
5	0.357
6	0.353
7	0.350
8	0.346
9	0.343
10	0.340
11	0.306
12	0.152
13	0.074

Tabla 5.4.2

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P2Norberg1

j	$\pi(j)$
1	0.380
2	0.376
3	0.372
4	0.369
5	0.365
6	0.361
7	0.358
8	0.354
9	0.351
10	0.347
11	0.344
12	0.0768
13	0.0760

Tabla 5.3.3

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P3Norberg1

j	$\pi(j)$
1	0.836
2	0.429
3	0.425
4	0.421
5	0.417
6	0.413
7	0.409
8	0.405
9	0.401
10	0.397
11	0.393
12	0.389
13	0.012

Tabla 5.3.4

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P1Norberg2

j	$\pi(j)$
1	0.596
2	0.404
3	0.404
4	0.404
5	0.404
6	0.404
7	0.404
8	0.404
9	0.404
10	0.404
11	0.404
12	0.404
13	0.010

Tabla 5.3.5

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P2Norberg2

j	$\pi(j)$
1	0.453
2	0.449
3	0.444
4	0.440
5	0.435
6	0.431
7	0.427
8	0.423
9	0.418
10	0.414
11	0.092
12	0.091
13	0.090

Tabla 5.3.6

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P3Norberg2

j	$\pi(j)$
1	0.932
2	0.932
3	0.932
4	0.932
5	0.932
6	0.152
7	0.152
8	0.152
9	0.152
10	0.152
11	0.152
12	0.152
13	0.084

Tabla 5.3.7

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P4Norberg2

j	$\pi(j)$
1	0.589
2	0.583
3	0.577
4	0.572
5	0.566
6	0.152
7	0.150
8	0.149
9	0.147
10	0.146
11	0.144
12	0.143
13	0.117

Tabla 5.3.8

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P5Norberg2

j	$\pi(j)$
1	0.455
2	0.455
3	0.455
4	0.455
5	0.455
6	0.455
7	0.455
8	0.455
9	0.455
10	0.455
11	0.455
12	0.455
13	0.455

Tabla 5.3.9

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P6Norberg2

j	$\pi(j)$
1	0.418
2	0.414
3	0.410
4	0.406
5	0.402
6	0.398
7	0.394
8	0.390
9	0.386
10	0.382
11	0.153
12	0.152
13	0.083

Tabla 5.3.10

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P1Norberg3

j	$\pi(j)$
1	0.794
2	0.280
3	0.280
4	0.280
5	0.280
6	0.280
7	0.280
8	0.280
9	0.280
10	0.280
11	0.280
12	0.280
13	0.008

Tabla 5.3.11

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P2Norberg3

j	$\pi(j)$
1	0.373
2	0.370
3	0.366
4	0.362
5	0.359
6	0.355
7	0.352
8	0.348
9	0.345
10	0.077
11	0.076
12	0.075
13	0.074

Tabla 5.3.12

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P3Norberg3

j	$\pi(j)$
1	0.492
2	0.492
3	0.492
4	0.492
5	0.492
6	0.152
7	0.152
8	0.152
9	0.152
10	0.152
11	0.152
12	0.152
13	0.063

Tabla 5.3.13

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P4Norberg3

j	$\pi(j)$
1	0.468
2	0.463
3	0.459
4	0.454
5	0.450
6	0.152
7	0.150
8	0.149
9	0.147
10	0.096
11	0.095
12	0.094
13	0.093

Tabla 5.3.14

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P5Norberg3

j	$\pi(j)$
1	0.735
2	0.296
3	0.296
4	0.296
5	0.296
6	0.296
7	0.296
8	0.296
9	0.296
10	0.296
11	0.296
12	0.152
13	0.014

Tabla 5.3.15

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa
P6Norberg3

j	$\pi(j)$
1	0.331
2	0.328
3	0.324
4	0.321
5	0.318
6	0.315
7	0.312
8	0.309
9	0.306
10	0.155
11	0.153
12	0.152
13	0.066

5.3.1 Conclusiones

En resumen, comparando el sistema B-M propuesto por Norberg para las diferentes reglas de transición con el sistema GPBM tenemos:

1. Para la reglas dadas en (3.2) los valores de la función objetivo en cada caso son

$$\text{Objetivo}(\text{Norberg1}) = .05250822938$$

$$\text{Obj}(\text{GPBM} - \text{P3Norberg1}) = 0.0043488$$

La gráfica de los errores de GPBM se encuentra más próxima al eje de abscisas que la de los errores de Norberg1 (véase gráfico GPBM-Norberg1).

2. Para las reglas dadas por (3.4) los valores de las funciones objetivo en cada caso son

$$\text{Obj}(\text{Norberg2}) = 0.05087$$

$$Obj(GPBM - P6Norberg2) = 0.0298$$

La gráfica de los errores de GPBM se encuentra más próxima al eje de abscisas que la de los errores de Norberg2 (véase gráfico GPBM-Norberg2).

3. Para las reglas dadas por (3.6) los valores de las funciones objetivo en cada caso son

$$Obj(Norberg3) = .0428618$$

$$Obj(P2Norberg3) = .01969453$$

La gráfica de los errores de GPBM se encuentra más próxima al eje de abscisas que la de los errores de Norberg3 (véase gráfico GPBM-Norberg3).

En conclusión, GPBM es mejor que los otros sistemas B-M propuestos, considerando las dos medidas de comparación, en todos los casos estudiados.

5.4 Comparación con Borgam, Hoem y Norberg (1981)

Como vimos en el capítulo 3, en el apartado dedicado al trabajo de Borgam, Hoem y Norberg (1981), con su modelo, si se toma como sistema B-M aquel que minimice la esperanza del cuadrado de la diferencia entre la prima pura y la prima pagada en el periodo n (llamaremos a este valor abreviadamente Q_n), se debería aplicar un sistema B-M diferente cada año. Para evitar este inconveniente se toma una media ponderada de Q_n .

Si adoptamos las reglas de Noruega 75, ya hemos visto que tanto con el modelo de Norberg como con el modelo GPBM, que están basados en distribuciones asintóticas, la elección de la clase inicial es arbitraria y se debe elegir atendiendo a otras consideraciones. Sin embargo el modelo no asintótico de B.H.N. (1981) permite elegir la clase inicial como aquella que tenga máxima eficiencia (véase capítulo 3, apartado 3.3).

Podríamos tomar, como hacen Borgam, Hoem y Norberg (1981) los pesos $\{w_n\}$ de forma que representen la edad de la póliza.

El modelo GPBM, tal y como está planteado hasta ahora, se basa en la distribución estacionaria condicionada al valor de λ_i , lo que no permite tener en cuenta la edad de las primas. El modelo se puede extender en el mismo sentido que hicieron Borgam, Hoem y Norberg y así poder discutir la elección de la clase inicial óptima.

En este caso, se ha hecho la comparación entre los sistemas B-M propuestos por B-H-N y GPBM en dos casos. En primer lugar, el caso particular en que la función de pérdida es $Q_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$ y de este modo se pueden comparar los resultados obtenidos con el modelo de sistema de B-H-N (1981) ,para Q_0 , con los del modelo GPBM ya que ambos están basados en distribuciones asintóticas.

En este caso, la clase inicial óptima propuesta por Borgam, Hoem y Norberg es la clase $k = 11$. La escala de primas óptima se muestra en la tabla 5.4.1.

Para aplicar el modelo GPBM hemos impuesto a las primas las mismas condiciones que en el caso de Noruega 1975, pero hemos supuesto que la clase inicial es $k = 11$ y que en dicha clase se paga la siniestralidad media.

En estas condiciones, el programa a resolver es

$$PBorgam1 : \text{Min} \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i$$

sujeto a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{13} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\ \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\ \pi_1 \leq 5\pi_{13} \\ \pi_i \geq 1.01\pi_{i+1} \quad i = 1, \dots, 13 \\ \pi_{11} = 0.152 \end{array} \right\}$$

cuyo valor de la función objetivo en el punto óptimo (véase programa fun-obj-Borgam-asínt) es

$$Obj(PBorgam1) = 0.0300983$$

y escala de primas óptima se muestra en la tabla 5.4.2.

Vamos ahora a comparar el valor de la función objetivo del modelo GPBM con el valor de la función objetivo para las las primas obtenidas por Borgam, Hoem y Norberg en su trabajo.

Tomamos las primas Q_0 -óptimas para $k = 11$.

Una vez calculados los errores de tarificación y sustituidos sus valores en la función objetivo, (véase el programa fun-obj-Borgam-asínt), se obtiene como valor de la función objetivo

$$\text{Objetivo}(B - H - N) = 0.0529877911$$

que es un valor mayor que el que se obtiene con el modelo GPBM (véase programa pro-lin-Noru75)

$$\text{Obj}(PBorgam) = .03009833323$$

Luego mejora con respecto al valor de la función objetivo que se obtiene con los valores de las primas de Borgam, Hoem y Norberg .

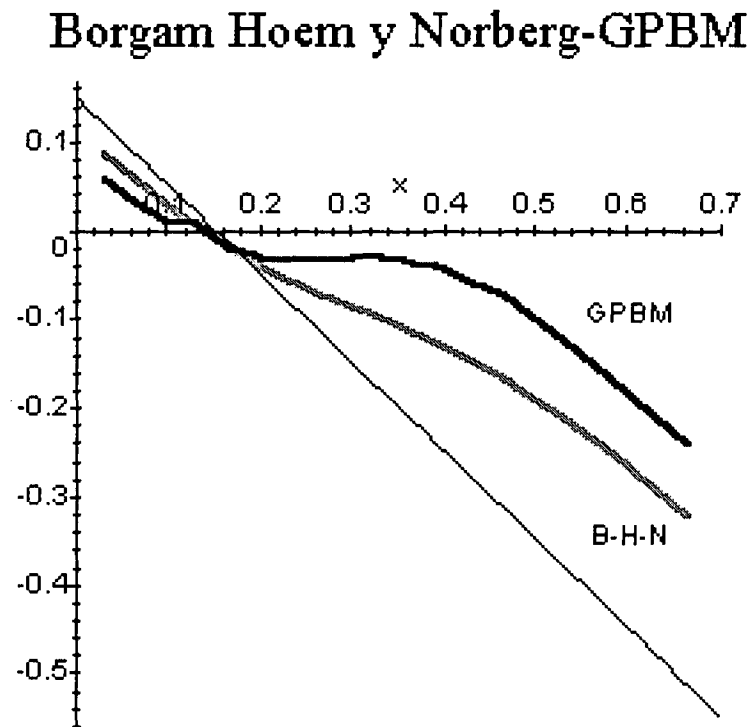
El valor del desequilibrio financiero es

$$\text{Deseq}(B - H - N) = 0$$

por lo que es también financieramente equilibrado.

Si comparamos los valores de las variables de holgura, que representan los errores de tarificación, para los valores de las

primas obtenidos por Borgam, Hoem y Norberg con los del modelo GPBM obtenemos el siguiente gráfico



Vemos que, en ambos casos, las gráficas de los errores de tarificación están dentro de la región aceptable, pero más próximos al eje de abscisas en el modelo GPBM.

Como explicamos en el capítulo 4, apartado 4.3.1, también es posible proponer un sistema B-M con la técnica Goal Programming para una distribución de probabilidad no asintótica.

Como ejemplo para aplicar esta técnica, hemos tomado el ejemplo denominado caso 1 de los ejemplos para la determinación de la clase inicial del trabajo de Borgam Hoem y Norberg (1981). En este ejemplo, el valor de los pesos $\{w_n\}$ es $w_1 = \dots = w_{20} = \frac{1}{20}$ y $w_n = 0$ en otro caso.

Aplicando el sistema B-M propuesto por B-H-N, la clase inicial óptima es $k = 10$, puesto que es para la que obtiene mayor valor de la eficiencia. Este valor lo obtuvieron calculando la eficiencia para todas las posibles clases iniciales. Los valores que obtuvieron para las primas se muestran en la tabla 5.4.3.

Con el propósito de comparar el sistema B-M, para una distribución no asintótica, propuesto por B-H-N (1981), hemos tomado la distribución de probabilidad ponderada con los mismos pesos (distribución uniforme durante los 20 primeros años) y hemos planteado el siguiente programa con la técnica Goal Programming

$$\begin{aligned}
 PBorgam2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{13} \left(\sum_{n=1}^{20} w_n p_j^{(n)}(\lambda_j) \right) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ & j = 1, \dots, 20 \\ & \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{12} \geq \pi_{13} \\ & \pi_i \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ & i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\ & \pi_{10} = 0.152 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

donde x_i e y_i son los errores de tarificación negativos y positivos globales, para una póliza cuya siniestralidad media sea λ_i .

Una vez calculados los errores de tarificación y sustituidos sus valores en la función objetivo (véase el programa fun-obj-Borgam), se obtiene como valor de la función objetivo

$$\text{Objetivo}(Borgam2) = 0.0610$$

que es un valor mayor que el que se obtiene con el modelo GPBM (véase programa pro-lin-Borgam)

$$\text{Obj}(PBorgam2) = .038952$$

que mejora con respecto al valor de la función objetivo que se obtiene con los valores de las primas de Borgam, Hoem y Norberg

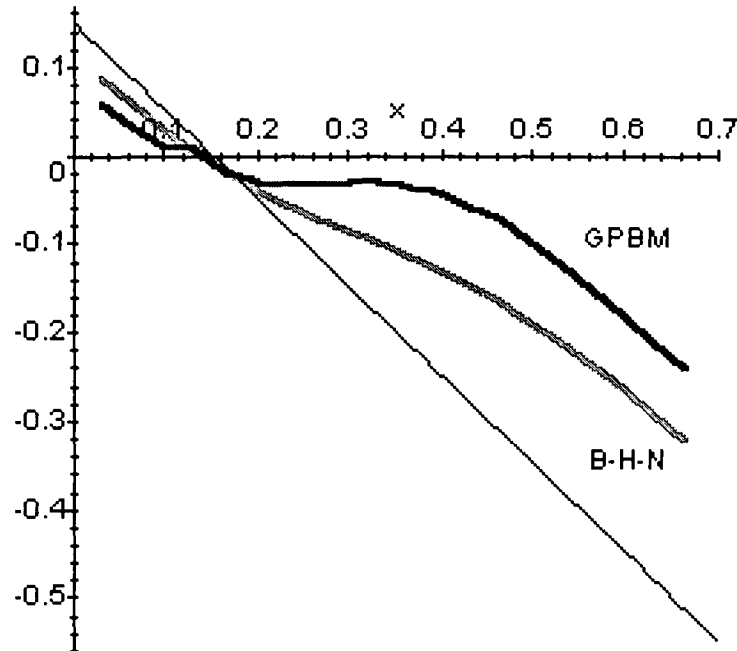
El valor del desequilibrio financiero es

$$Deseq(Borgam2) = 0$$

por lo que es también financieramente equilibrado.

Si comparamos los valores de las variables de holgura, que representan los errores de tarificación, para los valores de las primas obtenidos por Borgam, Hoem y Norberg con los del modelo GPBM obtenemos el siguiente gráfico

Borgam Hoem y Norberg-GPBM



Vemos que, en ambos casos, las gráficas de los errores de tarificación son muy similares a las del caso de la distribución asintótica, están dentro de la región aceptable en ambos casos y más próximos al eje de abscisas en el modelo GPBM.

Tabla 5.4.1

Escala de primas óptima propuesta por Borgam Hoem y Norberg (1981) tomando como distribución de probabilidad la asintótica, y como clase inicial $k = 11$.

j	$\pi(j)$
1	0.403
2	0.368
3	0.342
4	0.349
5	0.323
6	0.301
7	0.276
8	0.259
9	0.228
10	0.215
11	0.173
12	0.166
13	0.114

Tabla 5.4.2

Escala de primas óptima obtenida por el método GPBM tomando como distribución de probabilidad la asintótica, y como clase inicial $k = 11$.

j	$\pi(j)$
1	0.439
2	0.434
3	0.430
4	0.426
5	0.421
6	0.417
7	0.413
8	0.409
9	0.405
10	0.401
11	0.152
12	0.088
13	0.087

Tabla 5.4.3

Escala de primas óptima propuesta por Borgam Hoem y Norberg (1981) tomando como distribución de probabilidad la ponderada por los pesos $w_1 = \dots = w_{20} = \frac{1}{20}$, y como clase inicial $k = 10$.

j	$\pi(j)$
1	0.399
2	0.359
3	0.333
4	0.336
5	0.309
6	0.285
7	0.264
8	0.240
9	0.219
10	0.177
11	0.165
12	0.155
13	0.117

Tabla 5.4.4

Escala de primas óptima obtenida con el método GPBM tomando como distribución de probabilidad la ponderada por los pesos $w_1 = \dots = w_{20} = \frac{1}{20}$, y como clase inicial $k = 10$.

j	$\pi(j)$
1	0.494
2	0.489
3	0.484
4	0.479
5	0.474
6	0.470
7	0.465
8	0.460
9	0.456
10	0.152
11	0.100
12	0.099
13	0.098

5.5 Comparación con Gilde y Sundt (1989)

Si se aplica el modelo GPBM también podemos obligar a que las primas sean lineales en el número de la clase j , basta con sustituir cada prima $\pi(j)$ por su expresión lineal $a - bj$.

Con el propósito de comparar el sistema B-M propuesto por Gilde y Sundt (1989) con el correspondiente sistema GPBM, hemos tomado el ejemplo 1 del trabajo de Gilde y Sundt (1989) descrito en el capítulo 3. En dicho ejemplo, las reglas de transición son las de Noruega 1975, dadas por la matriz T en (3.2), la distribución de probabilidad es la no asintótica ponderada con los pesos $w_1 = \dots = w_{20} = \frac{1}{20}$ y $w_n = 0$ si $n > 20$ y la clase inicial es $k = 10$. Los valores obtenidos, para los coeficientes de las primas lineales, por Gilde y Sundt son

$$a = 0.415$$

$$b = 0.0228$$

Con lo que se obtiene una escala de primas óptima (véase tabla 5.5.1).

Para aplicar el método GPBM:

i) Hemos propuesto el programa lineal

$$\begin{aligned}
 &PGilde1 : \text{Min} \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 &\text{sujeto a} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{13} \left(\sum_{n=1}^{20} w_n p_i^{(n)}(\lambda_j) \right) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_i = a - b * i \\ a \geq 0, b \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Obteniéndose como solución (véase pro-lin-Gilde)

$$a = 1.25554$$

$$b = 0.09456$$

Con lo que se obtiene una escala de primas óptima (véase tabla 5.5.2).

Como valor de la función objetivo obtenemos

$$Obj(PGilde1) = 0.01461$$

ii) Observamos que la diferencia entre las primas en las clases extremas es bastante grande, podemos solventar este inconveniente añadiendo la nueva restricción al programa lineal

$b \leq 0.05$. Planteamos entonces el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 &PGilde2 : \text{Min} \sum_{i=1}^{13} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 &\text{sujeto a} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{13} \left(\sum_{n=1}^{20} w_n p_i^{(n)}(\lambda_j) \right) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_i = a - b * i \\ a \geq 0, b \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{13} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ i = 1, \dots, 13 \quad j = 1, \dots, 20 \\ b \leq 0.05 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Obteniéndose como solución (véase programa pro-lin-Gilde)

$$a = 0.73513$$

$$b = 0.05$$

Con lo que se obtiene una escala de primas óptima (véase tabla 5.5.3).

Como valor de la función objetivo obtenemos

$$Obj(PGilde2) = 0.03904$$

Una vez sustituidas las primas por las propuestas por Gilde y Sundt (1989), calculadas las variables de holgura y sustituidas en la función objetivo se obtiene (véase programa fun-obj-Gilde)

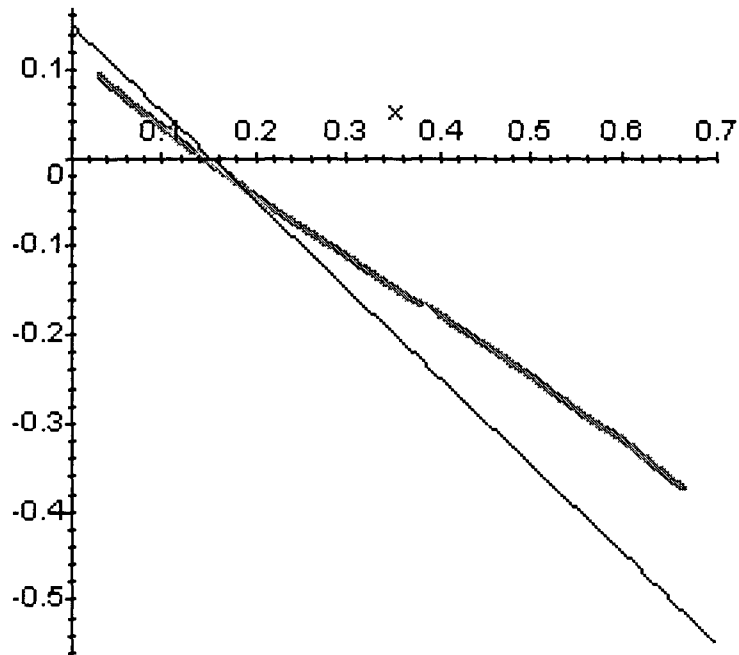
$$Obj(Gilde) = 0.06189$$

que es un valor mayor que el obtenido en las funciones objetivo de los programas PGilde1 y PGilde2.

Como se ha hecho en los ejemplos anteriores estudiamos también las gráficas de los errores de tarificación.

Para el sistema B-M propuesto por Gilde y Sundt (1989) la gráfica de los errores de tarificación es

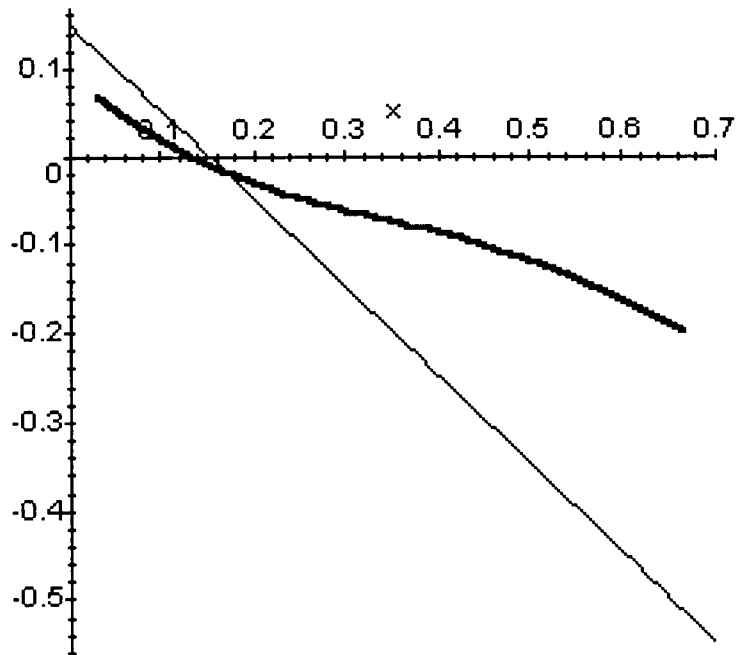
Gilde y Sundt



Observamos que se encuentra aproximadamente dentro de la región considerada aceptable.

Representamos los errores de tarificación del sistema GPBM dado como solución del programa PGilde2 y obtenemos

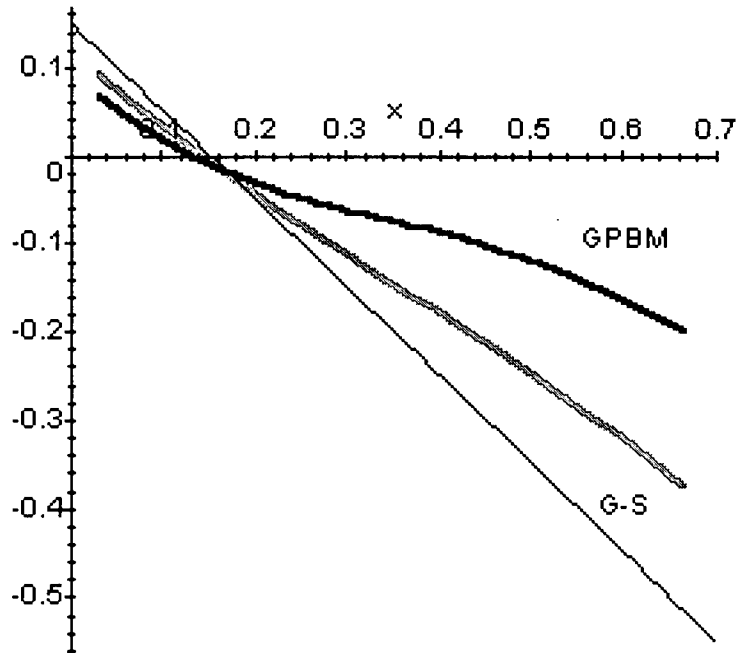
GPBM-G2



Observamos que también se encuentran dentro de la región considerada aceptable.

Representamos ahora los dos gráficos de errores de tarificación y obtenemos

Gilde y Sundt-GPBM



Observamos que casi siempre está más próxima al eje de abscisas la gráfica de errores del sistema GPBM que la del sistema B-M propuesto por Gilde y Sundt.

Como el valor de la función objetivo es menor y la gráfica de los errores está más próxima al eje de abscisas en el sistema GPBM que en el propuesto por Gilde y Sundt, podemos concluir que es mejor el sistema GPBM.

Tabla 5.5.1

Escala de primas óptima obtenida por Gilde y Sundt (1989) en el ejemplo 1

j	$\pi(j)$
1	0.3922
2	0.3694
3	0.3466
4	0.3238
5	0.3010
6	0.2782
7	0.2554
8	0.2326
9	0.2098
10	0.1870
11	0.1642
12	0.1414
13	0.1186

Tabla 5.5.2

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa lineal PGilde1

j	$\pi(j)$
1	1.16098
2	1.06642
3	0.97186
4	0.87730
5	0.78274
6	0.68818
7	0.59362
8	0.49906
9	0.40450
10	0.30994
11	0.21538
12	0.12082
13	0.02626

Tabla 5.5.3

Escala de primas óptima obtenida como solución del programa lineal PGilde2

j	$\pi(j)$
1	0.68513
2	0.63513
3	0.58513
4	0.53513
5	0.48513
6	0.43513
7	0.38513
8	0.33513
9	0.28513
10	0.23513
11	0.18513
12	0.13513
13	0.08513

Capítulo 6

Comparación con sistemas Bonus-Malus reales

6.1 Algunos sistemas B-M que se aplican en España

Desde hace años, algunas compañías de seguros aplican sistemas B-M en España. Describimos aquí algunos de ellos.

- MAPFRE

Tiene 12 clases.

La clase inicial es $k = 6$.

Cada año sin siniestros sube una clase, cada siniestro en un año baja una clase.

Las primas se calculan en base a la prima inicial, pagándose un porcentaje de dicha prima en cada clase, la prima de la peor clase, π_1 , es un 150% de la prima en la clase inicial, π_6 , la prima de la mejor clase, π_{12} , es un 50% de π_6 .

AEGON

Tiene 31 clases.

La clase inicial es la clase 12.

Cada año sin siniestros sube una clase, cada siniestro en los

diferentes años de permanencia de la póliza se penaliza de forma distinta; pueden penalizarse con la bajada de una, dos, tres, cuatro o cinco clases.

Las primas que se pagan en cada clase se obtienen multiplicando el valor de la prima en la clase inicial, π_{12} , por un factor que oscila desde 0.4 en la mejor clase que en este caso es la clase 1 hasta 10 en la clase 31.

ALLIANZ

Tiene 16 clases, la clase 1 es la mejor y la clase 16 es la peor.

La clase inicial es la clase 10.

Si una póliza está en la zona de Bonus o en la zona Neutra, es decir $k \leq 10$, desciende una clase en un año sin siniestros. Si estaba en la zona de Malus $k \geq 11$ al primer vencimiento y al segundo consecutivo sin siniestros bajará al nivel 10, Neutro, desde cualquier posición de la escala. El primer siniestro origina el ascenso en la escala de dos niveles y como máximo hasta el 10 si se encuentra en la zona de Bonus y un nivel más si se halla ya en la zona Neutra o en la zona de Malus. El segundo siniestro dentro del mismo periodo de referencia hace ascender, tras el cómputo del primer siniestro, tres niveles más como máximo hasta el 10 si

se encuentra en la zona de Bonus y un nivel más si se halla ya en la zona Neutra o en la zona de Malus, sucesivos siniestros hacen ascender un nivel más.

Las primas de cada clase se calculan multiplicando la prima de la zona Neutra π_{10} por un coeficiente que varía desde 0.45 para la clase 1 hasta 3 para la clase 16.

BANCO VITALICIO

Tiene 12 clases, la clase 1 es la mejor y la clase 16 es la peor.

La clase inicial es la clase 6.

Las bonificaciones y penalizaciones que se aplican dependen de la zona en la que la póliza se encuentre: zona de Bonus, zona Neutra, o zona de Malus. Como regla general un año sin siniestros mejora una clase y cada siniestro empeora una clase, aunque hay algunas excepciones.

Las primas de cada clase se calculan multiplicando la prima de la zona Neutra π_6 por un coeficiente que varía desde 0.5 para la clase 1 hasta 4 para la clase 12.

LA ESTRELLA

Tiene 14 clases, la clase 1 es la mejor y la clase 14 es la peor.

La clase inicial es la clase 6.

Las reglas de transición entre las clases son similares a las de Banco Vitalicio aunque también tienen algunas excepciones.

Las primas de cada clase se calculan multiplicando la prima de la zona Neutra π_6 por un coeficiente que varía desde 0.6 para la clase 1 hasta 2.5 para la clase 14.

M.N.A.

Tiene 14 clases, la clase 1 es la mejor y la clase 14 es la peor.

La clase inicial es la clase 7.

También en este caso como regla general un año sin siniestros mejora una clase y cada siniestro empeora una clase, aunque hay algunas excepciones.

Las primas de cada clase se calculan como porcentaje de π_7 , varían desde 50% para la clase 1 hasta 300% para la clase 14 en los turismos particulares y desde 30% para la clase 1 hasta 300% para la clase 14 en el resto de vehículos.

6.2 Aplicación del sistema GPBM a datos reales de España

Con el objetivo de aplicar el modelo GPBM a datos reales sobre siniestros en España, hemos tomado el resultado obtenido por Caro (1999) (p. 11 Anexo I) en el cual se ha ajustado una binomial negativa a la variable aleatoria número de siniestros en el año 1994 declarados por los asegurados de Mutua Pelayo, estimándose los parámetros por el método de máxima verosimilitud y obteniéndose los siguientes resultados:

El estimador del parámetro a es 1,7757.

El estimador del parámetro τ es 33,3778.

Por ser la variable aleatoria número de siniestros en la cartera una binomial negativa, como vimos en el capítulo 1, la variable aleatoria Λ se distribuye según una gamma, siendo su función de estructura (véase Lemaire (1985))

$$u(\lambda) = U'(\lambda) = \frac{\tau^a e^{-\tau\lambda} \lambda^{a-1}}{\Gamma(a)}$$

y su función de distribución

$$F(\lambda) = \frac{\tau}{\Gamma(a)} \int_0^\lambda (\tau x)^{a-1} e^{-\tau x} dx$$

Discretizamos esta variable aleatoria Λ , tomando

$$\Pr([\lambda_1, \lambda_2]) = \frac{\tau}{\Gamma(a)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\tau x)^{a-1} e^{-\tau x} dx$$

lo que en nuestro caso, sustituyendo los parámetros a y τ por sus estimaciones se convierte en

$$\Pr([\lambda_1, \lambda_2]) = \frac{33,3778}{\Gamma(1,7757)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (33,3778x)^{0.7757} e^{-33,3778x} dx$$

y obtenemos la tabla de valores de Λ discretizada (véase programa España)

λ_i	0.005	0.0015	0.025	0.035	0.045	0.055	0.065	0.075	0.085	0.095
q_i	0.0703	0.1261	0.1354	0.1262	0.1101	0.0922	0.0752	0.0602	0.0476	0.0371

0.105	0.115	0.125	0.135	0.145	0.155	0.165	0.175	0.185	0.195
0.0288	0.0221	0.0169	0.0128	0.0097	0.0073	0.0041	0.0031	0.0023	0.0068

Las reglas del sistema B-M que hemos tomado son las que se

aplican en Mapfre, que vienen dadas por la matriz

$$T = \begin{pmatrix} \{1,2...\} & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3...\} & \{1\} & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \{2,3...\} & - & \{1\} & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - \\ \{3,4...\} & \{2\} & - & \{1\} & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - \\ \{3,4...\} & - & \{2\} & - & \{1\} & \{0\} & - & - & - & - & - & - \\ \{4,5...\} & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & \{0\} & - & - & - & - & - \\ \{4,5...\} & - & \{3\} & - & \{2\} & \{1\} & - & \{0\} & - & - & - & - \\ \{4,5...\} & - & - & \{3\} & - & \{2\} & \{1\} & - & \{0\} & - & - & - \\ - & \{4,5...\} & - & - & \{3\} & - & \{2\} & \{1\} & - & \{0\} & - & - \\ - & \{4,5...\} & - & - & \{3\} & - & - & \{2\} & \{1\} & - & \{0\} & - \\ - & - & \{4,5...\} & - & - & \{3\} & - & - & \{2\} & \{1\} & - & \{0\} \\ - & - & - & \{4,5...\} & - & - & \{3\} & - & - & \{2\} & \{1\} & \{0\} \end{pmatrix}$$

La clase inicial es $k = 6$, en esa clase se ajusta la prima con la siniestralidad media de la cartera y el resto de primas se obtienen como porcentaje de dicha prima inicial como se muestra en la siguiente tabla

C_j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\pi_j(\% \pi_6)$	150	140	130	120	110	100	90	80	75	70	60	50

La media de la variable Λ , (véase programa España), es $E[\Lambda] = 0.0532$.

Con estos datos, hemos calculado las distribuciones

estacionarias para cada valor λ_j que toma la variable aleatoria Λ discretizada, (véase programa dis-est-España) y hemos planteado los siguientes programas lineales, (véase pro-lin-España)

$$\begin{aligned}
 P1 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{12} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{11} \geq \pi_{12} \\ \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, 12 \\ \sum_{i=1}^{12} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ x_j \geq 0, y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 20 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

la escala de primas viene dada por la tabla 6.2.1.

El valor de la función objetivo es

$$Obj(P1) = 0.0013$$

El sistema B-M es financieramente equilibrado, en este caso, ya que se ha exigido como restricción del programa.

Comprobamos que aunque el valor de la función objetivo es

pequeño, las primas correspondientes a todas las clases, menos a la “mejor”, son bastante mayores que la siniestralidad media. Con la intención de que el sistema B-M sea más justo para las nuevas pólizas, imponemos la condición de que la prima en la clase de entrada coincida con la siniestralidad media, es decir, $\pi(6) = 0.0532$, el programa que obtenemos es el siguiente

$$\begin{aligned}
 P2 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{12} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{11} \geq \pi_{12} \\
 \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, 12 \\
 \sum_{i=1}^{12} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 x_j \geq 0, y_j \geq 0, j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.0532
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Obtenemos como escala de primas óptima (véase tabla 6.2.2) y valor de la función objetivo

$$Obj(P2) = 0.02223$$

En este caso la solución obtenida (véase tabla 6.2.2), aunque tiene sentido como solución del programa lineal, sería una escala de primas absurda para un sistema B-M ya que la gran diferencia entre la prima de la clase 5 y de la clase 4 impulsaría a cualquier asegurado que estuviera en cualquier clase inferior a la 4 a cambiar de compañía, lo que desestabilizaría el sistema.

Para solucionar este problema, podemos añadir restricciones de forma que la diferencia entre las primas de dos clases consecutivas sea menor que una cantidad prefijada, o también se puede solucionar imponiendo que el cociente entre las primas correspondientes a la “peor” clase y a la “mejor” clase sea a lo sumo una cantidad prefijada.

En este caso, proponemos, por ejemplo, otro programa en el añadimos la condición de que la prima pagada en la “peor” clase sea a lo sumo el quíntuple de la prima pagada en la “mejor” clase, es decir, $\pi_1 \leq 5 * \pi_{12}$ y obtenemos el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P3 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{12} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{11} \geq \pi_{12} \\
 \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, 12 \\
 \sum_{i=1}^{12} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 x_j \geq 0, y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.0532 \\
 \pi_1 \leq 5 * \pi_{12}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

cuya escala de primas óptima viene dada por la tabla 6.2.3 y el valor de la función objetivo en el punto óptimo es

$$Obj(P3) = 0.029338$$

El problema que tenemos ahora es que en varias clases se debería pagar la misma prima, lo que podría resultar injusto a juicio del asegurado, por este motivo hemos incluido nuevas restricciones que obliguen a que la prima en cada clase se incremente, al menos, un porcentaje de la prima en la clase siguiente, quedando el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P4 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{12} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{11} \geq \pi_{12} \\
 \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, 12 \\
 \sum_{i=1}^{12} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 x_j \geq 0, y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.0532 \\
 \pi_i \geq 1.001 * \pi_{i+1} \\
 \pi_1 \leq 5 * \pi_{12}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

La escala de primas óptima obtenida (véase tabla 6.2.4) y el valor de la función objetivo

$$Obj(P4) = 0.0293478$$

Hemos probado si se podría mejorar el valor de la función objetivo cambiando la restricción $\pi_1 \leq 5 * \pi_{12}$ por otra más debil, cambiando esta condición por $\pi_1 \leq 10 * \pi_{12}$, con lo que el programa lineal a resolver es ahora

$$\begin{aligned}
 P5 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^{12} p_i(\lambda_j) \pi_i + x_j - y_j = \lambda_j \\
 j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_1 \geq \pi_2, \pi_2 \geq \pi_3, \dots, \pi_{11} \geq \pi_{12} \\
 \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, 12 \\
 \sum_{i=1}^{12} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\
 x_j \geq 0, y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 20 \\
 \pi_6 = 0.0532 \\
 \pi_i \geq 1.001 * \pi_{i+1} \\
 \pi_1 \leq 10 * \pi_{12}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene como escala de primas óptima (véase tabla 6.2.5) y valor de la función objetivo

$$Obj(P5) = 0.0293451$$

lo que crea una gran diferencia entre las primas a pagar en la clase 4 y la clase 5 y no mejora apenas el valor de la función objetivo, por lo que deducimos que el mejor sistema B-M es el obtenido en el programa 4.

Como se indicó en el capítulo 4, con este método también se

puede plantear un modelo de sistema B-M en el que las primas sean lineales en el número de la clase. Con este propósito, hemos planteado un nuevo programa lineal

$$\begin{aligned}
 P6 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{12} p_i(\lambda_j)(a - b * i) + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ x_j \geq 0, y_j \geq 0, a \geq 0, b \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{12} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Los valores obtenidos para a y b en el punto óptimo, véase programa primas-lineales-España, son

$$a = 8.329399473$$

$$b = .6935742172$$

para los que se obtiene la escala de primas (véase tabla 6.2.6) y valor de la función objetivo

$$Obj(P6) = 0.0039226$$

Se observa que las primas de todas las clases, salvo de la “mejor”, toman valores muy superiores a la siniestralidad media de toda la cartera. Esto es debido, entre otros motivos, a que la diferencia entre dos clases consecutivas es demasiado grande. Para paliar este inconveniente, añadimos la nueva restricción $b \leq 0.1$, con lo que se obtiene el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned}
 P7 : \text{Min } & \sum_{i=1}^{12} (x_i + y_i) \cdot q_i \\
 \text{sujeto a } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{12} p_i(\lambda_j)(a - b * i) + x_j - y_j = \lambda_j \\ j = 1, \dots, 20 \\ x_j \geq 0, y_j \geq 0, a \geq 0, b \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{12} (x_i - y_i) \cdot q_i = 0 \\ b \leq 0.1 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

los valores obtenidos para a y b en el punto óptimo, (véase programa primas-lineales-España), son

$$\begin{aligned}
 a &= 1.24566 \\
 b &= 0.1
 \end{aligned}$$

con lo que la escala de primas óptima que se obtiene es la dada por la tabla 6.2.7 y el valor de la función objetivo es

$$Obj(P7) = 0.02514$$

Observamos que el valor de la función objetivo es, en este caso, menor que en los programas P3, P4 y P5. Por lo que parece más conveniente tomar la escala de primas lineal.

6.3 Comparación de los resultados

6.3.1 Escala de primas cualquiera

Comparamos la primas que se pagarían con el sistema B-M aplicado en MAPFRE y con el GPBM, en el ejemplo de España 94.

Mapfre		GPBM-P1		GPBM-P4	
j	$\pi(j)$	j	$\pi^1(j)$	j	$\pi(j)$
1	0.07980	1	0.87760	1	0.26106
2	0.07448	2	0.87760	2	0.26080
3	0.06916	3	0.87760	3	0.26054
4	0.06384	4	0.87760	4	0.26028
5	0.52852	5	0.87760	5	0.26002
6	0.0532	6	0.87760	6	0.0532
7	0.04788	7	0.87760	7	0.05314
8	0.04256	8	0.87760	8	0.05309
9	0.03990	9	0.87760	9	0.05304
10	0.03724	10	0.87760	10	0.05298
11	0.03192	11	0.87760	11	0.05293
12	0.02660	12	0.00256	12	0.05221

Comparamos también los valores de la función objetivo sustituyendo los valores de las primas y calculando los valores de

los errores de tarificación como se ha hecho en el capítulo 5, véase los programas pro-lin-España y fun-obj-Mapfre, y se han obtenido los siguientes resultados.

El valor de la función objetivo es

$$Obj(Mapfre) = 0.0316245$$

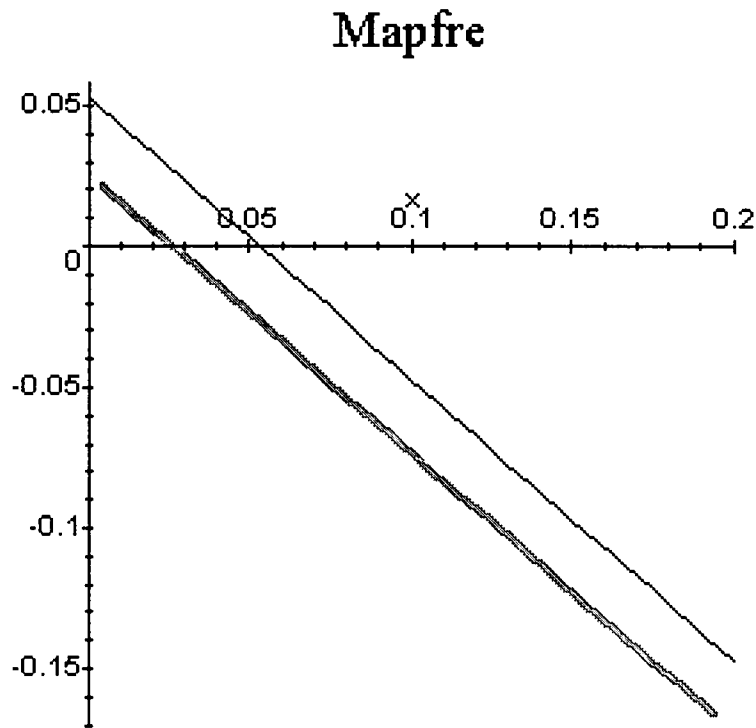
que es un valor bastante próximo al que hemos obtenido con nuestro método en el programa 4, $Obj4 = 0.0293$, y valor del desequilibrio financiero

$$Deseq(Mapfre) = 0.02516$$

por lo que el sistema B-M no es financieramente equilibrado según este criterio y además el desequilibrio, al tomar un valor positivo, es desfavorable para la empresa.

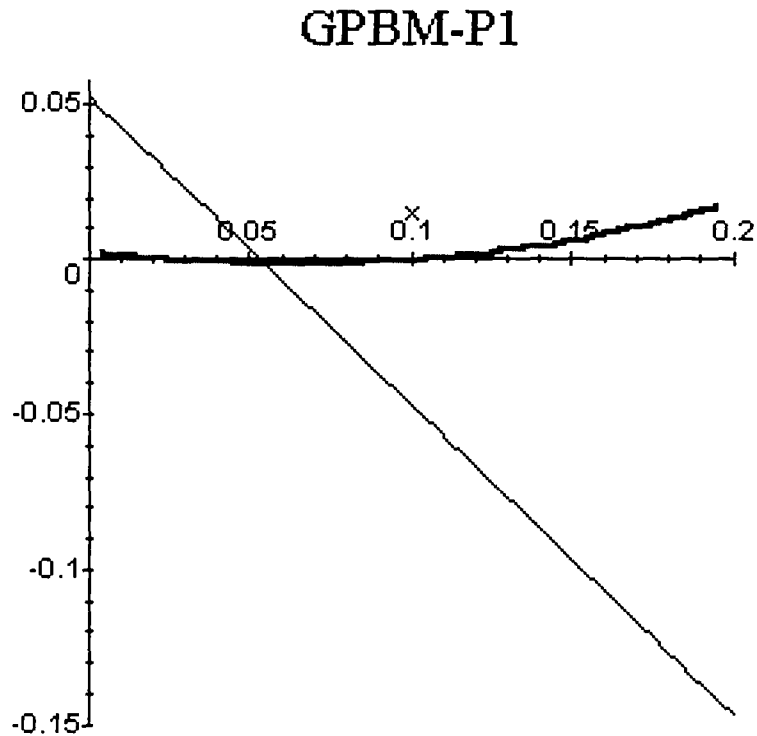
Comparamos también los valores de los errores de tarificación como se hizo en el capítulo 5, véase programa var-holg-Mapfre, la representación gráfica de los errores de tarificación se muestra en la siguientes figuras:

Errores de tarificación de Mapfre



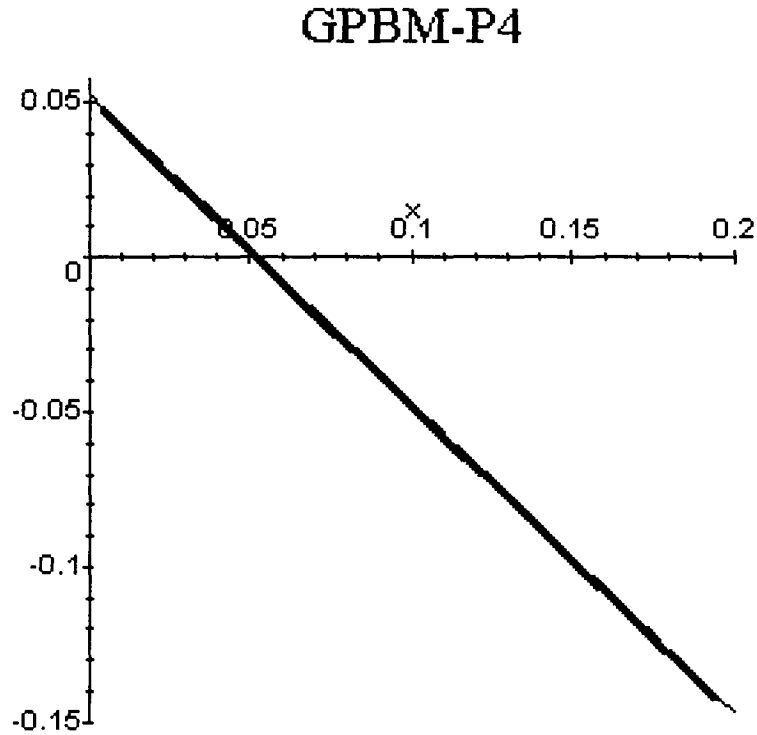
Comprobamos que la gráfica de errores no se encuentra dentro de la región que hemos considerado aceptable para valores de la siniestralidad media individual mayores de 0.025; esto es debido al desequilibrio financiero. Podemos comprobar que todos los asegurados salen beneficiados con este sistema B-M, pero es perjudicial para la empresa.

Errores de tarificación de GPBM-P1



Podemos comprobar que la gráfica de errores, para valores de la siniestralidad media individual menores que 0.12, se encuentra muy próxima al eje de abscisas, aunque para valores mayores que 0.12 los errores se encuentran fuera de la región que hemos considerado aceptable. Considerando que $\Pr[\Lambda > 0.12] = 0.0533$, el sistema es equitativo para el 95% de los asegurados, lo que representa un resultado bastante bueno.

Errores de tarificación de GPBM-P4



Podemos comprobar que en este caso la gráfica de los errores de tarificación coincide con la frontera de la región que hemos considerado como aceptable. En este caso los errores de tarificación cometidos coinciden con los cometidos con tarificación a priori, luego el sistema no puede considerarse bueno.

Resumiendo lo anterior, podemos decir que el sistema GPBM mejora con respecto al sistema B-M utilizado en Mapfre en que es financieramente equilibrado, pero hemos conseguido mejorar poco con respecto a los criterios del valor de la función objetivo y

de los errores de tarificación.

6.3.2 Escala de primas lineal

Comparamos la primas que se pagarían con el sistema B-M aplicado en MAPFRE y con el sistema GPBM para escala de primas lineales obtenido en el programa P7.

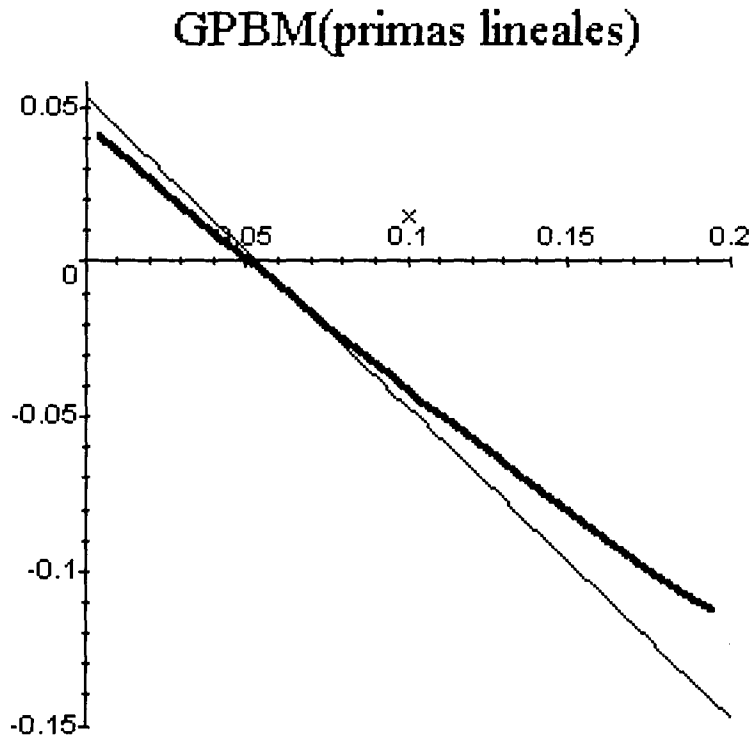
Mapfre		GPBM-P7	
j	$\pi(j)$	j	$\pi^7(j)$
1	0.07980	1	1.14566
2	0.07448	2	1.04566
3	0.06916	3	0.94566
4	0.06384	4	0.84566
5	0.52852	5	0.74566
6	0.0532	6	0.64566
7	0.04788	7	0.54566
8	0.04256	8	0.44566
9	0.03990	9	0.34566
10	0.03724	10	0.24566
11	0.03192	11	0.14566
12	0.02660	12	0.04566

El valor de la función objetivo para la escala de primas aplicada en Mapfre es

$$Obj(Mapfre) = 0.0316245$$

que es un valor mayor que el obtenido con el método GPBM para las primas lineales en el programa p7, $Obj(P7) = 0.02514$.

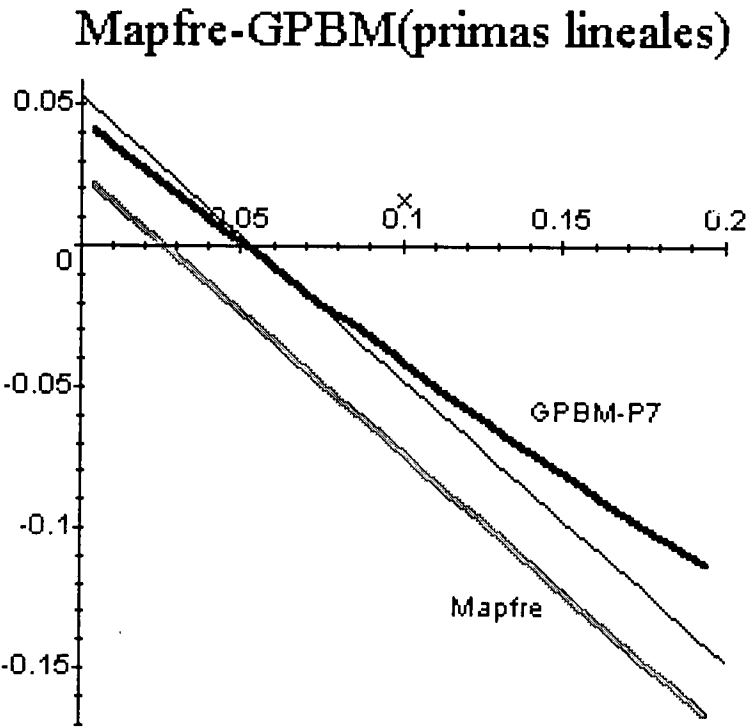
Comparamos también los valores de los errores de tarificación, véase programa var-holg-Mapfre, la representación gráfica de los errores de tarificación, para el programa P7, se muestra en la siguiente figura



que está dentro de la región que hemos considerado como aceptable.

Comparamos por fin los errores de tarificación del sistema B-M

de MAPFRE con los del sistema GPBM para primas lineales dado en el programa P7 y obtenemos



Comprobamos que para valores de la siniestralidad media menores que 0.025, se encuentra más próxima al eje de abscisas la gráfica de errores de Mapfre, pero a partir de ese valor, se encuentra más próxima la del sistema GPBM y además la del sistema GPBM siempre se encuentra dentro de la región considerada aceptable.

Tabla 6.2.1

Escala de primas óptima solución del programa P1

j	$\pi^1(j)$
1	0.87760
2	0.87760
3	0.87760
4	0.87760
5	0.87760
6	0.87760
7	0.87760
8	0.87760
9	0.87760
10	0.87760
11	0.87760
12	0.00256

Tabla 6.2.2

Escala de primas óptima solución del programa P2

j	$\pi^2(j)$
1	3260.03
2	3260.03
3	3260.03
4	3260.03
5	0.0532
6	0.0532
7	0.0532
8	0.0532
9	0.0532
10	0.0532
11	0.0532
12	0.0415

Tabla 6.2.3

Escala de primas óptima solución del programa P3

j	$\pi^3(j)$
1	0.2609
2	0.2609
3	0.2609
4	0.2609
5	0.2609
6	0.0532
7	0.0532
8	0.0532
9	0.0532
10	0.0532
11	0.0532
12	0.0521

Tabla 6.2.4

Escala de primas óptima solución del programa P4

j	$\pi^4(j)$
1	0.26106
2	0.26080
3	0.26054
4	0.26028
5	0.26002
6	0.0532
7	0.05314
8	0.05309
9	0.05304
10	0.05298
11	0.05293
12	0.05221

Tabla 6.2.5

Escala de primas óptima solución del programa P5

j	$\pi^5(j)$
1	0.52210
2	0.521582
3	0.521061
4	0.520454
5	0.52002
6	0.0532
7	0.05314
8	0.05309
9	0.05304
10	0.05298
11	0.05293
12	0.05221

Tabla 6.2.6

Escala de primas óptima solución del programa P6

j	$\pi^6(j)$
1	7.6358
2	6.09422
3	6.2486
4	5.5551
5	4.8615
6	4.1679
7	3.4743
8	2.7808
9	2.0872
10	1.3936
11	0.7000
12	0.0065

Tabla 6.2.7

Escala de primas óptima solución del programa P7

j	$\pi^7(j)$
1	0.05399
2	0.05383
3	0.05367
4	0.05351
5	0.05335
6	0.0532
7	0.05304
8	0.05288
9	0.05272
10	0.05265
11	0.05240
12	0.05224



BIBLIOTECA

Conclusiones

El objetivo de la presente tesis es el diseño de una nueva metodología de sistemas Bonus-Malus.

La finalidad de un sistema Bonus-Malus es la de clasificar a los asegurados en grupos lo más homogéneos posible de tal forma que todos los asegurados pertenecientes al mismo grupo paguen la misma prima y ésta sea lo más justa posible, tanto para la empresa como para el asegurado.

Una vez estudiada la teoría correspondiente hemos llegado a la conclusión de que un sistema B-M debe cumplir los siguientes requisitos:

- Que sea financieramente equilibrado, es decir, que la media de la cuantía total de los ingresos por primas sea igual que la media de los gastos ocasionados por la siniestralidad.

- Que sea equitativo, es decir, que la media de las primas pagadas por cada asegurado sea lo más proxima posible a su siniestralidad media.

- Facilidad de cálculo, en el sentido de que el número de clases no sea excesivo y además sea fácil el cálculo de las primas.

También es importante que sea flexible, en el sentido de que se pueda suavizar en el caso de que se penalicen excesivamente los siniestros o que haya saltos demasiado bruscos en la escala de primas, así como que sea posible incluir características del mercado que los comerciales de la empresa consideren razonables.

Hemos analizado los sistemas B-M que se obtienen mediante las metodologías más importantes, estudiando si cumplen estos requisitos que consideramos razonables.

En primer lugar (Capítulo 2) analizamos los sistemas B-M basados en la Credibilidad Bayesiana:

Vemos que en este caso sí cumple las condiciones de equilibrio financiero y de equidad, pero no así el resto de características, ya que el número de clases puede resultar excesivamente alto, y tampoco flexibles ya que no se pueden suavizar o incluir en ellos condiciones de mercado.

Seguidamente (Capítulo 3) analizamos las propiedades que cumplen los sistemas B-M basados en la escala de Bayes:

Vemos que sí se cumplen las condiciones de equilibrio financiero y de facilidad de cálculo, ya que tiene un número de

primas manejable y no es difícil calcular su valor. Sin embargo, no se cumple la condición de equidad, es decir, que cada asegurado pague una prima media lo más próxima posible a su siniestralidad media. Tampoco es posible suavizarlo o añadir condiciones de mercado, es más, en algunos casos (Norberg (1976)) ni tan siquiera cumple la condición de monotonía de la escala de primas.

En el capítulo 4, hemos desarrollado una metodología, a la que hemos denominado el sistema GPBM, basada en la resolución de un programa lineal de Programación por Metas ("Goal Programming") tal que los B-M resultantes cumplen todos los requisitos mencionados anteriormente. En efecto, un sistema GPBM:

- Cumple la condición de equidad, ya que ésta es precisamente la que se ha planteado como función objetivo del programa matemático.

- Por ser un programa lineal se pueden incluir en él como restricciones tanto la condición de equilibrio financiero como las características de mercado que hemos considerado más razonables, y que se pueden representar mediante restricciones lineales. Mediante ellas es fácil suavizar el sistema B-M resultante en el caso de que las primas resulten escesivamente variables.

En el capítulo 5 se han estudiado ejemplos basados en los sistemas B-M teóricos más importantes en la literatura actuarial (7 casos) y se han propuesto sistemas GPBM alternativos, comprobándose que, estos últimos además de cumplir los requisitos anteriormente mencionados, son mejores que los anteriores pues proporcionan una mayor equidad en la tarificación.

Por último, en el capítulo 6 se ha comparado el sistema B-M utilizado por una importante compañía española con otros sistemas contruidos mediante la metodología GPBM, comprobándose asimismo la mayor equidad y versatilidad de estos últimos.

Como conclusión, creemos haber desarrollado una nueva metodología de diseño de los sistemas B-M que supera, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, a las metodologías existentes hasta el momento, y que por tanto puede resultar sumamente útil a las compañías de seguros que tarifican mediante sistemas Bonus-Malus.

Bibliografía

Amsler, M. H. (1975) "*La ruine et sa contre-utilité*". Bulletin de l'Association des Actuaries suisses. pp. 167-181.

Anmeter, H. (1948) "*A Generalization of the Collective Theory of Risk in Regard to Fluctuating Basic Probabilities*". Scandinavian Actuarial Journal. pp. 171-198.

Bailey, A. L. (1945) "*A Generalized Theory of Credibility*". Proceedings of the Casualty Actuarial Society, vol. 32, pp. 13-20.

Bailey, A. L. (1950) "*Credibility Procedures, Laplace's Generalization of Bayes' Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data*". Proceedings of the Casualty Actuarial Society, vol. 37, pp. 7-23.

Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984) "*Risk Theory*". Methwen & Co.Ltd. London.

Berliner, B. y Babad, Y.M. (1996) "*An Actualized, Recursive Interval Approach for the Determination of a Bonus-Malus System*". XXVII ASTIN Colloquium. Copenhagen, vol. 1, pp. 202-213.

Besson, J.L. y Partrat, C. (1992) "*Trend et systèmes de Bonus-Malus*". ASTIN Bulletin, vol. 22, nº 1, pp. 11-31.

Beuthe, M. y Van Namen, Ph. (1975) "*La sélection des assurés et la détermination des primes d'assurances par l'analyse discriminante. Une application à l'assurance automobile*". Bulletin de l'Association des Actuaries suisses. pp. 137-156.

Bonsdorff, H. (1992) "*On the Convergence Rate of Bonus-Malus Systems*". ASTIN Bulletin, vol. 22, nº 2, pp. 217-223.

Borch, K. (1974) "*The Mathematical Theory of Insurance*". Lexington Books.

Borgam, O., Hoem, J.M. y Norberg, R. (1981) "*A Nonasymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus Systems*". Scandinavian Actuarial Journal, pp. 165-178.

Bowers, N. et al. (1986). "*Actuarial Mathematics*". Society of Actuaries.

Bühlmann, H. (1969) "*Experience Rating and Credibility*". ASTIN Bulletin, vol. 5, pp. 157-165.

Bühlmann, H. (1970) "*Mathematical Methods in Risk Theory*". Springer Verlag. New York.

Bühlmann, H. y Jewell, W.S. (1987) "*Hierarchical Credibility Revisited*". Bulletin of the Swiss Association of Actuaries 87, pp.

35-54.

Caro, R. (1999) "*Modelo multivariable en la tarificación del seguro del automóvil*". Universidad Pontificia Comillas. Madrid

Coene, G. y Doray, L.G. (1996) "*A Financially Balanced Bonus-Malus System*". ASTIN Bulletin, vol. 26, nº 1, pp. 107-116.

Cohon, J. L. (1978) "*Multiobjective Programming and Planning*". Academic Press. Nueva York.

Cramer, H. (1955) "*Collective Risk Theory*". Skandia Insurance Compahy.

Cummins, J. D. (1991) "*Statistical and Financial Models of Insurance Pricing and the Insurance Firm*". The Journal of Risk and Insurance, pp. 261-302.

Cyert, R. M. y DeGroot, M. H. (1987) "*Bayesian Analysis and Uncertainty in Economic Theory*". Rowman & Littlefield. Nueva Jersey.

Dannenburg, D. (1995) "*Crossed Classification Credibility Models*". Transactions of the 25th International Congress of Actuaries, vol. 4, pp. 34-54.

Dantzig, G.B. (1955) "*Linear Programming under Uncertainty*".
Management Science 1, pp. 197-294.

Debreu, G. (1959) "*Theory of Value-An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*". John Wiley and Sons. Nueva York.

DeGroot, M. H. (1970) "*Optimal Statistical Decisions*". McGraw Hill. New York.

De Leve, G. y Weeda, P.J. (1968) "*Driving with Markov Programming*". ASTIN Bulletin 5, pp. 62-86.

Delaporte, P.J. (1965) "*Tarification du Risque Individuel d'Accidents d'Automobiles par la Prime Modelée sur le Risque*".
ASTIN Bulletin 3, pp. 251-271.

Delaporte, P.J. (1965) "*Les Mathématiques de l'Assurance Automobile*". ASTIN Bulletin 6, pp. 185-190.

De Pril, N. (1979) "*Optimal Claim Decisions for a Bonus-Malus System: a Continuous Approach*" ASTIN Bulletin 10, pp. 215-222.

De Pril, N. (1978) "*The Efficiency of a Bonus-Malus System*".
ASTIN Bulletin 10, pp. 59-72.

Dufresne, F. (1988) "*Distribution stationnaire d'un système*

bonus-malus et probabilité de ruine". ASTIN Bulletin, vol. 18 pp. 31-46.

Feller, W. (1950) "*An Introduction to Probability Theory and its Applications*". vol. I. Wiley. New York.

Flavell, R. B. (1976) "*A New Goal Programming Formulation*". Omega, vol. 4, pp. 731-732.

French, S. (1988) "*Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*". Ellis Horwood. New York.

Gerber, H. (1979). "*An introduction to Mathematical Risk Theory*". Huebner Foundation.

Gerber, H. (1990) "*The New Bonus-Malus System of Switzerland*". XXII ASTIN Colloquium. Montreaux, 2.27-2.29.

Gilde, V. y Sundt, B. (1989) "*On Bonus Systems with Credibility Scales*". Scandinavian Actuarial Journal, pp. 13-22.

Goovaerts y Hoostad (1987) "*Credibility Theory*". Surveys of Actuarial Studies 4, Nationale-Nederlanden Research Department.

Goulet, V. (1998) "*Principles and Application of Credibility Theory*". Journal of Actuarial Practice, vol.6, pp. 5-62.

Grenander, U. (1957) "*Some Remarks on Bonus Systems in Automobile Insurance*". Scandinavian Actuarial Journal 40, pp. 180-198.

Grimmett, G.R. y Stirzaker D.R. (1992) "*Probability and Random Processes*". Oxford Science Publications.

Hallin, M. (1977) "*Méthodes statistiques de construction de tarif*". Bulletin de l'Association des Actuaries suisses. pp. 161-175.

Heras, A. (1989) "*Programación Multiobjetivo Estática y Dinámica. Aplicaciones a la Economía y a la Empresa*". Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. universidad Complutense de Madrid.

Heras, A. y Aguado, A. G. (1998) "*Stochastic Goal Programming with Recourse*". Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España, vol. 92, nº 4, pp. 409-414.

Heras, A. y Aguado, A. G. (1999) "*Stochastic Goal Programming*". Central European Journal of Operations Research, vol. 7, pp. 139-158.

Heras, A. , Vilar, J.L., Gil, J. A. y García, P. (2201) "*Linear Goal*

Programming and Experience Rating". Documento de Trabajo 2001-17. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. UCM. Madrid.

Holtan, J. (1994) "*Bonus Made Easy*". ASTIN Bulletin, vol. 24 nº 1 pp. 61-74.

Hossack, Pollard y Zehnwirth (1983). "*Introductory Statistics with Applications in General Insurance*". Cambridge University Press. Cambridge.

Hwang, C.L. y Masud, A.S.M. (1979) "*Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*". Springer Verlag. Heidelberg.

Ignizio, J. P. (1976) "*Goal Programming and Extensions*". Lexington Books. Massachusetts.

Ignizio, J. P. (1978) "*A Review of Goal Programming: A Tool for Multiobjective Analysis*". Journal of the Operational Research Society, vol. 29, pp. 1109-1119.

Ignizio, J. P. (1982) "*Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems*". Prentice-Hall. Englewood Cliffs. Nueva York.

Ignizio, J. P. (1984) "*A Note on the Multidimensional Dual*".

European Journal of Operational Research, vol. 17, pp. 116-122.

Ignizio, J. P. (1985) *"Introduction to Linear Goal Programming"*. Sage Publications. California.

Ijiri, Y. (1985) *"Management Goals an Accounting for Control"*. North-Holland. Amsterdam.

Jewell, W. S. (1974) *"Credible Means are Exact Bayesian for Exponential Families"*. ASTIN Bulletin nº 8 pp. 77-90.

Kaas, R., Dannenburg, D. y Goovaerts, M. (1996) *"Exact Credibility for Weighted Observations"*. XXVII ASTIN Colloquium. Copenhagen, vol. 1, pp. 229-236.

Klimkiewicz, T.K. (1993) *"About Propierties of some Variance Estimators used in Credibility Theory"*. XXIV ASTIN Colloquium, vol. 2, pp. 345-356.

Klugman, S. (1992) *"Bayesian Statistics in Actuarial Science with Emphasis on Credibility"*. Kluwer Academic Publishers. Boston.

Klugman, S.A., Panjer, H.H. y Willmot, G.E. (1998) *"Loss Models. From Data to Decisions"*. John Wiley and Sons. New

York.

Kolderman, J. y Volgenant, A. (1985) "*Optimal Claiming in a Automobile Insurance System with Bonus-Malus Structure*". The Journal of the Operational Research Society, vol. 36, nº 3, pp. 239-247.

Lemaire, J. (1976) "*Driver versus Company*". Scandinavian Actuarial Journal, pp. 209-219.

Lemaire, J. (1977) "*Selection Procedures of Regression Analysis Applied to Automobile Insurance*". Bulletin de l'Association des Actuaries suisses. pp. 143-160.

Lemaire, J. (1979) "*How to Define a Bonus-Malus System with an Exponential Utility Function*". ASTIN Bulletin 10, pp. 274-282.

Lemaire, J. (1985) "*Automobile Insurance: Acturial Models*". Kluwer-Nijhoff Publishing. Boston.

Lemaire, J. (1991) "*Negative Binomial or Poisson Inverse Gaussian?*". ASTIN Bulletin 21, pp. 167-168.

Lemaire, J. y Zi, H. (1994) "*A Comparative Analysis of 30 Bonus-Malus Systems*". ASTIN Bulletin, vol. 24, nº 2 pp. 287-309.

Lemaire, J. y Zi, H. (1994) "*High Deductibles Instead of Bonus-Malus: Can it Work?*". ASTIN Bulletin, vol. 24, nº 1 pp. 75-88.

Lemaire, J. y Zi, H. (1994) "*A Comparative Analysis of 30 Bonus-Malus Systems*". ASTIN Bulletin, vol. 24, nº 1 pp. 287-309.

Lemaire, J. (1995) "*Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*". Kluwer Academic Publishers. Boston.

Lemaire, J. (1998) "*Bonus-Malus Systems: The European and Asian Approach to Merit-Rating*". North American Actuarial Journal, Volume 2, nº 1. pp 26-47.

Lee, S. M. (1972) "*Decision Analysis*". Auerbach Publishers. Finlandia.

Loimaranta, K. (1972) "*Some Asymptotic Properties of Bonus Systems*". ASTIN Bulletin vol. 6 nº 3 pp-233-245.

Luenberger, D.G. (1979) "*Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models and Applications*". John Wiley & Sons. New York.

Makon, U. E., Smith, A. F. M. y Liu Y.-H. (1996) "*Bayesian Methods in Actuarial Science*". The Statistician 45, pp. 503-515.

Mayerson, A. L. (1964) "*A Bayesian View of Credibility*". Proceedings of the Casualty Actuarial Society pp. 85-104.

Mockus, J. (1989) "*Bayesian Approach to Global Optimization*". Kluwer academic Publishers. Dordrecht.

Mowbray, A.H. (1914) "*How Extensive a Payroll Exposure is Necessary to Give a Dependable pure Premium?*". Proceedings of the Casualty Actuarial Society, n° 1, pp. 25-30.

Neuhaus, W. (1988) "*A Bonus-Malus System in Automobile Insurance*". Insurance: Mathematics and Economics 7, pp. 103-112.

Neuhaus, W. (1995) "*Balanced Credibility Estimation*". Working Paper n° 127. University of Copenhagen, Denmark.

Norberg, R. (1975) "*Credibility Premium plans which Make Allowance for Bonus Hunger*". Scandinavian Actuarial Journal pp. 73-86.

Norberg, R. (1976) "*A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems*". Scandinavian Actuarial Journal pp. 92-107.

Osion, D. L. (1984) "*Comparison of Four Goal Programming Algorithms*". Journal of the Operational Research Society, vol. 35,

pp. 347-354.

Panjer, H. (1981) "*Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions*". ASTIN Bulletin nº 12, pp. 22-26.

Panjer, H. y Willmot, G.E. (1992) "*Insurance Risk Models*". Society of Actuaries. Schaumburg.

Pesonen, E. (1963) "*A Numerical Method of Finding a Suitable Bonus Scale*". ASTIN Bulletin, vol. 2, pp. 102-108.

Pinquet, J. (1997) "*Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus Systems*". ASTIN Bulletin , vol. 27 nº 1 pp. 33-57.

Prins, H.J. y Roozenboom, F. (1982) "*Bonus Malus*". New Motor Rating Structure in the Netherlands. G. W. De Witt (ed.), pp.72-104.

Romero, C. (1993) "*Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*". Alianza. Madrid.

Sammartini, G. (1990) "*A Bonus-Malus System with Conditioned Bonus*". Insurance: Mathematics and Economics 9, pp. 163-169.

Samson, D. (1986) "*Designing an Automobile Insurance*

Clasification System". European Journal of Operational Research 27, pp. 235-241.

Seneta, E. (1981) *"Nonnegative Matrices and Markov Chains"*. Springer Verlag.

Siegmund, D. (1975) *"The Time Until Ruin in Collective Risk Theory"*. Bulletin de l'Association des Actuaries suisses. pp. 157-166.

Sigalotti, L. (1994) *"Equilibrium Premiums in a Bonus-Malus System"*. ASTIN Colloquium. Cannes.

Sundt, B. (1984) *"An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics"*. Verlag Versicherungswirtschaft. Karlsruhe.

Sundt, B. (1988) *"Credibility estimators with geometric weights"*. Insurance: Mathematics and Economics, nº 7, pp. 113-122.

Tanino, Sawaragi y Nakayama (1985) *"Theory of Multiobjective Optimization"*. Academic Press.

Taylor, G. (1997) *"Setting a Bonus-Malus Scale in the Presence of other Rating Factors"*. ASTIN Bulletin, vol. 27, nº 2, pp. 319-327.

Thyrión, P. (1961) *"Contribution à l'Étude du Bonus pour non*

Sinistre en Assurance Automobile". ASTIN Bulletin 1, pp. 142-162.

Tremblay, L. (1992) "*Using the Poisson Inverse Gaussian in Bonus-Malus Systems*". ASTIN Bulletin, vol. 22, nº 1, pp. 97-106.

Trowbridge, C. (1989) "*Fundamental Concepts of Actuarial Science*". Actuarial Education and Research Found.

Vanderbroek, M. (1993) "*Bonus-malus System or Partial Coverage to Oppose Moral Hazard Problems?*". Insurance: Mathematics and Economics vol. 13 pp 1-5.

Vegas, A. (1992) "*Fundamentos técnicos del sistema Bonus-Malus*". VIII Jornadas Comunitarias del Seguro del Automovil. Unespa. Madrid.

Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba, U. (1993) "*Matemática Actuarial*". Editorial AC. Madrid.

Venter, G. (1991) "*A Comparative Analysis of Most European and Japanese Bonus-Malus Systems: Extension*". Journal of Risk and Insurance 58, pp. 542-547.

Vepsäläinen, S. (1972) "*Applications to a Theory of Bonus Systems*". ASTIN Bulletin 6, pp. 212-221.

Verdegay, J.L. (1982) "*Fuzzy Mathematical Programming*".
Fuzzy Information and Decisions Processes. M.M. Gupta, E.
Sánchez (eds.) North-Holland, pp. 231-237.

Vilar, J. L. (2000) "*Arithmetization of Distributions and Linear
Goal Programming*". Insurance: Mathematics and Economics 685
(2000) pp. 1-10.

Walhin and Paris (1999) "*The True Claim Amount and
Frequency Distributions within a Bonus-malus System*". ASTIN
Bulletin, vol. 30, nº 2 (2000) pp. 391-403.

Whitney (1918) "*The Theory of Experience Rating*".
Proceedings of the Casualty Actuarial and Statistical Society of
America 4, pp. 274-292

Wolfstein, A. (1997) "*Extensions of the Negative Binomial
Model for Bonus-Malus Systems*". Blätter der Deutschen Gesellschaft
für Versicherungsmathematik, Band XXII, heft 4, pp. 723-754.

Zadeh, L. A. (1963) "*Optimality and Non-Scalar-Valued
Performance Criteria*" IEEE Transactions on Automatic Control, vol.
AC. 8, pp. 59-60.

Zeleny, M. (1982) "*Multiple Criteria Decision Making*".

McGraw-Hill. Nueva York.



BIBLIOTECA

T 26106
II



BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5317334884

Anexo

12790 8562

En este anexo incluimos los programas realizados en el lenguaje de programación Maple V que hemos utilizado para la realización de esta tesis.

Para resolver el programa matemático de programación lineal por metas correspondiente a cada una de las comparaciones, hemos realizado los siguientes tipos de programas:

- Dis-est-nombre: Estos programas calculan la distribución estacionaria correspondiente. Los programas están realizados en aritmética exacta, pero en este caso la formulación correspondiente al vector distribución estacionaria es muy larga e ininteligible, por lo que hemos tomado su correspondiente valor en coma flotante. Al tomar el valor en coma flotante (número decimal) el programa realiza aproximaciones y al ejecutar el programa varias veces no siempre se obtiene la misma aproximación, aunque normalmente el error que se comete es menor que 10^{-8} , suficientemente pequeño para que no influya en el valor de las primas ni de la función objetivo.

- Pro-lin-nombre: Estos programas resuelven los problemas lineales correspondientes, de nuevo se convierten los valores de la distribución estacionaria a aritmética exacta (números racionales), para obtener el valor más exacto posible de las

primas y de la función objetivo.

- Fun-obj-nombre: Estos programas calculan los valores de la función objetivo y de las variables de holgura (errores de tarificación), para los valores de las primas dados, correspondientes en cada caso.

- Var-holg-nombre: Estos programas representan gráficamente los valores de las variables de holgura de los correspondientes programas a comparar.

ejemplo capítulo 4

```
> restart;
```

☐ Cálculo de las primas esperadas y de los siniestros esperados.

```
> pesp:=pi1*((1/5)*(1/3)+(1/6)*(1/3)+(1/2)*(1/3))+pi2*((1/5)*(1/3)+(1/2)*(1/3)+(1/4)*(1/3))+pi3*((3/5)*(1/3)+(1/3)*(1/3)+(1/4)*(1/3));
```

$$pesp := \frac{13}{45} \pi_1 + \frac{19}{60} \pi_2 + \frac{71}{180} \pi_3$$

```
> sinesp:=(1/2)*(1/3)+1*(1/3)+(3/2)*(1/3);
```

$$sinesp := 1$$

☐ Aplicando el método de Norberg.

```
> with(student);
```

```
[D, Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changevar, combine, completesquare, distance, equate, extrema, integrand, intercept, intparts, isolate, leftbox, leftsum, makeproc, maximize, middlebox, middlesum, midpoint, minimize, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, trapezoid, value]
```

```
> f(pi1,pi2,pi3):=(pi1-(1/2))^2*(1/5)*(1/3)+(pi1-1)^2*(1/6)*(1/3)+(pi1-(3/2))^2*(1/2)*(1/3)+(pi2-(1/2))^2*(1/5)*(1/3)+(pi2-1)^2*(1/2)*(1/3)+(pi2-(3/2))^2*(1/4)*(1/3)+(pi3-(1/2))^2*(3/5)*(1/3)+(pi3-1)^2*(1/3)*(1/3)+(pi3-(3/2))^2*(1/4)*(1/3);
```

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) := \frac{1}{15} \left(\pi_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{18} (\pi_1 - 1)^2 + \frac{1}{6} \left(\pi_1 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{15} \left(\pi_2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} (\pi_2 - 1)^2 + \frac{1}{12} \left(\pi_2 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\pi_3 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{9} (\pi_3 - 1)^2 + \frac{1}{12} \left(\pi_3 - \frac{3}{2} \right)^2$$

```
> fpi1:=diff(f(pi1,pi2,pi3),pi1);
```

$$fpi1 := \frac{26}{45} \pi_1 - \frac{61}{90}$$

```
> fpi2:=diff(f(pi1,pi2,pi3),pi2);
```

$$fpi2 := \frac{19}{30} \pi_2 - \frac{13}{20}$$

```
> fpi3:=diff(f(pi1,pi2,pi3),pi3);
```

$$fpi3 := \frac{71}{90} \pi_3 - \frac{121}{180}$$

```
> with(linalg):
```

```
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> p:=solve({fpi1,fpi2,fpi3},{pi1,pi2,pi3});
```

$$p := \{\pi_1 = \frac{61}{52}, \pi_3 = \frac{121}{142}, \pi_2 = \frac{39}{38}\}$$

```
> h:=hessian(f(pi1,pi2,pi3),[pi1,pi2,pi3]);
```

$$h := \begin{bmatrix} \frac{26}{45} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{30} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{71}{90} \end{bmatrix}$$

```
>
```

Todos los autovalores son positivos, el punto p es un mínimo.

☐ Vemos si el sistema BM así obtenido es financieramente equilibrado.

```
> 'pesp'=subs({pi1 = 61/52, pi3 = 121/142, pi2 = 39/38}, pesp);
```

$$pesp = 1$$

Toma el mismo valor que los siniestros esperados, luego es financieramente equilibrado.

```
>
```

☐ Veamos que ocurre si añadimos una nueva restricción.

Añadimos la restricción, prima pagada en la clase 3 es el doble que la prima pagada en la clase 1. Debemos resolver un problema de extremos condicionados con restricciones.

```
> g1:=pi1-2*pi3;
```

$$g1 := \pi_1 - 2 \pi_3$$

```
> evalf(extrema(f(pi1,pi2,pi3),{g1=0},{pi1,pi2,pi3},'v'));
```

$$\{.1699071454\}$$

```
> evalf(v);
```

$$\{\{\pi_3 = .6541218638, \pi_2 = 1.026315789, \pi_1 = 1.308243728\}\}$$

```
> 'pespres'=subs({pi2 = 1.026315789, pi3 = .6541218638, pi1 = 1.308243728}, pesp);
```

$$pespres = .9609518120$$

El valor de las primas esperadas es menor que el de los siniestros esperados, luego no hay equilibrio financiero y además la empresa pierde dinero.

☐ Resolvemos utilizando nuestro modelo lineal.

```
> restart;
```

```
> with(simplex):
```

```
Warning, new definition for maximize
```

```
Warning, new definition for minimize
```

```
> obj:=(x1+y1)*(1/3)+(x2+y2)*(1/3)+(x3+y3)*(1/3);
```

```

-
-      obj := 1/3*x1 + 1/3*y1 + 1/3*x2 + 1/3*y2 + 1/3*x3 + 1/3*y3
-
- > dese := (x1-y1) * (1/3) + (x2-y2) * (1/3) + (x3-y3) * (1/3) ;
-
-      dese := 1/3*x1 - 1/3*y1 + 1/3*x2 - 1/3*y2 + 1/3*x3 - 1/3*y3
-
- > r1 := (1/5) * pi1 + (1/5) * pi2 + (3/5) * pi3 + x1 - y1 = (1/2) ;
-
-      r1 := 1/5*pi1 + 1/5*pi2 + 3/5*pi3 + x1 - y1 = 1/2
-
- > r2 := (1/6) * pi1 + (1/2) * pi2 + (1/3) * pi3 + x2 - y2 = 1 ;
-
-      r2 := 1/6*pi1 + 1/2*pi2 + 1/3*pi3 + x2 - y2 = 1
-
- > r3 := (1/2) * pi1 + (1/4) * pi2 + (1/4) * pi3 + x3 - y3 = (3/2) ;
-
-      r3 := 1/2*pi1 + 1/4*pi2 + 1/4*pi3 + x3 - y3 = 3/2
-
- > r4 := pi1 >= pi2 ;
-
-      r4 := pi2 <= pi1
-
- > r5 := pi2 >= pi3 ;
-
-      r5 := pi3 <= pi2
-
- > r6 := dese = 0 ;
-
-      r6 := 1/3*x1 - 1/3*y1 + 1/3*x2 - 1/3*y2 + 1/3*x3 - 1/3*y3 = 0
-
- > r7 := pi1 = 2*pi3 ;
-
-      r7 := pi1 = 2*pi3
-
- > sol := minimize(obj, {r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7}, NONNEGATIVE) ;
-
-      sol := {pi2 = 10/9, x1 = 0, x2 = 0, y2 = 0, y3 = 0, pi1 = 4/3, pi3 = 2/3, x3 = 7/18, y1 = 7/18}
-
- > solu := evalf(sol) ;
-
-      solu := {x1 = 0, x2 = 0, y2 = 0, y3 = 0, pi2 = 1.111111111, pi1 = 1.333333333,
-      pi3 = .6666666667, x3 = .3888888889, y1 = .3888888889}
-
- >
-
- >

```

dis-est-Noru75

Calculamos la distribución estacionaria para cada valor de lambda, con las reglas de Noruega 75.

```
> restart;
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> disest:=proc(l)
> ig0:=exp(-l):may0:=1-ig0;
> ig1:=exp(-l)*l;
> may1:=1-ig0-ig1;
> ig2:=exp(-l)*l^2/2;
> may2:=1-ig0-ig1-ig2;
> ig3:=exp(-l)*l^3/6;
> may3:=1-ig0-ig1-ig2-ig3;
> ig4:=exp(-l)*l^4/24;
> may4:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4;
> ig5:=exp(-l)*l^5/120;
> may5:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5;
> ig6:=exp(-l)*l^6/720;
> may6:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5-ig6;
> T:=linalg[matrix](13,13,[may0,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,may0,0,0,
,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,may0,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may1,ig1,0
,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may1,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may2,ig2
,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,may2,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,0,ma
y3,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,may3,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig
0,0,0,0,may4,ig4,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,may4,0,ig4,0,ig3,
0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,may5,ig5,0,ig4,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,m
ay5,0,ig5,0,ig4,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,ig0]);
> B:=transpose(T);
> Salida:=[eigenvecs(B)];
> for i from 1 to nops(Salida) do
> if Salida[i,1]=1 then Conj:=Salida[i,3];fi;
> od;
> Vect:=array(1..13);
> Vect:=Conj[1];
> vel:=evalf(evalm(Vect));
> sul:=sum('vel[n]','n'=1..13);
> vec1:=evalm(vel*(1/sul));
> end;
>
>
>
```

Warning, `ig0` is implicitly declared local
Warning, `may0` is implicitly declared local
Warning, `ig1` is implicitly declared local
Warning, `may1` is implicitly declared local
Warning, `ig2` is implicitly declared local
Warning, `may2` is implicitly declared local
Warning, `ig3` is implicitly declared local
Warning, `may3` is implicitly declared local
Warning, `ig4` is implicitly declared local
Warning, `may4` is implicitly declared local
Warning, `ig5` is implicitly declared local
Warning, `may5` is implicitly declared local
Warning, `ig6` is implicitly declared local
Warning, `may6` is implicitly declared local
Warning, `T` is implicitly declared local
Warning, `B` is implicitly declared local
Warning, `Salida` is implicitly declared local
Warning, `i` is implicitly declared local
Warning, `Conj` is implicitly declared local
Warning, `Vect` is implicitly declared local
Warning, `vel` is implicitly declared local
Warning, `sul` is implicitly declared local
Warning, `vecl` is implicitly declared local

disest := proc(l)

local *ig0, may0, ig1, may1, ig2, may2, ig3, may3, ig4, may4, ig5, may5, ig6, may6, T, B, Salida,*

i, Conj, Vect, vel, sul, vecl;

ig0 := exp(-*l*);

may0 := 1 - *ig0*;

ig1 := exp(-*l*)**l*;

may1 := 1 - *ig0* - *ig1*;

ig2 := 1 / 2*exp(-*l*)**l*²;

may2 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2*;

ig3 := 1 / 6*exp(-*l*)**l*³;

may3 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3*;

ig4 := 1 / 24*exp(-*l*)**l*⁴;

may4 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4*;

ig5 := 1 / 120*exp(-*l*)**l*⁵;

may5 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4* - *ig5*;

ig6 := 1 / 720*exp(-*l*)**l*⁶;

may6 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4* - *ig5* - *ig6*;

T := linalg[matrix](13, 13, [*may0*, 0, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may0*, 0, 0, *ig0*, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may0*, 0, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may1*, *ig1*, 0, 0, *ig0*, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, *may1*, 0, *ig1*, 0, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may2*, *ig2*, 0, *ig1*, 0, 0, *ig0*, 0, 0,
0, 0, 0, 0, *may2*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, 0, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, *may3*, *ig3*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, 0, 0,
ig0, 0, 0, 0, 0, *may3*, 0, *ig3*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, 0, 0, *ig0*, 0, 0, 0, *may4*, *ig4*, 0, *ig3*, 0, *ig2*,
0, *ig1*, 0, 0, *ig0*, 0, 0, *may4*, 0, *ig4*, 0, *ig3*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, 0, 0, *ig0*, 0, *may5*, *ig5*, 0, *ig4*,
0, *ig3*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, 0, 0, *ig0*, *may5*, 0, *ig5*, 0, *ig4*, 0, *ig3*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, 0, *ig0*]);

B := transpose(*T*);

```

Salida := [eigenvects( B)];
for i to nops( Salida) do if Salida[ i, 1] = 1 then Conj := Salida[ i, 3] fi od;
Vect := array( 1 .. 13);
Vect := Conj[ 1];
vel := evalf( evalm( Vect));
sul := sum( 'vel[ n]', 'n' = 1 .. 13);
vec1 := evalm( vel / sul)
end
> disest(33/1000) ;
[.1166475815 10-7, .3126799344 10-7, .2074591416 10-6, .7418899158 10-6, .4671222166 10-5,
.00001205086396, .00008845645150, .0001865343586, .001703009946, .002645882282,
.03231076747, .03126191341, .9317857219]
> disest(67/1000) ;
[.1071508977 10-5, .2274749100 10-5, .8181253149 10-5, .00002788651361,
.00009658793875, .0002123979472, .0008249329926, .001552702825, .007227947041,
.01047934926, .06348062071, .05936677185, .8567192751]
> disest(100/1000) ;
[.00001459200449, .00002575872023, .00006701471509, .0002213178322, .0005601122362,
.001078340205, .002978326616, .005071425735, .01630641382, .02216809777,
.09054801520, .08193123229, .7790293531]
> disest(133/1000) ;
[.00009539227504, .0001436986447, .0002997821474, .0009703587327, .001983226125,
.003397204453, .007428066301, .01153631062, .02867172447, .03663843773, .1131817825,
.09908669959, .6965673165]
> disest(167/1000) ;
[.0004259144886, .0005557136558, .0009766460427, .003125991845, .005410387804,
.008324717474, .01518069985, .02159693021, .04386578588, .05271207294, .1303958360,
.1103409057, .6070883979]
> disest(200/1000) ;
[.001369756505, .001577037827, .002424558750, .007733006616, .01175159372,
.01645706494, .02605651458, .03424316887, .05940753261, .06738971010, .1398655483,
.1145122257, .5172122817]
> disest(233/1000) ;
[.003580306264, .003677652842, .005051753363, .01615093679, .02198957155,
.02825233141, .03973290468, .04847196142, .07367843977, .07904055260, .1414132192,
.1120209869, .4269393830]
> disest(267/1000) ;
[.008108538428, .007473571705, .009283604275, .02990750821, .03690049637,
.04368197068, .05529096388, .06274998042, .08483558605, .08607238733, .1349009331,
.1032900118, .3375044478]

```

```

- > disest(300/1000) ;
[.01560749484, .01304305294, .01485756969, .04842274995, .05487206501, .06032776211,
  .06976998651, .07409449927, .09064615786, .08725551802, .1221013511, .09045490567,
  .2585468872]
- > disest(333/1000) ;
[.02678822426, .02041755786, .02150431249, .07115382517, .07463867536, .07656605273,
  .08163577182, .08138579784, .09104336027, .08326337768, .1052490580, .07543938774,
  .1909145983]
- > disest(367/1000) ;
[.04228583702, .02946391256, .02881733850, .09715756551, .09472961129, .09085448354,
  .08974188913, .08407469067, .08650995412, .07515218036, .08638577923, .05984890104,
  .1349778573]
- > disest(400/1000) ;
[.06080668565, .03899974125, .03568441285, .1228499696, .1121338702, .1010980335,
  .09324770284, .08245303923, .07875850525, .06516575468, .06883792747, .04614344271,
  .09382091405]
- > disest(433/1000) ;
[.08206290748, .04861985575, .04179290943, .1472572127, .1263403150, .1073920127,
  .09291558247, .07771798090, .06928734383, .05466320879, .05340146900, .03463408301,
  .06391511876]
- > disest(467/1000) ;
[.1060067068, .05806313210, .04696940043, .1698628568, .1372062515, .1100576119,
  .08949965389, .07084184275, .05910088467, .04444111891, .04027849583, .02524978710,
  .04242225734]
- > disest(500/1000) ;
[.1305087295, .06641670175, .05080156546, .1887715595, .1442235173, .1096056865,
  .08419674859, .06328335289, .04969022279, .03569734665, .03022024309, .01832950398,
  .02825482191]
- > disest(533/1000) ;
[.1556855315, .07378351411, .05349566461, .2045776817, .1481922597, .1069145598,
  .07778823848, .05560700538, .04122591682, .02831943966, .02248001527, .01319221264,
  .01873796003]
- > disest(567/1000) ;
[.1818916100, .08027481473, .05520239431, .2177802884, .1496552914, .1025258844,
  .07070368139, .04807014827, .03368635075, .02211529108, .01648625370, .009351408046,
  .01225658361]
- > disest(600/1000) ;
[.2072848196, .08552354843, .05597183962, .2278952665, .1490664234, .09727542820,
  .06381019482, .04137692193, .02751846220, .01730193144, .01217088007, .006679520604,
  .008124763234]

```



```

- > disest(633/1000);
. [.2324339979, .08979536096, .05601946277, .2356843603, .1469697588, .09148307159,
.05717996937, .03540471749, .02239202361, .01349263011, .008978908339, .004767768184,
.005397971238]
-
- > disest(667/1000);
. [.2579481397, .09325933911, .05546095868, .2416207560, .1436424966, .08527717286,
.05079150133, .03002192084, .01806241750, .01042426661, .006566812910, .003370390515,
.003553827003]
-
- >
- >
- >
-

```

dis-est-Norberg2

☐ Distribución Estacionaria con las reglas de Norberg 2

Calculamos la distribución estacionaria para cada valor de lambda.

```
> restart;
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> disest:=proc(l)
> ig0:=exp(-l):may0:=1-ig0:ig1:=exp(-l)*l;
> may1:=1-ig0-ig1;
> ig2:=exp(-l)*l^2/2;
> may2:=1-ig0-ig1-ig2;
> ig3:=exp(-l)*l^3/6;
> may3:=1-ig0-ig1-ig2-ig3;
> ig4:=exp(-l)*l^4/24;
> may4:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4;
> ig5:=exp(-l)*l^5/120;
> may5:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5;
> ig6:=exp(-l)*l^6/720;
> may6:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5-ig6;
> T:=linalg[matrix](13,13,[may0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,may0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may1,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may1,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may2,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,may2,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,may3,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,0,may3,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,0,may4,ig4,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,0,may4,0,ig4,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,0,may5,ig5,0,ig4,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,0,ig0,may5,0,ig5,0,ig4,0,ig3,0,ig2,0,ig1,0,ig0]);
> B:=transpose(T);
> Salida:=[eigenvects(B)];
> for i from 1 to nops(Salida) do
> if Salida[i,1]=1 then Conj:=Salida[i,3];fi;
> od;
> Vect:=array(1..13);
> Vect:=Conj[1];
> vel:=evalf(evalm(Vect));
> sul:=sum('vel[n]','n'=1..13);
> vec1:=evalm(vel*(1/sul));
> end;
Warning, `ig0` is implicitly declared local
Warning, `may0` is implicitly declared local
Warning, `ig1` is implicitly declared local
```



BIBLIOTECA

$$disest := \mathbf{proc}(l)$$
$$ig0 := \exp(-l);$$
$$igl := \exp(-l) * l;$$
$$may1 := 1 - ig0 -$$
$$ig2 := 1 / 2 * \exp(-l) * l'$$
$$may2 := 1 - ig0 - ig1 - ig2;$$
$$ig3 := 1 / 6 * \exp(-l) * l^3;$$
$$mav3 := 1 - ig0 - ig1 - ig2 - ig3;$$
$$ig4 := 1 / 24 * \exp(-l) * l^4;$$
$$may4 := 1 - ig0 - ig1 - ig2 - ig3 - ig4;$$
$$ig5 := 1 / 120 * \exp(-l) * l^5;$$
$$may5 := 1 - ig0 - ig1 - ig2 - ig3 - ig4 - ig5;$$
$$ig6 := 1 / 720 * \exp(-l) * l^6;$$
$$mav6 := 1 - ig0 - ig1 - ig2 - ig3 - ig4 - ig5 - ig6;$$
$$T := \text{linalg}[\text{matrix}](13, 13, [\text{may0}, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may0}, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may0}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may1}, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may1}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may2}, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may2}, 0, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may3}, \text{ig3}, 0, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, 0, \text{may3}, 0, \text{ig3}, 0, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, 0, \text{may4}, \text{ig4}, 0, \text{ig3}, 0, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, 0, 0, \text{may4}, 0, \text{ig4}, 0, \text{ig3}, 0, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, 0, \text{may5}, \text{ig5}, 0, \text{ig4}, 0, \text{ig3}, 0, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, 0, \text{ig0}, \text{may5}, 0, \text{ig5}, 0, \text{ig4}, 0, \text{ig3}, 0, \text{ig2}, 0, \text{ig1}, 0, \text{ig0}]);$$
$$B := \text{transpose}(T);$$
$$\text{Salida} := [\text{eigenvects}(B)];$$

for i **to** $\text{nops}(\text{Salida})$ **do** **if** $\text{Salida}[i, 1] = 1$ **then** $\text{Conj} := \text{Salida}[i, 3]$ **fi od**;

```

Vect := array(1 .. 13);
Vect := Conj[1];
veI := evalf(evalm(Vect));
sul := sum('veI[n]', 'n' = 1 .. 13);
vecI := evalm(veI / sul)
end
-
> disest(33/1000) ;
[.1349898940 10-7, .4472020154 10-7, .2502465537 10-6, .7420612499 10-6, .4671709169 10-5,
.00001205086325, .00008845644631, .0001865342136, .001703009846, .002645882127,
.03231076557, .03126191157, .9317856672]
-
> disest(67/1000) ;
[.1392650505 10-5, .3577497547 10-5, .00001152773301, .00002788624458,
.00009658747551, .0002123968916, .0008249288927, .001552695029, .007227911119,
.01047929717, .06348030522, .05936647680, .8567150173]
-
> disest(100/1000) ;
[.00002081389070, .00004459213826, .0001073590262, .0002213034070, .0005600756010,
.001078269674, .002978131813, .005071094028, .01630534727, .02216664782,
.09054209274, .08192587342, .7789783992]
-
> disest(133/1000) ;
[.0001477476768, .0002729878608, .0005386475597, .0009699509202, .001982391886,
.003395775119, .007424941037, .01153145689, .02865966118, .03662302257, .1131341627,
.09904501017, .6962742448]
-
> disest(167/1000) ;
[.0007128336370, .001157871486, .001954612616, .003120144036, .005400266743,
.008309144363, .01515230120, .02155652908, .04378372583, .05261346407, .1301519035,
.1101344902, .6059527131]
-
> disest(200/1000) ;
[.002455004274, .003577509015, .005338948088, .007686357173, .01168070210,
.01635778747, .02589932837, .03403659669, .05904915602, .06698318093, .1390218078,
.1138214294, .5140921929]
-
> disest(233/1000) ;
[.006814120512, .009017254796, .01211482986, .01589524533, .02164144641,
.02780505827, .03910387827, .04770458367, .07251200899, .07778923220, .1391744539,
.1102475409, .4201803467]
-
> disest(267/1000) ;
[.01621554561, .01962154802, .02397459863, .02883571055, .03557808949, .04211653683,
.05330949643, .06050120303, .08179532525, .08298780313, .1300664758, .09958839802,
.3254092693]
-
> disest(300/1000) ;
[.03223637449, .03603389491, .04053780561, .04511691566, .05112593460, .05620916945,

```

```

.06500677076, .06903604799, .08445772022, .08129856034, .1137654590, .08427952496,
.2408958217]
> disest(333/1000);
[.05614094725, .05832068887, .06084542580, .06300944205, .06609541045, .06780217668,
.07229160780, .07207024625, .08062238829, .07373291523, .09320207861, .06680447199,
.1690622010]
> disest(367/1000);
[.08835478340, .08555295578, .08307769358, .08026111287, .07825539869, .07505418564,
.07413508001, .06945345123, .07146520352, .06208263452, .07136262360, .04944071392,
.1115041632]
> disest(400/1000);
[.1248765915, .1134137626, .1032046816, .09357600770, .08541345039, .07700734706,
.07102767453, .06280527520, .05999111293, .04963738378, .05243451322, .03514790532,
.07146429505]
> disest(433/1000);
[.1640097659, .1401994978, .1200069755, .1024602043, .08790642066, .07472236769,
.06464980155, .05407545110, .04820949203, .03803415431, .03715624745, .02409807412,
.04447154756]
> disest(467/1000);
[.2047647378, .1649587644, .1330130733, .1070605666, .08647787557, .06936672607,
.05640952834, .04464994849, .03724989855, .02801019275, .02538658926, .01591434736,
.02673775175]
> disest(500/1000);
[.2432465949, .1854786989, .1415201669, .1078404172, .08239124747, .06261495642,
.04809947286, .03615217886, .02838676745, .02039299127, .01726406052, .01047118201,
.01614126511]
> disest(533/1000);
[.2798640461, .2024338048, .1464914388, .1059103050, .07671945127, .05534989729,
.04027113818, .02878786618, .02134274571, .01466103475, .01163795220, .006829636827,
.009700682163]
> disest(567/1000);
[.3152929353, .2164325466, .1486157313, .1019809593, .07007975905, .04801025904,
.03310873228, .02251002549, .01577445964, .01035602726, .007720092497, .004379026090,
.005739445775]
> disest(600/1000);
[.3473932407, .2270486918, .1484262310, .09698266926, .06343641910, .04139634318,
.02715494317, .01760828292, .01171070358, .007362976500, .005179416197,
.002842523877, .003457558537]
> disest(633/1000);
[.3773299311, .2351576599, .1465761121, .09133061412, .05695260537, .03545082547,

```

```
.02215794769, .01371976737, .008677187015, .005228561599, .003479438402,
.001847569335, .002091780839]
- > disest(667/1000);
[.4060702221, .2412999463, .1434034226, .08520268662, .05065262944, .03007127513,
.01791059859, .01058662490, .006369347246, .003675907385, .002315654133,
.001188500241, .001253185418]
- >
```

dis-est-Norberg3

≡ Noruega 75 Distribución Estacionaria con las reglas T3

Calculamos la distribución estacionaria para cada valor de lambda.

```
> restart;
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> disest:=proc(l)
> ig0:=exp(-l):may0:=1-ig0;
> ig1:=exp(-l)*l;
> may1:=1-ig0-ig1;
> ig2:=exp(-l)*l^2/2;
> may2:=1-ig0-ig1-ig2;
> ig3:=exp(-l)*l^3/6;
> may3:=1-ig0-ig1-ig2-ig3;
> ig4:=exp(-l)*l^4/24;
> may4:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4;
> ig5:=exp(-l)*l^5/120;
> may5:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5;
> ig6:=exp(-l)*l^6/720;
> may6:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5-ig6;
> T:=linalg[matrix](13,13,[may0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,may0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may1,ig1,0,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,may1,0,ig1,0,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,may1,0,ig1,0,0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,may2,ig2,0,0,ig1,0,0,0,ig0,0,0,0,0,may2,0,ig2,0,0,ig1,0,0,0,ig0,0,0,0,may2,0,0,ig2,0,0,ig1,0,0,0,ig0,0,0,may3,ig3,0,0,ig2,0,0,ig1,0,0,0,ig0,0,may3,0,ig3,0,0,ig2,0,0,ig1,0,0,0,ig0,may3,0,0,ig3,0,0,ig2,0,0,ig1,0,0,ig0]);
> B:=transpose(T);
> Salida:=[eigenvects(B)];
> for i from 1 to nops(Salida) do
> if Salida[i,1]=1 then Conj:=Salida[i,3];fi;
> od;
> Vect:=array(1..13);
> Vect:=Conj[1];
> vel:=evalf(evalm(Vect));
> sul:=sum('vel[n]','n'=1..13);
> vec1:=evalm(vel*(1/sul));
> end;
Warning, `ig0` is implicitly declared local
Warning, `may0` is implicitly declared local
Warning, `ig1` is implicitly declared local
Warning, `may1` is implicitly declared local
Warning, `ig2` is implicitly declared local
```

Warning, `may2` is implicitly declared local
Warning, `ig3` is implicitly declared local
Warning, `may3` is implicitly declared local
Warning, `ig4` is implicitly declared local
Warning, `may4` is implicitly declared local
Warning, `ig5` is implicitly declared local
Warning, `may5` is implicitly declared local
Warning, `ig6` is implicitly declared local
Warning, `may6` is implicitly declared local
Warning, `T` is implicitly declared local
Warning, `B` is implicitly declared local
Warning, `Salida` is implicitly declared local
Warning, `i` is implicitly declared local
Warning, `Conj` is implicitly declared local
Warning, `Vect` is implicitly declared local
Warning, `ve1` is implicitly declared local
Warning, `sul` is implicitly declared local
Warning, `vecl` is implicitly declared local

disest := **proc**(*l*)

local *ig0, may0, ig1, may1, ig2, may2, ig3, may3, ig4, may4, ig5, may5, ig6, may6, T, B, Salida,*

i, Conj, Vect, ve1, sul, vecl;

ig0 := **exp**(-*l*);

may0 := 1 - *ig0*;

ig1 := **exp**(-*l*)**l*;

may1 := 1 - *ig0* - *ig1*;

ig2 := 1 / 2***exp**(-*l*)**l*²;

may2 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2*;

ig3 := 1 / 6***exp**(-*l*)**l*³;

may3 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3*;

ig4 := 1 / 24***exp**(-*l*)**l*⁴;

may4 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4*;

ig5 := 1 / 120***exp**(-*l*)**l*⁵;

may5 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4* - *ig5*;

ig6 := 1 / 720***exp**(-*l*)**l*⁶;

may6 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4* - *ig5* - *ig6*;

T := **linalg**[**matrix**](13, 13, [*may0, ig0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, may0, 0, ig0, 0, 0, 0,*
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may0, 0, 0, ig0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, may0, 0, 0, 0, ig0, 0, 0, 0,*
0, 0, 0, 0, *may1, ig1, 0, 0, 0, ig0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, may1, 0, ig1, 0, 0, 0, ig0, 0, 0, 0,*
0, 0, *may1, 0, 0, ig1, 0, 0, 0, ig0, 0, 0, 0, 0, may2, ig2, 0, 0, ig1, 0, 0, 0, ig0, 0, 0, 0,*
0, *may2, 0, ig2, 0, 0, ig1, 0, 0, 0, ig0, 0, 0, 0, may2, 0, 0, ig2, 0, 0, ig1, 0, 0, 0, ig0, 0,*
0, *may3, ig3, 0, 0, ig2, 0, 0, ig1, 0, 0, 0, ig0, 0, may3, 0, ig3, 0, 0, ig2, 0, 0, ig1, 0, 0,*
0, *ig0, may3, 0, 0, ig3, 0, 0, ig2, 0, 0, ig1, 0, 0, ig0*]);

B := **transpose**(*T*);

Salida := [**eigenvects**(*B*)];

for *i* **to** **nops**(*Salida*) **do** **if** *Salida*[*i, 1*] = 1 **then** *Conj* := *Salida*[*i, 3*] **fi** **od**;

Vect := **array**(1 .. 13);


```

Vect := Conj[1];
vel := evalf(evalm(Vect));
sul := sum('vel[n]', 'n' = 1 .. 13);
vec1 := evalm(vel / sul)
end
> disest(33/1000);
[.6532226421 10-5, .00001456761049, .00002678659513, .0001062282481, .0002071846187,
.0003321772118, .001821545169, .002756299574, .003628447585, .03217254109,
.03112817406, .03011770869, .8976818075]
> disest(67/1000);
[.0001671647697, .0003005802946, .0004849482291, .001129383652, .001882259976,
.002746435473, .008114875924, .01123458903, .01391587775, .06221415461, .05818237881,
.05441188148, .7852154700]
> disest(100/1000);
[.001112572354, .001719013923, .002487736450, .004438654935, .006541677961,
.008780925059, .01875963084, .02401799045, .02810566614, .08603041256, .07784353633,
.07043574443, .6697264387]
> disest(133/1000);
[.004303304977, .005898014549, .007759373783, .01160813043, .01542486578,
.01917227606, .03293872111, .03924847685, .04347581814, .1021399222, .08941993638,
.07828403285, .5503271268]
> disest(167/1000);
[.01230545998, .01522217565, .01834843795, .02399307161, .02906753888, .03356918401,
.04883702963, .05433491302, .05698642465, .1087885156, .09205679952, .07789842800,
.4285920216]
> disest(200/1000);
[.02696677937, .03061827395, .03418030283, .04026975607, .04505800324, .04868241484,
.06235287731, .06518744485, .06494554785, .1054513178, .08633623682, .07068613221,
.3192649126]
> disest(233/1000);
[.04953035104, .05212138161, .05423585583, .05853089905, .06094829068, .06185199499,
.07129369500, .07028965534, .06662309040, .09448174488, .07484405181, .05928798310,
.2259610063]
> disest(267/1000);
[.08025163918, .07868348149, .07657530889, .07639205526, .07433038667, .07097061712,
.07456505450, .06942432716, .06259852075, .07878273065, .06032181535, .04618678963,
.1509172732]
> disest(300/1000);
[.1151149572, .1059766920, .09707595414, .09046810629, .08281614524, .07475339471,
.07259522471, .06410475247, .05513883328, .06271057093, .04645713358, .03441629103,

```

```

.09837194403]
> disest(333/1000) ;
[.1524025027, .1323224652, .1144973511, .1002797682, .08669769595, .07417303898,
.06713340709, .05634963766, .04628905502, .04810802055, .03448239521, .02471595312,
.06254870836]
> disest(367/1000) ;
[.1911693139, .1568433283, .1283851840, .1059852524, .08667711639, .07033695010,
.05960083223, .04757525726, .03731367654, .03566882095, .02471170318, .01712050630,
.03861205830]
> disest(400/1000) ;
[.2277532249, .1773891516, .1379445430, .1079205168, .08385052857, .06476979766,
.05174350970, .03940414634, .02957692080, .02625823704, .01760142266, .01179858645,
.02398941432]
> disest(433/1000) ;
[.2625869721, .1946269025, .1440991419, .1071510231, .07927044974, .05838778633,
.04415141934, .03212370897, .02309689404, .01915545698, .01242347261, .008057373503,
.01486939857]
> disest(467/1000) ;
[.2963457658, .2091555904, .1475091813, .1043526066, .07354454987, .05166279214,
.03704043968, .02574774557, .01772539623, .01377406933, .008634689827, .005412915139,
.009094258022]
> disest(500/1000) ;
[.3270070212, .2204744121, .1485721893, .1003410842, .06757674729, .04539909538,
.03099281741, .02063445182, .01362923501, .009983476308, .006055284471,
.003672715685, .005661469493]
> disest(533/1000) ;
[.3556863578, .2294264827, .1479335068, .09553985405, .06157245736, .03960808139,
.02580232223, .01647023654, .01044495769, .007236773166, .004246841000,
.002492223818, .003539905818]
> disest(567/1000) ;
[.3833147212, .2365410676, .1459327272, .09013575531, .05558522933, .03423110683,
.02128957409, .01302485475, .007926248646, .005201404770, .002950364545,
.001673519238, .002193426740]
> disest(600/1000) ;
[.4084307499, .2417130604, .1430240877, .08469924384, .05009986838, .02960337425,
.01762892149, .01035842973, .006059924423, .003782014275, .002075613442,
.001139120809, .001385591484]
> disest(633/1000) ;
[.4320298864, .2454413331, .1394220118, .07924598145, .04500246626, .02553611022,
.01457948476, .008233522390, .004633151154, .002755889691, .001463367561,

```

```
-.0007770429355,.0008797523820]
- > disest(667/1000);
- [.4549093392,.2480045886,.1351948587,.07373086760,.04018362658,.02188742814.
-.01197938951,.006498679635,.003515214429,.001993748215,.001023283313.
-.0005251960761,.0005537803376]
- >
```

dis-est-España

≡ España 1994 Distribución Estacionaria

Calculamos la distribución estacionaria para cada valor de lambda.

```
> restart;
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> disest:=proc(l)
> ig0:=exp(-l):may0:=1-ig0:ig1:=exp(-l)*l;
> may1:=1-ig0-ig1;
> ig2:=exp(-l)*l^2/2;
> may2:=1-ig0-ig1-ig2;
> ig3:=exp(-l)*l^3/6;
> may3:=1-ig0-ig1-ig2-ig3;
> ig4:=exp(-l)*l^4/24;
> may4:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4;
> ig5:=exp(-l)*l^5/120;
> may5:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5;
> ig6:=exp(-l)*l^6/720;
> may6:=1-ig0-ig1-ig2-ig3-ig4-ig5-ig6;
> T:=linalg[matrix](12,12,[may0,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,may1,ig1,0,
,ig0,0,0,0,0,0,0,0,0,may1,0,ig1,0,ig0,0,0,0,0,0,0,0,may2,ig2,0,i
g1,ig0,0,0,0,0,0,0,0,may2,0,ig2,0,ig1,ig0,0,0,0,0,0,0,may3,ig3,0,
,ig2,0,ig1,ig0,0,0,0,0,0,may3,0,ig3,0,ig2,ig1,0,ig0,0,0,0,0,may3
,0,0,ig3,0,ig2,ig1,0,ig0,0,0,0,0,may3,0,0,ig3,0,ig2,ig1,0,ig0,0,
0,0,may3,0,0,ig3,0,0,ig2,ig1,0,ig0,0,0,0,may3,0,0,ig3,0,0,ig2,ig
1,0,ig0,0,0,0,may3,0,0,ig3,0,0,ig2,ig1,ig0]);
> B:=transpose(T);
> Salida:=[eigenvects(B)];
> for i from 1 to nops(Salida) do
> if Salida[i,1]=1 then Conj:=Salida[i,3];fi;
> od;
> Vect:=array(1..12);
> Vect:=Conj[1];
> vel:=evalf(evalm(Vect));
> su1:=sum('vel[n]','n'=1..12);
> vec1:=evalm(vel*(1/su1));
> end;
Warning, `ig0` is implicitly declared local
Warning, `may0` is implicitly declared local
Warning, `ig1` is implicitly declared local
Warning, `may1` is implicitly declared local
Warning, `ig2` is implicitly declared local
Warning, `may2` is implicitly declared local
Warning, `ig3` is implicitly declared local
```

```

Warning, `may3` is implicitly declared local
Warning, `ig4` is implicitly declared local
Warning, `may4` is implicitly declared local
Warning, `ig5` is implicitly declared local
Warning, `may5` is implicitly declared local
Warning, `ig6` is implicitly declared local
Warning, `may6` is implicitly declared local
Warning, `T` is implicitly declared local
Warning, `B` is implicitly declared local
Warning, `Salida` is implicitly declared local
Warning, `i` is implicitly declared local
Warning, `Conj` is implicitly declared local
Warning, `Vect` is implicitly declared local
Warning, `vel` is implicitly declared local
Warning, `sul` is implicitly declared local
Warning, `vecl` is implicitly declared local

```

disest := proc(l)

local *ig0, may0, ig1, may1, ig2, may2, ig3, may3, ig4, may4, ig5, may5, ig6, may6, T, B, Salida,*
i, Conj, Vect, vel, sul, vecl;

ig0 := exp(-l);

may0 := 1 - *ig0*;

ig1 := exp(-l)*l;

may1 := 1 - *ig0* - *ig1*;

ig2 := 1 / 2*exp(-l)*l^2;

may2 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2*;

ig3 := 1 / 6*exp(-l)*l^3;

may3 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3*;

ig4 := 1 / 24*exp(-l)*l^4;

may4 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4*;

ig5 := 1 / 120*exp(-l)*l^5;

may5 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4* - *ig5*;

ig6 := 1 / 720*exp(-l)*l^6;

may6 := 1 - *ig0* - *ig1* - *ig2* - *ig3* - *ig4* - *ig5* - *ig6*;

T := linalg[matrix](12, 12, [*may0*, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may1*, *ig1*, 0, *ig0*, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, *may1*, 0, *ig1*, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may2*, *ig2*, 0, *ig1*, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, *may2*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, *may3*, *ig3*, 0, *ig2*, 0, *ig1*, *ig0*, 0, 0, 0, 0,
0, *may3*, 0, *ig3*, 0, *ig2*, *ig1*, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, 0, *may3*, 0, 0, *ig3*, 0, *ig2*, *ig1*, 0, *ig0*, 0, 0,
0, 0, *may3*, 0, 0, *ig3*, 0, *ig2*, *ig1*, 0, *ig0*, 0, 0, 0, 0, *may3*, 0, 0, *ig3*, 0, 0, *ig2*, *ig1*, 0, *ig0*,
0, 0, 0, *may3*, 0, 0, *ig3*, 0, 0, *ig2*, *ig1*, 0, *ig0*, 0, 0, 0, *may3*, 0, 0, *ig3*, 0, 0, *ig2*, *ig1*,
ig0]);

B := transpose(*T*);

Salida := [eigenvects(*B*)];

for *i* **to** nops(*Salida*) **do** **if** *Salida*[*i*, 1] = 1 **then** *Conj* := *Salida*[*i*, 3] **fi** **od**;

Vect := array(1 .. 12);

Vect := *Conj*[1];

```

    vel := evalf(evalm( Vect ));
    sul := sum('vel[n]', 'n' = 1 .. 12);
    vec1 := evalm( vel / sul )
end
- > disest(5/1000) ;
[.7129029679 10-9, -.5590292349 10-10, .1134955760 10-8, -.6708350823 10-10, 0,
.5233181577 10-9, .2090409223 10-7, .2258541250 10-7, .2708965846 10-6, .00003745741170,
.004987332399, .9949748932]
- > disest(15/1000) ;
[.4252813299 10-9, -.7788679226 10-10, .1117199239 10-8, .2082677332 10-8,
.2292373562 10-8, .1953815328 10-7, .5762456977 10-6, .7130142399 10-6, .7320785727 10-5,
.0003362696086, .01488292544, .9847721696]
- > disest(25/1000) ;
[.6794239063 10-9, .4918145380 10-9, .4479506347 10-9, .1586436314 10-7, .1983626493 10-7,
.1532980269 10-6, .2726614929 10-5, .3769936876 10-5, .00003390663897, .0009314665460,
.02466608775, .9743618524]
- > disest(35/1000) ;
[0, .1335201084 10-9, .3136591549 10-8, .6099145137 10-7, .8176556590 10-7,
.6031410832 10-6, .7680168795 10-5, .00001163714519, .00009304849090, .001819994122,
.03432809522, .9637387958]
- > disest(45/1000) ;
[-.1906245617 10-9, .7362472355 10-9, .8747356848 10-8, .1670950039 10-6,
.2403590506 10-6, .1689639955 10-5, .00001682483792, .00002749261788, .0001977199642,
.002998219940, .04385984604, .9528977905]
- > disest(55/1000) ;
[.1167825883 10-8, .2614419321 10-8, .2163793716 10-7, .3724216696 10-6, .5753906765 10-6,
.3877802379 10-5, .00003178169505, .00005525015486, .0003607981672, .004461894807,
.05325184921, .9418335752]
- > disest(65/1000) ;
[.7722998914 10-9, .7655530180 10-8, .5307112085 10-7, .7277279356 10-6, .1203641927 10-5,
.7797070651 10-5, .00005446001457, .00009956015325, .0005950156877, .006206110800,
.06249421545, .9305408476]
- > disest(75/1000) ;
[.1326024498 10-8, .1684016758 10-7, .1091095046 10-6, .1294702810 10-5, .2284819430 10-5,
.00001427606135, .00008711228976, .0001658004348, .0009129037546, .008225262375,
.07157664773, .9190142909]
- > disest(85/1000) ;
[.3434704198 10-8, .3629254280 10-7, .2076443842 10-6, .2150393942 10-5, .4033272454 10-5,
.00002437328789, .0001323876734, .0002600657198, .001326731477, .01051300091,

```

```

.08048843256, .9072485775]
> disest(95/1000) ;
[.4466795600 10-8, .7211838862 10-7, .3702028841 10-6, .3386904353 10-5, .6729406316 10-5,
.00003942272009, .0001933856441, .0003891487743, .001848441654, .01306219336,
.08921843496, .8952384099]
> disest(105/1000) ;
[.1360371949 10-7, .1341546543 10-6, .6258606536 10-6, .5117201429 10-5, .00001073125896,
.00006107312793, .0002737081771, .0005605141768, .002489578127, .01586487231,
.09775509293, .8829785390]
> disest(115/1000) ;
[.2491978249 10-7, .2361815194 10-6, .1012378561 10-5, .7479822565 10-5, .00001649631537,
.00009134554526, .0003775068497, .0007822651619, .003261209353, .01891219466,
.1060864170, .8704638116]
> disest(125/1000) ;
[.4524681918 10-7, .3977208503 10-6, .1580547012 10-5, .00001064149540,
.00002458735907, .0001326768524, .0005095259551, .001063101048, .004173845897,
.02219439254, .1141999919, .8576892133]
> disest(135/1000) ;
[.8431812340 10-7, .6456757619 10-6, .2398835663 10-5, .00001480946124,
.00003570567317, .0001879883936, .0006751450863, .001412261771, .005237350857,
.02570072592, .1220829808, .8446499028]
> disest(145/1000) ;
[.1411669105 10-6, .1014407169 10-5, .3546660882 10-5, .00002023431069,
.00005070695397, .0002607367920, .0008804096863, .001839474036, .006460848312,
.02941943778, .1297221407, .8313413093]
> disest(155/1000) ;
[.2456501540 10-6, .1549348645 10-5, .5132204634 10-5, .00002722386039,
.00007062495702, .0003549801054, .001132055876, .002354868587, .007852619539,
.03333771281, .1371038325, .8177591545]
> disest(165/1000) ;
[.3976510755 10-6, .2311651514 10-5, .7288820992 10-5, .00003615460021,
.00009670609307, .0004754408672, .001437526021, .002968900175, .009420000073,
.03744163128, .1442140543, .8038995883]
> disest(175/1000) ;
[.6329145107 10-6, .3374797523 10-5, .00001019347377, .00004748507263, .0001304372544,
.0006275618082, .001804976141, .003692247560, .01116926766, .04171613417,
.1510384638, .7897592250]
> disest(185/1000) ;
[.9944045564 10-6, .4834361001 10-5, .00001405496341, .00006177162344, .0001735763313,

```

```

    .0008175748118. .002243262797, .004535703830, .01310552885, .04614498995,
    .1575624265, .7753352815]
- > disest(195/1000);
- [.1513272292 10-5, .6810074258 10-5, .00001913913747, .00007968361057, .0002281921937,
- .001052540022, .002761926841, .005510048490, .01523259979, .05071076939, .1637710710,
- .7606257059]
- >

```


España

☐ Este programa discretiza la función gamma tomando intervalos de amplitud 0.01

```
> restart;  
> with(student):  
> z1:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778  
*x),x=0..0.01));
```

$$z1 := 36.07793004 \int_0^{.01} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z1);
```

.07030390020

```
> z2:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778  
*x),x=0.01..0.02));
```

$$z2 := 36.07793004 \int_{.01}^{.02} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z2);
```

.1261852839

```
> z3:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778  
*x),x=0.02..0.03));
```

$$z3 := 36.07793004 \int_{.02}^{.03} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z3);
```

.1353986583

```
> z4:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778  
*x),x=0.03..0.04));
```

$$z4 := 36.07793004 \int_{.03}^{.04} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z4);
```

.1262816473

```
> z5:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778  
*x),x=0.04..0.05));
```

$$z5 := 36.07793004 \int_{.04}^{.05} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z5);
```

.1100897391

```
> z6:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778
*x),x=0.05..0.06));
```

$$z6 := 36.07793004 \int_{.05}^{.06} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z6);
```

.09221960382

```
> z7:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778
*x),x=0.06..0.07));
```

$$z7 := 36.07793004 \int_{.06}^{.07} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z7);
```

.07523769502

```
> z8:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778
*x),x=0.07..0.08));
```

$$z8 := 36.07793004 \int_{.07}^{.08} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z8);
```

.06024166056

```
> z9:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778
*x),x=0.08..0.09));
```

$$z9 := 36.07793004 \int_{.08}^{.09} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z9);
```

.04756241472

```
> z10:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.377
8*x),x=0.09..0.1));
```

$$z10 := 36.07793004 \int_{.09}^{.1} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z10);
```

.03714503652

```
> z11:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.1..0.11));
```

$$z11 := 36.07793004 \int_{.1}^{.11} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z11);
```

.02875805757

```
> z12:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.11..0.12));
```

$$z12 := 36.07793004 \int_{.11}^{.12} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z12);
```

.02210704976

```
> z13:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.12..0.13));
```

$$z13 := 36.07793004 \int_{.12}^{.13} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z13);
```

.01689396151

```
> z14:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.13..0.14));
```

$$z14 := 36.07793004 \int_{.13}^{.14} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z14);
```

.01284572977

```
> z15:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.14..0.15));
```

$$z15 := 36.07793004 \int_{.14}^{.15} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z15);
```

.009725776106

```
> z16:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.15..0.16));
```

```
> evalf(z16);
```

```
> z17:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.16..0.17));
```

```
> evalf(z17);
```

```
> z18:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.17..0.18));
```

```
> evalf(z18);
```

```
> z19:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.18..0.19));
```

```
> evalf(z19);
```

```
> z20:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.19..0.2));
```

```
> evalf(z20);
```

```
> z21:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.12..0.21));
```

```
> evalf(z21);
```

.001718017120

```
> z22:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.21..0.22));
```

$$z22 := 36.07793004 \int_{.21}^{.22} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z22);
```

.001276840103

```
> z23:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.22..0.23));
```

$$z23 := 36.07793004 \int_{.22}^{.23} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z23);
```

.0009473576933

```
> z24:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.23..0.24));
```

$$z24 := 36.07793004 \int_{.23}^{.24} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z24);
```

.0007018165915

```
> z25:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.24..0.25));
```

$$z25 := 36.07793004 \int_{.24}^{.25} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z25);
```

.0005191838761

```
> z26:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.25..0.26));
```

$$z26 := 36.07793004 \int_{.25}^{.26} 15.19658992 x^{\frac{7757}{10000}} e^{(-33.37780000 x)} dx$$

```
> evalf(z26);
```

.0003835798003

```
> z27:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.26..0.27));
```

```
> evalf(z27);
```

```
> z28:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.27..0.28));
```

```
> evalf(z28);
```

```
> z29:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.28..0.29));
```

```
> evalf(z29);
```

```
> z30:=(33.3778/GAMMA(1.7757)*int(((33.3778*x)^0.7757)*exp(-33.3778*x),x=0.29..0.3));
```

```
> evalf(z30);
```

```
> 0.0703+0.1262+0.1354+0.1263+0.1101+0.0922+0.0752+0.0602+0.0476+0.0371+0.0288+0.0221+0.0169+0.0128+0.0097+0.0073+0.0055+0.0041+0.0031+0.0023+0.0017+0.0013+0.0009+0.0007+0.0005+0.0004+0.0003+0.0002+0.0002+0.0001+0.0005;
```

```
> 0.005*0.0703+0.015*0.1262+0.025*0.1354+0.035*0.1263+0.045*0.1101
+0.055*0.0922+0.065*0.0752+0.075*0.0602+0.075*0.0476+0.085*0.037
1+0.095*0.0288+0.105*0.0221+0.115*0.0169+0.125*0.0128+0.135*0.00
97+0.145*0.0073+0.155*0.0055+0.165*0.0041+0.175*0.0031+0.185*0.0
023+0.195*0.0017+0.205*0.0013+0.215*0.0009+0.225*0.0007+0.235*0.
0005+0.245*0.0004+0.255*0.0003+0.265*0.0002+0.275*0.0002+0.285*0
.0001+0.295*0.0005;
```

```
> 0.0017+0.0013+0.0009+0.0007+0.0005+0.0004+0.0003+0.0002+0.0002+0.0001+0.0005;
```

☐ Son demasiados intervalos, discretizo tomando la anchura del intervalo 0.02, la probabilidad correspondiente

```
> q1:=0.0703+0.1262;
```

```
q1 := .1965
```

```
> q2:=0.1354+0.1263;
```

```
q2 := .2617
```

```
> q3:=0.1101+0.0922;
```

```
q3 := .2023
```

```
> q4:=0.0752+0.0602;
```

```
q4 := .1354
```

```
> q5:=0.0476+0.0371;
```

```
q5 := .0847
```

```
> q6:=0.0288+0.0221;
```

```
q6 := .0509
```

```
> q7:=0.0169+0.0128;
```

```
q7 := .0297
```

```
> q8:=0.0097+0.0073;
```

```
q8 := .0170
```

```
> q9:=0.0055+0.0041;
```

```
q9 := .0096
```

```
> q10=0.0031+0.0023;
```

```
q10 = .0054
```

```
> q11:=0.0017+0.0013;
```

```
q11 := .0030
```

```
> q12:=0.0009+0.0007;
```

```
q12 := .0016
```

```
> q13:=0.0005+0.0004;
```

```
q13 := .0009
```

```
> q14:=0.0003+0.0002;
```

```
q14 := .0005
```

```
> q15:=0.0002+0.0001;
```

```
q15 := .0003
```

```
> q16:=0.0005;
```

```
q16 := .0005
```

```
>
```

fun-obj-Borgam

```

> restart;
> with(simplex):
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
> res1 :=
(523/10^10)*pi[1]+(2757/10^10)*pi[2]+(7974/10^10)*pi[3]+(62715/1
0^10)*pi[4]+(190556/10^10)*pi[5]+(1173512/10^10)*pi[6]+(3157986/
10^10)*pi[7]+(21603792/10^10)*pi[8]+(50005225/10^10)*pi[9]+(7131
5119/10^10)*pi[10]+(801348952/10^10)*pi[11]+(759705270/10^10)*pi
[12]+(8291425613/10^10)*pi[13]+x1-y1 = 33/1000;

res1 := 
$$\frac{523}{10000000000} \pi_1 + \frac{2757}{10000000000} \pi_2 + \frac{3987}{5000000000} \pi_3 + \frac{12543}{2000000000} \pi_4$$


$$+ \frac{47639}{2500000000} \pi_5 + \frac{146689}{1250000000} \pi_6 + \frac{1578993}{5000000000} \pi_7 + \frac{1350237}{625000000} \pi_8 + \frac{2000209}{4000000000} \pi_9$$


$$+ \frac{71315119}{10000000000} \pi_{10} + \frac{100168619}{12500000000} \pi_{11} + \frac{75970527}{10000000000} \pi_{12} + \frac{8291425613}{10000000000} \pi_{13} + x1 - y1 = \frac{33}{1000}$$

> res2 :=
(25000/10^10)*pi[1]+(70737/10^10)*pi[2]+(176933/10^10)*pi[3]+(85
2180/10^10)*pi[4]+(2186705/10^10)*pi[5]+(7208703/10^10)*pi[6]+(1
7490727/10^10)*pi[7]+(60472378/10^10)*pi[8]+(136395540/10^10)*pi
[9]+(183694780/10^10)*pi[10]+(1079576491/10^10)*pi[11]+(97994752
6/10^10)*pi[12]+(7531902297/10^10)*pi[13]+x2-y2 = 67/1000;

res2 := 
$$\frac{1}{400000} \pi_1 + \frac{70737}{10000000000} \pi_2 + \frac{176933}{10000000000} \pi_3 + \frac{42609}{5000000000} \pi_4 + \frac{437341}{2000000000} \pi_5$$


$$+ \frac{7208703}{10000000000} \pi_6 + \frac{17490727}{10000000000} \pi_7 + \frac{30236189}{5000000000} \pi_8 + \frac{6819777}{5000000000} \pi_9 + \frac{9184739}{5000000000} \pi_{10}$$


$$+ \frac{1079576491}{10000000000} \pi_{11} + \frac{489973763}{5000000000} \pi_{12} + \frac{7531902297}{10000000000} \pi_{13} + x2 - y2 = \frac{67}{1000}$$

> res3 :=
(239630/10^10)*pi[1]+(493242/10^10)*pi[2]+(1068530/10^10)*pi[3]+
(4235236/10^10)*pi[4]+(9283151/10^10)*pi[5]+(22638140/10^10)*pi[
6]+(48508189/10^10)*pi[7]+(120521353/10^10)*pi[8]+(249934598/10^
10)*pi[9]+(318295880/10^10)*pi[10]+(1308053564/10^10)*pi[11]+(11
42749910/10^10)*pi[12]+(6773978572/10^10)*pi[13]+x3-y3 = 1/10;

res3 := 
$$\frac{23963}{10000000000} \pi_1 + \frac{246621}{50000000000} \pi_2 + \frac{106853}{10000000000} \pi_3 + \frac{1058809}{25000000000} \pi_4$$


$$+ \frac{9283151}{10000000000} \pi_5 + \frac{1131907}{5000000000} \pi_6 + \frac{48508189}{10000000000} \pi_7 + \frac{120521353}{10000000000} \pi_8 + \frac{124967299}{50000000000} \pi_9$$


$$+ \frac{7957397}{2500000000} \pi_{10} + \frac{327013391}{25000000000} \pi_{11} + \frac{114274991}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1693494643}{25000000000} \pi_{13} + x3 - y3 = \frac{1}{10}$$


```



```
> res4 :=
(1217103/10^10)*pi[1]+(2017022/10^10)*pi[2]+(3839650/10^10)*pi[3]
+(13771717/10^10)*pi[4]+(26290969/10^10)*pi[5]+(52977943/10^10)
*pi[6]+(100802822/10^10)*pi[7]+(204145418/10^10)*pi[8]+(38415754
5/10^10)*pi[9]+(463265597/10^10)*pi[10]+(1486311682/10^10)*pi[11]
+(1252194856/10^10)*pi[12]+(6009007672/10^10)*pi[13]+x4-y4 =
133/1000;
```

$$\begin{aligned} \text{res4} := & \frac{1217103}{10000000000} \pi_1 + \frac{1008511}{5000000000} \pi_2 + \frac{76793}{2000000000} \pi_3 + \frac{13771717}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{26290969}{10000000000} \pi_5 + \frac{52977943}{10000000000} \pi_6 + \frac{50401411}{50000000000} \pi_7 + \frac{102072709}{50000000000} \pi_8 + \frac{76831509}{20000000000} \pi_9 \\ & + \frac{463265597}{100000000000} \pi_{10} + \frac{743155841}{50000000000} \pi_{11} + \frac{156524357}{12500000000} \pi_{12} + \frac{751125959}{12500000000} \pi_{13} + x4 - y4 = \frac{133}{1000} \end{aligned}$$

```
> res5 :=
(4403875/10^10)*pi[1]+(6145425/10^10)*pi[2]+(10413253/10^10)*pi[3]
+(35246923/10^10)*pi[4]+(59517106/10^10)*pi[5]+(104151218/10^10)
*pi[6]+(177702738/10^10)*pi[7]+(311044340/10^10)*pi[8]+(531305
590/10^10)*pi[9]+(607205764/10^10)*pi[10]+(1611034383/10^10)*pi[11]
+(1309323257/10^10)*pi[12]+(5232506122/10^10)*pi[13]+x5-y5 =
167/1000;
```

$$\begin{aligned} \text{res5} := & \frac{35231}{800000000} \pi_1 + \frac{245817}{4000000000} \pi_2 + \frac{10413253}{100000000000} \pi_3 + \frac{35246923}{100000000000} \pi_4 + \frac{29758553}{50000000000} \pi_5 \\ & + \frac{52075609}{50000000000} \pi_6 + \frac{88851369}{50000000000} \pi_7 + \frac{15552217}{50000000000} \pi_8 + \frac{53130559}{100000000000} \pi_9 + \frac{151801441}{25000000000} \pi_{10} \\ & + \frac{1611034383}{100000000000} \pi_{11} + \frac{1309323257}{100000000000} \pi_{12} + \frac{2616253061}{50000000000} \pi_{13} + x5 - y5 = \frac{167}{1000} \end{aligned}$$

```
> res6 :=
(11917752/10^10)*pi[1]+(14482321/10^10)*pi[2]+(22226444/10^10)*p
i[3]+(72802112/10^10)*pi[4]+(110837330/10^10)*pi[5]+(174276033/1
0^10)*pi[6]+(271046836/10^10)*pi[7]+(426705727/10^10)*pi[8]+(668
987213/10^10)*pi[9]+(727827680/10^10)*pi[10]+(1673616835/10^10)*
pi[11]+(1315012153/10^10)*pi[12]+(4510261566/10^10)*pi[13]+x6-y6
= 2/10;
```

$$\begin{aligned} \text{res6} := & \frac{1489719}{12500000000} \pi_1 + \frac{14482321}{100000000000} \pi_2 + \frac{5556611}{25000000000} \pi_3 + \frac{1137533}{156250000} \pi_4 + \frac{11083733}{10000000000} \pi_5 \\ & + \frac{174276033}{100000000000} \pi_6 + \frac{67761709}{25000000000} \pi_7 + \frac{426705727}{100000000000} \pi_8 + \frac{668987213}{100000000000} \pi_9 + \frac{4548923}{62500000} \pi_{10} \\ & + \frac{334723367}{20000000000} \pi_{11} + \frac{1315012153}{100000000000} \pi_{12} + \frac{2255130783}{50000000000} \pi_{13} + x6 - y6 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

```
> res7 :=
(26940816/10^10)*pi[1]+(29026900/10^10)*pi[2]+(40794041/10^10)*p
i[3]+(131127644/10^10)*pi[4]+(182159617/10^10)*pi[5]+(262076176/
```

$10^{10} \cdot \pi[6] + (375731638/10^{10}) \cdot \pi[7] + (543821097/10^{10}) \cdot \pi[8] + (789484301/10^{10}) \cdot \pi[9] + (820127553/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1682536752/10^{10}) \cdot \pi[11] + (1279348568/10^{10}) \cdot \pi[12] + (3836824898/10^{10}) \cdot \pi[13] + x^7 - y^7 = 233/1000;$

$$\begin{aligned}
 \text{res7} := & \frac{1683801}{625000000} \pi_1 + \frac{290269}{100000000} \pi_2 + \frac{40794041}{10000000000} \pi_3 + \frac{32781911}{2500000000} \pi_4 + \frac{182159617}{10000000000} \pi_5 \\
 & + \frac{16379761}{625000000} \pi_6 + \frac{187865819}{5000000000} \pi_7 + \frac{543821097}{10000000000} \pi_8 + \frac{789484301}{10000000000} \pi_9 + \frac{820127553}{10000000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{105158547}{625000000} \pi_{11} + \frac{159918571}{1250000000} \pi_{12} + \frac{1918412449}{5000000000} \pi_{13} + x^7 - y^7 = \frac{233}{1000}
 \end{aligned}$$

> res8 :=
 $(54124624/10^{10}) \cdot \pi[1] + (52193987/10^{10}) \cdot \pi[2] + (67600380/10^{10}) \cdot \pi[3] + (215231212/10^{10}) \cdot \pi[4] + (274718100/10^{10}) \cdot \pi[5] + (365297527/10^{10}) \cdot \pi[6] + (486209141/10^{10}) \cdot \pi[7] + (655542721/10^{10}) \cdot \pi[8] + (886624183/10^{10}) \cdot \pi[9] + (880888957/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1644059218/10^{10}) \cdot \pi[11] + (1209589613/10^{10}) \cdot \pi[12] + (3207920334/10^{10}) \cdot \pi[13] + x^8 - y^8 = 267/1000;$

$$\begin{aligned}
 \text{res8} := & \frac{3382789}{625000000} \pi_1 + \frac{52193987}{10000000000} \pi_2 + \frac{3380019}{500000000} \pi_3 + \frac{53807803}{2500000000} \pi_4 + \frac{2747181}{1000000000} \pi_5 \\
 & + \frac{365297527}{10000000000} \pi_6 + \frac{486209141}{10000000000} \pi_7 + \frac{655542721}{10000000000} \pi_8 + \frac{886624183}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{880888957}{10000000000} \pi_{10} + \frac{822029609}{5000000000} \pi_{11} + \frac{1209589613}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1603960167}{5000000000} \pi_{13} + x^8 - y^8 = \frac{267}{1000}
 \end{aligned}$$

> res9 :=
 $(95595332/10^{10}) \cdot \pi[1] + (83551609/10^{10}) \cdot \pi[2] + (100664090/10^{10}) \cdot \pi[3] + (319767493/10^{10}) \cdot \pi[4] + (378718105/10^{10}) \cdot \pi[5] + (470646996/10^{10}) \cdot \pi[6] + (587197218/10^{10}) \cdot \pi[7] + (747294801/10^{10}) \cdot \pi[8] + (950289471/10^{10}) \cdot \pi[9] + (906637400/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1571036124/10^{10}) \cdot \pi[11] + (1120288434/10^{10}) \cdot \pi[12] + (2668312924/10^{10}) \cdot \pi[13] + x^9 - y^9 = 3/10;$

$$\begin{aligned}
 \text{res9} := & \frac{23898833}{2500000000} \pi_1 + \frac{83551609}{10000000000} \pi_2 + \frac{10066409}{1000000000} \pi_3 + \frac{319767493}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{75743621}{2000000000} \pi_5 + \frac{117661749}{2500000000} \pi_6 + \frac{293598609}{5000000000} \pi_7 + \frac{747294801}{10000000000} \pi_8 + \frac{950289471}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{4533187}{50000000} \pi_{10} + \frac{392759031}{2500000000} \pi_{11} + \frac{560144217}{5000000000} \pi_{12} + \frac{667078231}{2500000000} \pi_{13} + x^9 - y^9 = \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

> res10 :=
 $(155041171/10^{10}) \cdot \pi[1] + (123681228/10^{10}) \cdot \pi[2] + (139377193/10^{10}) \cdot \pi[3] + (444072281/10^{10}) \cdot \pi[4] + (490820530/10^{10}) \cdot \pi[5] + (573796694/10^{10}) \cdot \pi[6] + (675025032/10^{10}) \cdot \pi[7] + (817753557/10^{10}) \cdot \pi[8] + (983490982/10^{10}) \cdot \pi[9] + (903194621/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1473850834/10^{10}) \cdot \pi[11] + (1019202810/10^{10}) \cdot \pi[12] + (2200693064/10^{10}) \cdot \pi[13] + x$

$$10-y10 = 333/1000;$$

$$\begin{aligned} res10 := & \frac{155041171}{10000000000} \pi_1 + \frac{30920307}{2500000000} \pi_2 + \frac{139377193}{10000000000} \pi_3 + \frac{444072281}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{49082053}{1000000000} \pi_5 + \frac{286898347}{5000000000} \pi_6 + \frac{84378129}{1250000000} \pi_7 + \frac{817753557}{10000000000} \pi_8 + \frac{491745491}{5000000000} \pi_9 \\ & + \frac{903194621}{10000000000} \pi_{10} + \frac{736925417}{5000000000} \pi_{11} + \frac{101920281}{1000000000} \pi_{12} + \frac{275086633}{1250000000} \pi_{13} + x10 - y10 = \\ & \frac{333}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res11 := \\ & (237325167/10^{10}) * \pi[1] + (173323974/10^{10}) * \pi[2] + (183169703/10^{10}) * \pi[3] + (588028096/10^{10}) * \pi[4] + (608182318/10^{10}) * \pi[5] + (6712033 \\ & 96/10^{10}) * \pi[6] + (746942297/10^{10}) * \pi[7] + (866232493/10^{10}) * \pi[8] + \\ & (988759011/10^{10}) * \pi[9] + (874935878/10^{10}) * \pi[10] + (1359048013/10^{10}) * \pi[11] + (910936640/10^{10}) * \pi[12] + (1791913012/10^{10}) * \pi[13] + x1 \\ & 1 - y11 = 367/1000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res11 := & \frac{237325167}{10000000000} \pi_1 + \frac{86661987}{5000000000} \pi_2 + \frac{183169703}{10000000000} \pi_3 + \frac{9187939}{156250000} \pi_4 \\ & + \frac{304091159}{5000000000} \pi_5 + \frac{167800849}{2500000000} \pi_6 + \frac{746942297}{10000000000} \pi_7 + \frac{866232493}{10000000000} \pi_8 + \frac{988759011}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{437467939}{5000000000} \pi_{10} + \frac{1359048013}{10000000000} \pi_{11} + \frac{2846677}{31250000} \pi_{12} + \frac{447978253}{2500000000} \pi_{13} + x11 - y11 = \frac{367}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res12 := \\ & (338584264/10^{10}) * \pi[1] + (228011090/10^{10}) * \pi[2] + (227244227/10^{10}) * \pi[3] + (737552844/10^{10}) * \pi[4] + (717954972/10^{10}) * \pi[5] + (7524699 \\ & 95/10^{10}) * \pi[6] + (796591299/10^{10}) * \pi[7] + (890671865/10^{10}) * \pi[8] + \\ & (970524979/10^{10}) * \pi[9] + (829899011/10^{10}) * \pi[10] + (1241961396/10^{10}) * \pi[11] + (807843593/10^{10}) * \pi[12] + (1460690461/10^{10}) * \pi[13] + x1 \\ & 2 - y12 = 4/10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res12 := & \frac{42323033}{1250000000} \pi_1 + \frac{22801109}{1000000000} \pi_2 + \frac{227244227}{10000000000} \pi_3 + \frac{184388211}{2500000000} \pi_4 \\ & + \frac{179488743}{2500000000} \pi_5 + \frac{150493999}{2000000000} \pi_6 + \frac{796591299}{10000000000} \pi_7 + \frac{178134373}{2000000000} \pi_8 + \frac{970524979}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{829899011}{10000000000} \pi_{10} + \frac{310490349}{2500000000} \pi_{11} + \frac{807843593}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1460690461}{10000000000} \pi_{13} + x12 - y12 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res13 := \\ & (460706046/10^{10}) * \pi[1] + (287153864/10^{10}) * \pi[2] + (270721824/10^{10}) * \pi[3] + (891040149/10^{10}) * \pi[4] + (818879553/10^{10}) * \pi[5] + (8179472 \\ & 90/10^{10}) * \pi[6] + (826441849/10^{10}) * \pi[7] + (895376032/10^{10}) * \pi[8] + \\ & (934738557/10^{10}) * \pi[9] + (773558938/10^{10}) * \pi[10] + (1125743068/10^{10}) * \pi[11] + (710701553/10^{10}) * \pi[12] + (1186991281/10^{10}) * \pi[13] + x1 \\ & 3 - y13 = 433/1000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res13} := & \frac{230353023}{5000000000} \pi_1 + \frac{35894233}{1250000000} \pi_2 + \frac{8460057}{312500000} \pi_3 + \frac{891040149}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{818879553}{10000000000} \pi_5 + \frac{81794729}{10000000000} \pi_6 + \frac{826441849}{10000000000} \pi_7 + \frac{27980501}{312500000} \pi_8 + \frac{934738557}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{386779469}{5000000000} \pi_{10} + \frac{281435767}{2500000000} \pi_{11} + \frac{710701553}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1186991281}{10000000000} \pi_{13} + x13 - y13 = \end{aligned}$$

433

1000

> res14 :=

$$\begin{aligned} & (607054841/10^{10}) * \pi_1 + (350544378/10^{10}) * \pi_2 + (312948234/10^{10}) \\ & * \pi_3 + (1047844472/10^{10}) * \pi_4 + (910062832/10^{10}) * \pi_5 + (867887 \\ & 144/10^{10}) * \pi_6 + (838202019/10^{10}) * \pi_7 + (883255116/10^{10}) * \pi_8 \\ & + (885135604/10^{10}) * \pi_9 + (709146869/10^{10}) * \pi_{10} + (1011579715/10 \\ & ^{10}) * \pi_{11} + (619293640/10^{10}) * \pi_{12} + (957045133/10^{10}) * \pi_{13} + x14 - y14 = 467/1000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res14} := & \frac{607054841}{10000000000} \pi_1 + \frac{175272189}{5000000000} \pi_2 + \frac{156474117}{5000000000} \pi_3 + \frac{130980559}{1250000000} \pi_4 \\ & + \frac{56878927}{625000000} \pi_5 + \frac{108485893}{1250000000} \pi_6 + \frac{838202019}{10000000000} \pi_7 + \frac{220813779}{2500000000} \pi_8 + \frac{221283901}{2500000000} \pi_9 \\ & + \frac{709146869}{10000000000} \pi_{10} + \frac{202315943}{2000000000} \pi_{11} + \frac{15482341}{2500000000} \pi_{12} + \frac{957045133}{10000000000} \pi_{13} + x14 - y14 = \end{aligned}$$

467

1000

> res15 :=

$$\begin{aligned} & (766989599/10^{10}) * \pi_1 + (412389702/10^{10}) * \pi_2 + (349977767/10^{10}) \\ & * \pi_3 + (1194281534/10^{10}) * \pi_4 + (984109990/10^{10}) * \pi_5 + (899780 \\ & 647/10^{10}) * \pi_6 + (833813223/10^{10}) * \pi_7 + (858895091/10^{10}) * \pi_8 \\ & + (829483856/10^{10}) * \pi_9 + (644654426/10^{10}) * \pi_{10} + (908989133/10^{10}) \\ & * \pi_{11} + (540087640/10^{10}) * \pi_{12} + (776547395/10^{10}) * \pi_{13} + x15 - y15 = 5/10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res15} := & \frac{766989599}{10000000000} \pi_1 + \frac{206194851}{5000000000} \pi_2 + \frac{349977767}{10000000000} \pi_3 + \frac{597140767}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{98410999}{10000000000} \pi_5 + \frac{899780647}{10000000000} \pi_6 + \frac{833813223}{10000000000} \pi_7 + \frac{858895091}{10000000000} \pi_8 + \frac{51842741}{625000000} \pi_9 \\ & + \frac{322327213}{5000000000} \pi_{10} + \frac{908989133}{10000000000} \pi_{11} + \frac{13502191}{2500000000} \pi_{12} + \frac{155309479}{2000000000} \pi_{13} + x15 - y15 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

> res16 :=

$$\begin{aligned} & (942060479/10^{10}) * \pi_1 + (472752930/10^{10}) * \pi_2 + (382134914/10^{10}) \\ & * \pi_3 + (1331677206/10^{10}) * \pi_4 + (1043143053/10^{10}) * \pi_5 + (91673 \\ & 4310/10^{10}) * \pi_6 + (816874991/10^{10}) * \pi_7 + (825778270/10^{10}) * \pi_8 \\ & + (770349873/10^{10}) * \pi_9 + (581251996/10^{10}) * \pi_{10} + (815902690/10 \\ & ^{10}) * \pi_{11} + (470419491/10^{10}) * \pi_{12} + (630919796/10^{10}) * \pi_{13} + x16 - y16 = \end{aligned}$$

$$6-y16 = 533/1000;$$

$$\begin{aligned} res16 := & \frac{942060479}{10000000000} \pi_1 + \frac{47275293}{10000000000} \pi_2 + \frac{191067457}{5000000000} \pi_3 + \frac{665838603}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1043143053}{10000000000} \pi_5 + \frac{91673431}{10000000000} \pi_6 + \frac{816874991}{10000000000} \pi_7 + \frac{82577827}{10000000000} \pi_8 + \frac{770349873}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{145312999}{2500000000} \pi_{10} + \frac{81590269}{10000000000} \pi_{11} + \frac{470419491}{10000000000} \pi_{12} + \frac{157729949}{2500000000} \pi_{13} + x16 - y16 = \\ & \frac{533}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res17 := & (1135430957/10^{10}) * \pi[1] + (531863282/10^{10}) * \pi[2] + (409612503/10^{10}) * \pi[3] + (1461343195/10^{10}) * \pi[4] \\ & + (1088471374/10^{10}) * \pi[5] + (920630109/10^{10}) * \pi[6] + (789475674/10^{10}) * \pi[7] + (785847194/10^{10}) * \pi[8] \\ & + (708897985/10^{10}) * \pi[9] + (519198167/10^{10}) * \pi[10] + (730374609/10^{10}) * \pi[11] + (408168183/10^{10}) * \pi[12] \\ & + (510686767/10^{10}) * \pi[13] + x17 - y17 = 567/1000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res17 := & \frac{1135430957}{10000000000} \pi_1 + \frac{265931641}{5000000000} \pi_2 + \frac{409612503}{10000000000} \pi_3 + \frac{292268639}{2000000000} \pi_4 \\ & + \frac{544235687}{5000000000} \pi_5 + \frac{920630109}{10000000000} \pi_6 + \frac{394737837}{5000000000} \pi_7 + \frac{392923597}{5000000000} \pi_8 + \frac{141779597}{2000000000} \pi_9 \\ & + \frac{519198167}{10000000000} \pi_{10} + \frac{730374609}{10000000000} \pi_{11} + \frac{408168183}{10000000000} \pi_{12} + \frac{510686767}{10000000000} \pi_{13} + x17 - y17 = \\ & \frac{567}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res18 := & (1332964309/10^{10}) * \pi[1] + (585124044/10^{10}) * \pi[2] + (430632634/10^{10}) * \pi[3] + (1574238022/10^{10}) * \pi[4] \\ & + (1118332726/10^{10}) * \pi[5] + (913477819/10^{10}) * \pi[6] + (756063833/10^{10}) * \pi[7] + (744116694/10^{10}) * \pi[8] \\ & + (650891988/10^{10}) * \pi[9] + (463385229/10^{10}) * \pi[10] + (657188667/10^{10}) * \pi[11] + (356216469/10^{10}) * \pi[12] \\ & + (417367569/10^{10}) * \pi[13] + x18 - y18 = 6/10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res18 := & \frac{1332964309}{10000000000} \pi_1 + \frac{146281011}{2500000000} \pi_2 + \frac{215316317}{5000000000} \pi_3 + \frac{787119011}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{559166363}{5000000000} \pi_5 + \frac{913477819}{10000000000} \pi_6 + \frac{756063833}{10000000000} \pi_7 + \frac{372058347}{5000000000} \pi_8 + \frac{162722997}{2500000000} \pi_9 \\ & + \frac{463385229}{10000000000} \pi_{10} + \frac{657188667}{10000000000} \pi_{11} + \frac{356216469}{10000000000} \pi_{12} + \frac{417367569}{10000000000} \pi_{13} + x18 - y18 = \\ & \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res19 := & (1537626675/10^{10}) * \pi[1] + (633581949/10^{10}) * \pi[2] + (446219483/10^{10}) * \pi[3] \\ & + (1574238022/10^{10}) * \pi[4] + (1118332726/10^{10}) * \pi[5] + (913477819/10^{10}) * \pi[6] \\ & + (756063833/10^{10}) * \pi[7] + (744116694/10^{10}) * \pi[8] + (650891988/10^{10}) * \pi[9] \\ & + (463385229/10^{10}) * \pi[10] + (657188667/10^{10}) * \pi[11] + (356216469/10^{10}) * \pi[12] \\ & + (417367569/10^{10}) * \pi[13] + x19 - y19 = 6/10; \end{aligned}$$

$0) * \pi[3] + (1673757130/10^{10}) * \pi[4] + (1135596741/10^{10}) * \pi[5] + (897763213/10^{10}) * \pi[6] + (718342995/10^{10}) * \pi[7] + (701488112/10^{10}) * \pi[8] + (595884698/10^{10}) * \pi[9] + (412525398/10^{10}) * \pi[10] + (593033482/10^{10}) * \pi[11] + (311681391/10^{10}) * \pi[12] + (342498732/10^{10}) * \pi[13] + x19 - y19 = 633/1000;$

$$\begin{aligned}
 res19 := & \frac{61505067}{400000000} \pi_1 + \frac{633581949}{1000000000} \pi_2 + \frac{446219483}{1000000000} \pi_3 + \frac{167375713}{1000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{1135596741}{1000000000} \pi_5 + \frac{897763213}{1000000000} \pi_6 + \frac{143668599}{2000000000} \pi_7 + \frac{43843007}{625000000} \pi_8 + \frac{297942349}{5000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{206262699}{5000000000} \pi_{10} + \frac{296516741}{5000000000} \pi_{11} + \frac{311681391}{10000000000} \pi_{12} + \frac{85624683}{2500000000} \pi_{13} + x19 - y19 = \\
 & \frac{633}{1000}
 \end{aligned}$$

> res20 :=

$(1753513684/10^{10}) * \pi[1] + (678023818/10^{10}) * \pi[2] + (456950261/10^{10}) * \pi[3] + (1762300940/10^{10}) * \pi[4] + (1141829875/10^{10}) * \pi[5] + (874763716/10^{10}) * \pi[6] + (677026670/10^{10}) * \pi[7] + (658176036/10^{10}) * \pi[8] + (543185077/10^{10}) * \pi[9] + (365470148/10^{10}) * \pi[10] + (535476742/10^{10}) * \pi[11] + (272548384/10^{10}) * \pi[12] + (280734644/10^{10}) * \pi[13] + x20 - y20 = 667/1000;$

$$\begin{aligned}
 res20 := & \frac{438378421}{2500000000} \pi_1 + \frac{339011909}{5000000000} \pi_2 + \frac{456950261}{10000000000} \pi_3 + \frac{88115047}{500000000} \pi_4 + \frac{9134639}{80000000} \pi_5 \\
 & + \frac{218690929}{2500000000} \pi_6 + \frac{67702667}{1000000000} \pi_7 + \frac{164544009}{2500000000} \pi_8 + \frac{543185077}{10000000000} \pi_9 + \frac{91367537}{2500000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{267738371}{5000000000} \pi_{11} + \frac{8517137}{312500000} \pi_{12} + \frac{70183661}{2500000000} \pi_{13} + x20 - y20 = \frac{667}{1000}
 \end{aligned}$$

> obj := (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/1000) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11+y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000);

$$\begin{aligned}
 obj := & \frac{3}{1000} x15 + \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{1000} x17 + \frac{1}{1000} y17 + \frac{57}{1000} y8 + \frac{1}{1000} x16 + \frac{1}{1000} y16 \\
 & + \frac{1}{1000} x19 + \frac{1}{1000} y19 + \frac{1}{1000} x18 + \frac{1}{1000} y18 + \frac{1}{1000} x20 + \frac{1}{1000} y20 + \frac{43}{1000} y9 + \frac{43}{1000} x9 \\
 & + \frac{29}{1000} x10 + \frac{29}{1000} y10 + \frac{1}{10} y5 + \frac{1}{10} x5 + \frac{7}{500} x11 + \frac{43}{500} x6 + \frac{43}{500} y6 + \frac{7}{500} y11 + \frac{7}{1000} x12 \\
 & + \frac{7}{1000} y12 + \frac{9}{125} y7 + \frac{9}{125} x7 + \frac{3}{500} y13 + \frac{143}{1000} x1 + \frac{143}{1000} y1 + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{250} y14 + \frac{143}{1000} y3
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{143}{1000}x^3 + \frac{43}{250}y^2 + \frac{43}{250}x^2 + \frac{3}{500}x^{13} + \frac{57}{500}x^4 + \frac{57}{500}y^4 + \frac{57}{1000}x^8$$

```

> dese:=(x1-y1)*(143/1000)+(x2-y2)*(172/1000)+(x3-y3)*(143/1000)+(
x4-y4)*(114/1000)+(x5-y5)*(1/10)+(x6-y6)*(86/1000)+(x7-y7)*(72/1
000)+(x8-y8)*(57/1000)+(x9-y9)*(43/1000)+(x10-y10)*(29/1000)+(x1
1-y11)*(14/1000)+(x12-y12)*(7/1000)+(x13-y13)*(6/1000)+(x14-y14)
*(4/1000)+(x15-y15)*(3/1000)+(x16-y16)*(1/1000)+(x17-y17)*(1/100
0)+(x18-y18)*(1/1000)+(x19-y19)*(1/1000)+(x20-y20)*(1/1000);

dese:= $\frac{3}{1000}x^{15} - \frac{3}{1000}y^{15} + \frac{1}{1000}x^{17} - \frac{1}{1000}y^{17} - \frac{57}{1000}y^8 + \frac{1}{1000}x^{16} - \frac{1}{1000}y^{16}$ 
+  $\frac{1}{1000}x^{19} - \frac{1}{1000}y^{19} + \frac{1}{1000}x^{18} - \frac{1}{1000}y^{18} + \frac{1}{1000}x^{20} - \frac{1}{1000}y^{20} - \frac{43}{1000}y^9 + \frac{43}{1000}x^9$ 
+  $\frac{29}{1000}x^{10} - \frac{29}{1000}y^{10} - \frac{1}{10}y^5 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{7}{500}x^{11} + \frac{43}{500}x^6 - \frac{43}{500}y^6 - \frac{7}{500}y^{11} + \frac{7}{1000}x^{12}$ 
-  $\frac{7}{1000}y^{12} - \frac{9}{125}y^7 + \frac{9}{125}x^7 - \frac{3}{500}y^{13} + \frac{143}{1000}x^1 - \frac{143}{1000}y^1 + \frac{1}{250}x^{14} - \frac{1}{250}y^{14} - \frac{143}{1000}y^3$ 
+  $\frac{143}{1000}x^3 - \frac{43}{250}y^2 + \frac{43}{250}x^2 + \frac{3}{500}x^{13} + \frac{57}{500}x^4 - \frac{57}{500}y^4 + \frac{57}{1000}x^8$ 

> ec1:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res1));

ec1:=.1250084488+x1-1.y1=.03300000000

> y1:=.1250084488-.3300000000e-1;

y1:=.09200844880

> ec2:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res2));

ec2:=.1295880871+x2-1.y2=.06700000000

> y2:=.1295880871-.6700000000e-1;

y2:=.06258808710

> ec3:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res3));

ec3:=.1349687811+x3-1.y3=.1000000000

> y3:=.1349687811-.1000000000;

y3:=.0349687811

> ec4:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res4));

ec4:=.1414459145+x4-1.y4=.1330000000

> y4:=.1414459145-.1330000000;

y4:=.0084459145

```

```

> ec5:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res5));
      ec5 := .1493712319 + x5 - 1.y5 = .1670000000
> x5:=.1670000000-.1493712319;
      x5 := .0176287681
> ec6:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res6));
      ec6 := .1582708359 + x6 - 1.y6 = .2000000000
> x6:=.2000000000-.1582708359;
      x6 := .0417291641
> ec7:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res7));
      ec7 := .1682388338 + x7 - 1.y7 = .2330000000
> x7:=.2330000000-.1682388338;
      x7 := .0647611662
> ec8:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res8));
      ec8 := .1794020016 + x8 - 1.y8 = .2670000000
> x8:=.2670000000-.1794020016;
      x8 := .0875979984
> ec9:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.336
,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi[
10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res9));
      ec9 := .1908276185 + x9 - 1.y9 = .3000000000
> x9:=.3000000000-.1908276185;
      x9 := .1091723815
> ec10:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res10));
      ec10 := .2025439830 + x10 - 1.y10 = .3330000000
> x10:=.3330000000-.2025439830;
      x10 := .1304560170
> ec11:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res11));
      ec11 := .2146292665 + x11 - 1.y11 = .3670000000
> x11:=.3670000000-.2146292665;
      x11 := .1523707335
> ec12:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33

```



```

6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res12));
      ec12 := .2261281838 + x12 - 1.y12 = .4000000000
> x12 := .4000000000 - .2261281838;
      x12 := .1738718162
> ec13:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res13));
      ec13 := .2372081466 + x13 - 1.y13 = .4330000000
> x13 := .4330000000 - .2372081466;
      x13 := .1957918534
> ec14:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res14));
      ec14 := .2480410771 + x14 - 1.y14 = .4670000000
> x14 := .4670000000 - .2480410771;
      x14 := .2189589229
> ec15:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res15));
      ec15 := .2579000563 + x15 - 1.y15 = .5000000000
> x15 := .5000000000 - .2579000563;
      x15 := .2420999437
> ec16:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res16));
      ec16 := .2670681971 + x16 - 1.y16 = .5330000000
> x16 := .5330000000 - .2670681971;
      x16 := .2659318029
> ec17:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res17));
      ec17 := .2757805254 + x17 - 1.y17 = .5670000000
> x17 := .5670000000 - .2757805254;
      x17 := .2912194746
> ec18:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res18));
      ec18 := .2835398003 + x18 - 1.y18 = .6000000000
> x18 := .6000000000 - .2835398003;
      x18 := .3164601997
> ec19:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi

```

```

[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res19));
      ec19 := .2906453291 + x19 - 1.y19 = .6330000000
> x19 := .6330000000 - .2906453291;
      x19 := .3423546709
> ec20:=evalf(subs({pi[1]=0.399,pi[2]=0.359,pi[3]=0.333,pi[4]=0.33
6,pi[5]=0.309,pi[6]=0.285,pi[7]=0.264,pi[8]=0.240,pi[9]=0.219,pi
[10]=0.177,pi[11]=0.165,pi[12]=0.155,pi[13]=0.117},res20));
      ec20 := .2973280807 + x20 - 1.y20 = .6670000000
> x20 := .6670000000 - .2973280807;
      x20 := .3696719193
> 'objB'=subs({x1=0,y1 = .9200844880e-1,x2=0,y2 =
.6258808710e-1,x3=0,y3 = .349687811e-1,x4=0,y4 = .84459145e-2,x5
= .176287681e-1,y5=0,x6 = .417291641e-1,y6=0,x7 =
.647611662e-1,y7=0,x8 = .875979984e-1,y8=0,x9 =
.1091723815,y9=0,x10 = .1304560170,y10=0,x11 =
.1523707335,y11=0,x12 = .1738718162,y12=0,x13 =
.1957918534,y13=0,x14 = .2189589229,y14=0,x15 =
.2420999437,y15=0,x16 = .2659318029,y16=0,x17 =
.2912194746,y17=0,x18 = .3164601997,y18=0,x19 =
.3423546709,y19=0,x20 = .3696719193,y20=0},obj);
      objB = .06108365850
>
>

```

fun-obj-Borgam-asint

```
> restart;
```

```
> with(simplex);
```

Warning, new definition for maximize

Warning, new definition for minimize

[basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot,

pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize]

```
> r1:=.1169072878e-7*pi[1]+.3126149941e-7*pi[2]+.2074599740e-6*pi[3]+.7421173438e-6*pi[4]+.4671320067e-5*pi[5]+.1205063178e-4*pi[6]+.8845618583e-4*pi[7]+.1865341620e-3*pi[8]+.1703009854e-2*pi[9]+.2645882192e-2*pi[10]+.3231076730e-1*pi[11]+.3126191325e-1*pi[12]+.9317857227*pi[13]+x1-y1 = .33e-1;
```

$$r1 := .1169072878 \cdot 10^{-7} \pi_1 + .3126149941 \cdot 10^{-7} \pi_2 + .2074599740 \cdot 10^{-6} \pi_3 + .7421173438 \cdot 10^{-6} \pi_4 + .4671320067 \cdot 10^{-5} \pi_5 + .00001205063178 \pi_6 + .00008845618583 \pi_7 + .0001865341620 \pi_8 + .001703009854 \pi_9 + .002645882192 \pi_{10} + .03231076730 \pi_{11} + .03126191325 \pi_{12} + .9317857227 \pi_{13} + x1 - y1 = .033$$

```
> r2:=.1071640373e-5*pi[1]+.2274761398e-5*pi[2]+.8181294539e-5*pi[3]+.2788609455e-4*pi[4]+.9658806872e-4*pi[5]+.2123977470e-3*pi[6]+.8249332000e-3*pi[7]+.1552702892e-2*pi[8]+.7227946805e-2*pi[9]+.1047934934e-1*pi[10]+.6348062024e-1*pi[11]+.5936677152e-1*pi[12]+.8567192761*pi[13]+x2-y2 = .67e-1;
```

$$r2 := .1071640373 \cdot 10^{-5} \pi_1 + .2274761398 \cdot 10^{-5} \pi_2 + .8181294539 \cdot 10^{-5} \pi_3 + .00002788609455 \pi_4 + .00009658806872 \pi_5 + .0002123977470 \pi_6 + .0008249332000 \pi_7 + .001552702892 \pi_8 + .007227946805 \pi_9 + .01047934934 \pi_{10} + .06348062024 \pi_{11} + .05936677152 \pi_{12} + .8567192761 \pi_{13} + x2 - y2 = .067$$

```
> r3:=.1459249314e-4*pi[1]+.2575869361e-4*pi[2]+.6701462035e-4*pi[3]+.2213164528e-3*pi[4]+.5601107540e-3*pi[5]+.1078338843e-2*pi[6]+.2978324750e-2*pi[7]+.5071424516e-2*pi[8]+.1630641217e-1*pi[9]+.2216809710e-1*pi[10]+.9054801594e-1*pi[11]+.8193123208e-1*pi[12]+.7790293614*pi[13]+x3-y3 = .1;
```

$$r3 := .00001459249314 \pi_1 + .00002575869361 \pi_2 + .00006701462035 \pi_3 + .0002213164528 \pi_4 + .0005601107540 \pi_5 + .001078338843 \pi_6 + .002978324750 \pi_7 + .005071424516 \pi_8 + .01630641217 \pi_9 + .02216809710 \pi_{10} + .09054801594 \pi_{11} + .08193123208 \pi_{12} + .7790293614 \pi_{13} + x3 - y3 = .1$$

```
> r4:=.9539342003e-4*pi[1]+.1436987271e-3*pi[2]+.2997821057e-3*pi[3]+.9703595253e-3*pi[4]+.1983226109e-2*pi[5]+.3397204101e-2*pi[6]+.7428065682e-2*pi[7]+.1153630984e-1*pi[8]+.2867172387e-1*pi[9]+.3663843766e-1*pi[10]+.1131817826*pi[11]+.9908669957e-1*pi[12]+.6965673165*pi[13]+x4-y4 = .133;
```

```

r4 := .00009539342003  $\pi_1$  + .0001436987271  $\pi_2$  + .0002997821057  $\pi_3$  + .0009703595253  $\pi_4$ 
      + .001983226109  $\pi_5$  + .003397204101  $\pi_6$  + .007428065682  $\pi_7$  + .01153630984  $\pi_8$ 
      + .02867172387  $\pi_9$  + .03663843766  $\pi_{10}$  + .1131817826  $\pi_{11}$  + .09908669957  $\pi_{12}$ 
      + .6965673165  $\pi_{13}$  + x4 - y4 = .133
-
> r5 := .4259152410e-3*pi[1] + .5557137586e-3*pi[2] + .9766461269e-3*pi[3]
      + .3125991839e-2*pi[4] + .5410389076e-2*pi[5] + .8324717506e-2*pi[6]
      + .1518069966e-1*pi[7] + .2159693150e-1*pi[8] + .4386578615e-1*pi[9]
      + .5271207479e-1*pi[10] + .1303958369*pi[11] + .1103409060*pi[12] + .6070883914*pi[13]
      + x5 - y5 = .167;
r5 := .0004259152410  $\pi_1$  + .0005557137586  $\pi_2$  + .0009766461269  $\pi_3$  + .003125991839  $\pi_4$ 
      + .005410389076  $\pi_5$  + .008324717506  $\pi_6$  + .01518069966  $\pi_7$  + .02159693150  $\pi_8$ 
      + .04386578615  $\pi_9$  + .05271207479  $\pi_{10}$  + .1303958369  $\pi_{11}$  + .1103409060  $\pi_{12}$ 
      + .6070883914  $\pi_{13}$  + x5 - y5 = .167
-
> r6 := .1369755763e-2*pi[1] + .1577037641e-2*pi[2] + .2424558527e-2*pi[3]
      + .7733006444e-2*pi[4] + .1175159293e-1*pi[5] + .1645706409e-1*pi[6]
      + .2605651427e-1*pi[7] + .3424316883e-1*pi[8] + .5940753201e-1*pi[9]
      + .6738970921e-1*pi[10] + .1398655489*pi[11] + .1145122259*pi[12] + .5172122857*pi[13]
      + x6 - y6 = .2;
r6 := .001369755763  $\pi_1$  + .001577037641  $\pi_2$  + .002424558527  $\pi_3$  + .007733006444  $\pi_4$ 
      + .01175159293  $\pi_5$  + .01645706409  $\pi_6$  + .02605651427  $\pi_7$  + .03424316883  $\pi_8$ 
      + .05940753201  $\pi_9$  + .06738970921  $\pi_{10}$  + .1398655489  $\pi_{11}$  + .1145122259  $\pi_{12}$ 
      + .5172122857  $\pi_{13}$  + x6 - y6 = .2
-
> r7 := .3580304552e-2*pi[1] + .3677652820e-2*pi[2] + .5051753289e-2*pi[3]
      + .1615093651e-1*pi[4] + .2198957156e-1*pi[5] + .2825233157e-1*pi[6]
      + .3973290457e-1*pi[7] + .4847196179e-1*pi[8] + .7367843964e-1*pi[9]
      + .7904055237e-1*pi[10] + .1414132199*pi[11] + .1120209867*pi[12] + .4269393847*pi[13]
      + x7 - y7 = .233;
r7 := .003580304552  $\pi_1$  + .003677652820  $\pi_2$  + .005051753289  $\pi_3$  + .01615093651  $\pi_4$ 
      + .02198957156  $\pi_5$  + .02825233157  $\pi_6$  + .03973290457  $\pi_7$  + .04847196179  $\pi_8$ 
      + .07367843964  $\pi_9$  + .07904055237  $\pi_{10}$  + .1414132199  $\pi_{11}$  + .1120209867  $\pi_{12}$ 
      + .4269393847  $\pi_{13}$  + x7 - y7 = .233
-
> r8 := .8108537910e-2*pi[1] + .7473571793e-2*pi[2] + .9283604628e-2*pi[3]
      + .2990750987e-1*pi[4] + .3690049727e-1*pi[5] + .4368197230e-1*pi[6]
      + .5529096411e-1*pi[7] + .6274998046e-1*pi[8] + .8483558627e-1*pi[9]
      + .8607238745e-1*pi[10] + .1349009323*pi[11] + .1032900111*pi[12] + .3375044448*pi[13]
      + x8 - y8 = .267;
r8 := .008108537910  $\pi_1$  + .007473571793  $\pi_2$  + .009283604628  $\pi_3$  + .02990750987  $\pi_4$ 
      + .03690049727  $\pi_5$  + .04368197230  $\pi_6$  + .05529096411  $\pi_7$  + .06274998046  $\pi_8$ 
      + .08483558627  $\pi_9$  + .08607238745  $\pi_{10}$  + .1349009323  $\pi_{11}$  + .1032900111  $\pi_{12}$ 

```

```

+ .3375044448  $\pi_{13}$  + x8 - y8 = .267
> r9 := .1560749558e-1*pi[1] + .1304305339e-1*pi[2] + .1485756993e-1*pi[3] + .4842275228e-1*pi[4] + .5487206542e-1*pi[5] + .6032776168e-1*pi[6] + .6976998696e-1*pi[7] + .7409449922e-1*pi[8] + .9064615775e-1*pi[9] + .8725551762e-1*pi[10] + .1221013507*pi[11] + .9045490452e-1*pi[12] + .2585468847*pi[13] + x9 - y9 = .3;
r9 := .01560749558  $\pi_1$  + .01304305339  $\pi_2$  + .01485756993  $\pi_3$  + .04842275228  $\pi_4$  + .05487206542  $\pi_5$  + .06032776168  $\pi_6$  + .06976998696  $\pi_7$  + .07409449922  $\pi_8$  + .09064615775  $\pi_9$  + .08725551762  $\pi_{10}$  + .1221013507  $\pi_{11}$  + .09045490452  $\pi_{12}$  + .2585468847  $\pi_{13}$  + x9 - y9 = .3
> r10 := .2678822532e-1*pi[1] + .2041755755e-1*pi[2] + .2150431253e-1*pi[3] + .7115382574e-1*pi[4] + .7463867407e-1*pi[5] + .7656605175e-1*pi[6] + .8163577109e-1*pi[7] + .8138579716e-1*pi[8] + .9104336011e-1*pi[9] + .8326337778e-1*pi[10] + .1052490586*pi[11] + .7543938798e-1*pi[12] + .1909146002*pi[13] + x10 - y10 = .333;
r10 := .02678822532  $\pi_1$  + .02041755755  $\pi_2$  + .02150431253  $\pi_3$  + .07115382574  $\pi_4$  + .07463867407  $\pi_5$  + .07656605175  $\pi_6$  + .08163577109  $\pi_7$  + .08138579716  $\pi_8$  + .09104336011  $\pi_9$  + .08326337778  $\pi_{10}$  + .1052490586  $\pi_{11}$  + .07543938798  $\pi_{12}$  + .1909146002  $\pi_{13}$  + x10 - y10 = .333
> r11 := .4228583645e-1*pi[1] + .2946391306e-1*pi[2] + .2881733836e-1*pi[3] + .9715756666e-1*pi[4] + .9472961137e-1*pi[5] + .9085448362e-1*pi[6] + .8974188913e-1*pi[7] + .8407469068e-1*pi[8] + .8650995393e-1*pi[9] + .7515218007e-1*pi[10] + .8638577912e-1*pi[11] + .5984890057e-1*pi[12] + .1349778568*pi[13] + x11 - y11 = .367;
r11 := .04228583645  $\pi_1$  + .02946391306  $\pi_2$  + .02881733836  $\pi_3$  + .09715756666  $\pi_4$  + .09472961137  $\pi_5$  + .09085448362  $\pi_6$  + .08974188913  $\pi_7$  + .08407469068  $\pi_8$  + .08650995393  $\pi_9$  + .07515218007  $\pi_{10}$  + .08638577912  $\pi_{11}$  + .05984890057  $\pi_{12}$  + .1349778568  $\pi_{13}$  + x11 - y11 = .367
> r12 := .6080668643e-1*pi[1] + .3899974135e-1*pi[2] + .3568441297e-1*pi[3] + .1228499692*pi[4] + .1121338704*pi[5] + .1010980340*pi[6] + .9324770304e-1*pi[7] + .8245303924e-1*pi[8] + .7875850516e-1*pi[9] + .6516575473e-1*pi[10] + .6883792720e-1*pi[11] + .4614344286e-1*pi[12] + .9382091338e-1*pi[13] + x12 - y12 = .4;
r12 := .06080668643  $\pi_1$  + .03899974135  $\pi_2$  + .03568441297  $\pi_3$  + .1228499692  $\pi_4$  + .1121338704  $\pi_5$  + .1010980340  $\pi_6$  + .09324770304  $\pi_7$  + .08245303924  $\pi_8$  + .07875850516  $\pi_9$  + .06516575473  $\pi_{10}$  + .06883792720  $\pi_{11}$  + .04614344286  $\pi_{12}$  + .09382091338  $\pi_{13}$  + x12 - y12 = .4
> r13 := .8206290693e-1*pi[1] + .4861985578e-1*pi[2] + .4179290929e-1*pi[3] + .1472572113*pi[4] + .1263403150*pi[5] + .1073920124*pi[6] + .9291558262e-1*pi[7] + .7771798097e-1*pi[8] + .6928734423e-1*pi[9] + .546632

```

```

0922e-1*pi[10]+.5340146946e-1*pi[11]+.3463408327e-1*pi[12]+.6391
511951e-1*pi[13]+x13-y13 = .433;
r13 := .08206290693 pi_1 + .04861985578 pi_2 + .04179290929 pi_3 + .1472572113 pi_4
+ .1263403150 pi_5 + .1073920124 pi_6 + .09291558262 pi_7 + .07771798097 pi_8
+ .06928734423 pi_9 + .05466320922 pi_10 + .05340146946 pi_11 + .03463408327 pi_12
+ .06391511951 pi_13 + x13 - y13 = .433
> r14 := .1060067090*pi[1]+.5806313242e-1*pi[2]+.4696940056e-1*pi[3]
+.1698628580*pi[4]+.1372062519*pi[5]+.1100576121*pi[6]+.89499653
66e-1*pi[7]+.7084184224e-1*pi[8]+.5910088420e-1*pi[9]+.444411181
1e-1*pi[10]+.4027849508e-1*pi[11]+.2524978660e-1*pi[12]+.4242225
628e-1*pi[13]+x14-y14 = .467;
r14 := .1060067090 pi_1 + .05806313242 pi_2 + .04696940056 pi_3 + .1698628580 pi_4
+ .1372062519 pi_5 + .1100576121 pi_6 + .08949965366 pi_7 + .07084184224 pi_8
+ .05910088420 pi_9 + .04444111811 pi_10 + .04027849508 pi_11 + .02524978660 pi_12
+ .04242225628 pi_13 + x14 - y14 = .467
> r15 := .1305087280*pi[1]+.6641670211e-1*pi[2]+.5080156554e-1*pi[3]
+.1887715601*pi[4]+.1442235180*pi[5]+.1096056863*pi[6]+.84196748
84e-1*pi[7]+.6328335258e-1*pi[8]+.4969022271e-1*pi[9]+.356973464
0e-1*pi[10]+.3022024310e-1*pi[11]+.1832950399e-1*pi[12]+.2825482
179e-1*pi[13]+x15-y15 = .5;
r15 := .1305087280 pi_1 + .06641670211 pi_2 + .05080156554 pi_3 + .1887715601 pi_4
+ .1442235180 pi_5 + .1096056863 pi_6 + .08419674884 pi_7 + .06328335258 pi_8
+ .04969022271 pi_9 + .03569734640 pi_10 + .03022024310 pi_11 + .01832950399 pi_12
+ .02825482179 pi_13 + x15 - y15 = .5
> r16 := .1556855321*pi[1]+.7378351419e-1*pi[2]+.5349566429e-1*pi[3]
+.2045776811*pi[4]+.1481922592*pi[5]+.1069145598*pi[6]+.77788238
84e-1*pi[7]+.5560700524e-1*pi[8]+.4122591717e-1*pi[9]+.283194398
9e-1*pi[10]+.2248001535e-1*pi[11]+.1319221231e-1*pi[12]+.1873796
068e-1*pi[13]+x16-y16 = .533;
r16 := .1556855321 pi_1 + .07378351419 pi_2 + .05349566429 pi_3 + .2045776811 pi_4
+ .1481922592 pi_5 + .1069145598 pi_6 + .07778823884 pi_7 + .05560700524 pi_8
+ .04122591717 pi_9 + .02831943989 pi_10 + .02248001535 pi_11 + .01319221231 pi_12
+ .01873796068 pi_13 + x16 - y16 = .533
> r17 := .1818916106*pi[1]+.8027481448e-1*pi[2]+.5520239391e-1*pi[3]
+.2177802883*pi[4]+.1496552907*pi[5]+.1025258841*pi[6]+.70703681
58e-1*pi[7]+.4807014821e-1*pi[8]+.3368635113e-1*pi[9]+.221152911
5e-1*pi[10]+.1648625402e-1*pi[11]+.9351407971e-2*pi[12]+.1225658
376e-1*pi[13]+x17-y17 = .567;
r17 := .1818916106 pi_1 + .08027481448 pi_2 + .05520239391 pi_3 + .2177802883 pi_4
+ .1496552907 pi_5 + .1025258841 pi_6 + .07070368158 pi_7 + .04807014821 pi_8

```

```

+ .03368635113  $\pi_9$  + .02211529115  $\pi_{10}$  + .01648625402  $\pi_{11}$  + .009351407971  $\pi_{12}$ 
+ .01225658376  $\pi_{13}$  + x17 - y17 = .567
> r18 := .2072848196*pi[1] + .8552354856e-1*pi[2] + .5597183945e-1*pi[3]
+ .2278952667*pi[4] + .1490664231*pi[5] + .9727542845e-1*pi[6] + .63810
19469e-1*pi[7] + .4137692184e-1*pi[8] + .2751846221e-1*pi[9] + .173019
3132e-1*pi[10] + .1217087998e-1*pi[11] + .6679520904e-2*pi[12] + .8124
763206e-2*pi[13] + x18 - y18 = .6;
r18 := .2072848196  $\pi_1$  + .08552354856  $\pi_2$  + .05597183945  $\pi_3$  + .2278952667  $\pi_4$ 
+ .1490664231  $\pi_5$  + .09727542845  $\pi_6$  + .06381019469  $\pi_7$  + .04137692184  $\pi_8$ 
+ .02751846221  $\pi_9$  + .01730193132  $\pi_{10}$  + .01217087998  $\pi_{11}$  + .006679520904  $\pi_{12}$ 
+ .008124763206  $\pi_{13}$  + x18 - y18 = .6
> r19 := .2324339980*pi[1] + .8979536108e-1*pi[2] + .5601946282e-1*pi[3]
+ .2356843596*pi[4] + .1469697588*pi[5] + .9148307148e-1*pi[6] + .57179
96919e-1*pi[7] + .3540471743e-1*pi[8] + .2239202367e-1*pi[9] + .134926
3015e-1*pi[10] + .8978908045e-2*pi[11] + .4767768318e-2*pi[12] + .5397
971085e-2*pi[13] + x19 - y19 = .633;
r19 := .2324339980  $\pi_1$  + .08979536108  $\pi_2$  + .05601946282  $\pi_3$  + .2356843596  $\pi_4$ 
+ .1469697588  $\pi_5$  + .09148307148  $\pi_6$  + .05717996919  $\pi_7$  + .03540471743  $\pi_8$ 
+ .02239202367  $\pi_9$  + .01349263015  $\pi_{10}$  + .008978908045  $\pi_{11}$  + .004767768318  $\pi_{12}$ 
+ .005397971085  $\pi_{13}$  + x19 - y19 = .633
> r20 := .2579481395*pi[1] + .9325933924e-1*pi[2] + .5546095846e-1*pi[3]
+ .2416207567*pi[4] + .1436424963*pi[5] + .8527717255e-1*pi[6] + .50791
50138e-1*pi[7] + .3002192071e-1*pi[8] + .1806241763e-1*pi[9] + .104242
6651e-1*pi[10] + .6566812816e-2*pi[11] + .3370390710e-2*pi[12] + .3553
826963e-2*pi[13] + x20 - y20 = .667;
r20 := .2579481395  $\pi_1$  + .09325933924  $\pi_2$  + .05546095846  $\pi_3$  + .2416207567  $\pi_4$ 
+ .1436424963  $\pi_5$  + .08527717255  $\pi_6$  + .05079150138  $\pi_7$  + .03002192071  $\pi_8$ 
+ .01806241763  $\pi_9$  + .01042426651  $\pi_{10}$  + .006566812816  $\pi_{11}$  + .003370390710  $\pi_{12}$ 
+ .003553826963  $\pi_{13}$  + x20 - y20 = .667
> obj := (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x
4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/10
00) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11
+y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) *
(4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000
) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000) ;
obj :=  $\frac{1}{250}x14 + \frac{1}{250}y14 + \frac{3}{1000}x15 + \frac{3}{1000}y15 + \frac{1}{1000}x16 + \frac{1}{1000}y16 + \frac{1}{1000}x17$ 
+  $\frac{1}{1000}y17 + \frac{143}{1000}x1 + \frac{143}{1000}y1 + \frac{43}{250}x2 + \frac{43}{250}y2 + \frac{143}{1000}x3 + \frac{143}{1000}y3 + \frac{57}{500}x4 + \frac{57}{500}y4$ 

```

```

+ 1/10 x5 + 1/10 y5 + 43/500 x6 + 43/500 y6 + 9/125 x7 + 9/125 y7 + 57/1000 x8 + 57/1000 y8 + 43/1000 x9
+ 43/1000 y9 + 29/1000 x10 + 29/1000 y10 + 7/500 x11 + 7/500 y11 + 7/1000 x12 + 7/1000 y12 + 3/500 x13
+ 3/500 y13 + 1/1000 x18 + 1/1000 y18 + 1/1000 x19 + 1/1000 y19 + 1/1000 x20 + 1/1000 y20
-
> dese := (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (
x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1
000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x1
1-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14)
* (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/100
0) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000) ;

dese := 1/250 x14 - 1/250 y14 + 3/1000 x15 - 3/1000 y15 + 1/1000 x16 - 1/1000 y16 + 1/1000 x17
- 1/1000 y17 + 143/1000 x1 - 143/1000 y1 + 43/250 x2 - 43/250 y2 + 143/1000 x3 - 143/1000 y3 + 57/500 x4 - 57/500 y4
+ 1/10 x5 - 1/10 y5 + 43/500 x6 - 43/500 y6 + 9/125 x7 - 9/125 y7 + 57/1000 x8 - 57/1000 y8 + 43/1000 x9
- 43/1000 y9 + 29/1000 x10 - 29/1000 y10 + 7/500 x11 - 7/500 y11 + 7/1000 x12 - 7/1000 y12 + 3/500 x13
- 3/500 y13 + 1/1000 x18 - 1/1000 y18 + 1/1000 x19 - 1/1000 y19 + 1/1000 x20 - 1/1000 y20
-
> r21:=pi1>=pi2;
r21 := pi2 ≤ pi1
-
> r22:=pi2>=pi3;
r22 := pi3 ≤ pi2
-
> r23:=pi3>=pi4;
r23 := pi4 ≤ pi3
-
> r24:=pi4>=pi5;
r24 := pi5 ≤ pi4
-
> r25:=pi5>=pi6;
r25 := pi6 ≤ pi5
-
> r26:=pi6>=pi7;
r26 := pi7 ≤ pi6
-
> r27:=pi7>=pi8;
r27 := pi8 ≤ pi7
-
> r28:=pi8>=pi9;
r28 := pi9 ≤ pi8
-
> r29:=pi9>=pi10;
r29 := pi10 ≤ pi9
-
> r30:=pi10>=pi11;

```



```

r30 := pi11 ≤ pi10
> r31:=pi11>=pi12;
r31 := pi12 ≤ pi11
> r32:=pi12>=pi13;
r32 := pi13 ≤ pi12
>
> r33:=(x1-y1)*(143/1000)+(x2-y2)*(172/1000)+(x3-y3)*(143/1000)+(x
4-y4)*(114/1000)+(x5-y5)*(1/10)+(x6-y6)*(86/1000)+(x7-y7)*(72/10
00)+(x8-y8)*(57/1000)+(x9-y9)*(43/1000)+(x10-y10)*(29/1000)+(x11
-y11)*(14/1000)+(x12-y12)*(7/1000)+(x13-y13)*(6/1000)+(x14-y14)*
(4/1000)+(x15-y15)*(3/1000)+(x16-y16)*(1/1000)+(x17-y17)*(1/1000
)+(x18-y18)*(1/1000)+(x19-y19)*(1/1000)+(x20-y20)*(1/1000)=0;
r33 :=  $\frac{1}{250}x14 - \frac{1}{250}y14 + \frac{3}{1000}x15 - \frac{3}{1000}y15 + \frac{1}{1000}x16 - \frac{1}{1000}y16 + \frac{1}{1000}x17$ 
 $- \frac{1}{1000}y17 + \frac{143}{1000}x1 - \frac{143}{1000}y1 + \frac{43}{250}x2 - \frac{43}{250}y2 + \frac{143}{1000}x3 - \frac{143}{1000}y3 + \frac{57}{500}x4 - \frac{57}{500}y4$ 
 $+ \frac{1}{10}x5 - \frac{1}{10}y5 + \frac{43}{500}x6 - \frac{43}{500}y6 + \frac{9}{125}x7 - \frac{9}{125}y7 + \frac{57}{1000}x8 - \frac{57}{1000}y8 + \frac{43}{1000}x9$ 
 $- \frac{43}{1000}y9 + \frac{29}{1000}x10 - \frac{29}{1000}y10 + \frac{7}{500}x11 - \frac{7}{500}y11 + \frac{7}{1000}x12 - \frac{7}{1000}y12 + \frac{3}{500}x13$ 
 $- \frac{3}{500}y13 + \frac{1}{1000}x18 - \frac{1}{1000}y18 + \frac{1}{1000}x19 - \frac{1}{1000}y19 + \frac{1}{1000}x20 - \frac{1}{1000}y20 = 0$ 
>

```

A partir de aquí sustituimos para calcular el valor de las variables de holgura para las primas de Borgam Hoem y Norberg

```

> ec1:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r1);
ec1 := .1180381722 + x1 - y1 = .033
> y1:=.1180381722-0.033;
y1 := .0850381722
> ec2:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r2);
ec2 := .1231428213 + x2 - y2 = .067
> y2:=.1231428213-0.067;
y2 := .0561428213

```

```

> ec3:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r3);
          ec3 := .1293152721 + x3 - y3 = .1
> y3:=.1293152721-0.1;
          y3 := .0293152721
> ec4:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r4);
          ec4 := .1370856282 + x4 - y4 = .133
> y4:=.1370856282-0.133;
          y4 := .0040856282
> ec5:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r5);
          ec5 := .1472555468 + x5 - y5 = .167
> x5:=0.167-.1472555468;
          x5 := .0197444532
> ec6:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r6);
          ec6 := .1596719740 + x6 - y6 = .2
> x6:=0.2-.1596719740;
          x6 := .0403280260
> ec7:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r7);
          ec7 := .1748111824 + x7 - y7 = .233
> x7:=0.233-.1748111824;
          x7 := .0581888176
> ec8:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r8);
          ec8 := .1930180010 + x8 - y8 = .267
> x8:=0.267-.1930180010;
          x8 := .0739819990
> ec9:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r9);
          ec9 := .2124404720 + x9 - y9 = .3
> x9:=0.3-.2124404720;
          x9 := .0875595280

```

```

> ec10:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r10);
          ec10 := .2324163459 + x10 - y10 = .333
> x10:=0.333-.2324163459;
          x10 := .1005836541
> ec11:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r11);
          ec11 := .2522855242 + x11 - y11 = .367
> x11:=0.367-.2522855242;
          x11 := .1147144758
> ec12:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r12);
          ec12 := .2699090930 + x12 - y12 = .4
> x12:=0.4-.2699090930;
          x12 := .1300909070
> ec13:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r13);
          ec13 := .2853801156 + x13 - y13 = .433
> x13:=0.433-.2853801156;
          x13 := .1476198844
> ec14:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r14);
          ec14 := .2989541344 + x14 - y14 = .467
> x14:=0.467-.2989541344;
          x14 := .1680458656
> ec15:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r15);
          ec15 := .3099921223 + x15 - y15 = .5
> x15:=0.5-.3099921223;
          x15 := .1900078777
> ec16:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r16);
          ec16 := .3192091472 + x16 - y16 = .533
> x16:=0.533-.3192091472;
          x16 := .2137908528
> ec17:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]

```

```

]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r17);
      ec17 := .3271283064 + x17 - y17 = .567
> x17:=0.567-.3271283064;
      x17 := .2398716936
> ec18:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r18);
      ec18 := .3335775709 + x18 - y18 = .6
> x18:=0.6-.3335775709;
      x18 := .2664224291
> ec19:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r19);
      ec19 := .3390536880 + x19 - y19 = .633
> x19:=0.633-.3390536880;
      x19 := .2939463120
> ec20:=subs({pi[1]=0.403,pi[2]=0.368,pi[3]=0.342,pi[4]=0.349,pi[5]
]=0.323,pi[6]=0.301,pi[7]=0.276,pi[8]=0.259,pi[9]=0.228,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},r20);
      ec20 := .3438850443 + x20 - y20 = .667
> x20:=0.667-.3438850443;
      x20 := .3231149557
> objBorg:=subs({x1=0,y1=.850381722e-1,x2=0,y2=.561428213e-1,x3=0,
y3=.293152721e-1,x4=0,y4=.40856282e-2,x5=.197444532e-1,y5=0,x6=.
.403280260e-1,y6=0,x7=.581888176e-1,y7=0,x8=.739819990e-1,y8=0,x9
=.875595280e-1,y9=0,x10=.1005836541,y10=0,x11=.1147144758,y11=0,
x12=.1300909070,y12=0,x13=.1476198844,y13=0,x14=.1680458656,y14=
0,x15=.1900078777,y15=0,x16=.2137908528,y16=0,x17=.2398716936,y1
7=0,x18=.2664224291,y18=0,x19=.2939463120,y19=0,x20=.3231149557,
y20=0},obj);
      objBorg := .05298779110
> deseBorg:=subs({x1=0,y1=.850381722e-1,x2=0,y2=.561428213e-1,x3=0
,y3=.293152721e-1,x4=0,y4=.40856282e-2,x5=.197444532e-1,y5=0,x6=
.403280260e-1,y6=0,x7=.581888176e-1,y7=0,x8=.739819990e-1,y8=0,x
9=.875595280e-1,y9=0,x10=.1005836541,y10=0,x11=.1147144758,y11=0
,x12=.1300909070,y12=0,x13=.1476198844,y13=0,x14=.1680458656,y14
=0,x15=.1900078777,y15=0,x16=.2137908528,y16=0,x17=.2398716936,y
17=0,x18=.2664224291,y18=0,x19=.2939463120,y19=0,x20=.3231149557
,y20=0},dese);
      deseBorg := .0000380522962
>

```

fun-obj-Gilde

```
-
- > restart;
- > with(simplex):
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
```

■ Se sustituyen las primas por expresiones lineales en el número de la clase

```
- > pi[1]:=a-b;
                                      $\pi_1 := a - b$ 
- > pi[2]:=a-2*b;
                                      $\pi_2 := a - 2 b$ 
- > pi[3]:=a-3*b;
                                      $\pi_3 := a - 3 b$ 
- > pi[4]:=a-4*b;
                                      $\pi_4 := a - 4 b$ 
- > pi[5]:=a-5*b;
                                      $\pi_5 := a - 5 b$ 
- > pi[6]:=a-6*b;
                                      $\pi_6 := a - 6 b$ 
- > pi[7]:=a-7*b;
                                      $\pi_7 := a - 7 b$ 
- > pi[8]:=a-8*b;
                                      $\pi_8 := a - 8 b$ 
- > pi[9]:=a-9*b;
                                      $\pi_9 := a - 9 b$ 
- > pi[10]:=a-10*b;
                                      $\pi_{10} := a - 10 b$ 
- > pi[11]:=a-11*b;
                                      $\pi_{11} := a - 11 b$ 
- > pi[12]:=a-12*b;
                                      $\pi_{12} := a - 12 b$ 
- > pi[13]:=a-13*b;
                                      $\pi_{13} := a - 13 b$ 
- >
- >
- > res1 :=
(523/10^10)*(a-b)+(2757/10^10)*(a-2*b)+(7974/10^10)*(a-3*b)+(627
15/10^10)*(a-4*b)+(190556/10^10)*(a-5*b)+(1173512/10^10)*(a-6*b)
```

+ (3157986/10^10) * (a-7*b) + (21603792/10^10) * (a-8*b) + (50005225/10^10) * (a-9*b) + (71315119/10^10) * (a-10*b) + (801348952/10^10) * (a-11*b) + (759705270/10^10) * (a-12*b) + (8291425613/10^10) * (a-13*b) + x1 - y1 = 33/1000;

$$res1 := x1 - y1 - \frac{25417248761}{20000000000} b + \frac{4999999997}{50000000000} a = \frac{33}{1000}$$

> res2 :=

(25000/10^10) * pi[1] + (70737/10^10) * pi[2] + (176933/10^10) * pi[3] + (852180/10^10) * pi[4] + (2186705/10^10) * pi[5] + (7208703/10^10) * pi[6] + (17490727/10^10) * pi[7] + (60472378/10^10) * pi[8] + (136395540/10^10) * pi[9] + (183694780/10^10) * pi[10] + (1079576491/10^10) * pi[11] + (979947526/10^10) * pi[12] + (7531902297/10^10) * pi[13] + x2 - y2 = 67/1000;

$$res2 := -\frac{125278455083}{100000000000} b + \frac{9999999997}{100000000000} a - y2 + x2 = \frac{67}{1000}$$

> res3 :=

(239630/10^10) * pi[1] + (493242/10^10) * pi[2] + (1068530/10^10) * pi[3] + (4235236/10^10) * pi[4] + (9283151/10^10) * pi[5] + (22638140/10^10) * pi[6] + (48508189/10^10) * pi[7] + (120521353/10^10) * pi[8] + (249934598/10^10) * pi[9] + (318295880/10^10) * pi[10] + (1308053564/10^10) * pi[11] + (1142749910/10^10) * pi[12] + (6773978572/10^10) * pi[13] + x3 - y3 = 1/10;

$$res3 := -\frac{30775756283}{25000000000} b + \frac{1999999999}{20000000000} a - y3 + x3 = \frac{1}{10}$$

> res4 :=

(1217103/10^10) * pi[1] + (2017022/10^10) * pi[2] + (3839650/10^10) * pi[3] + (13771717/10^10) * pi[4] + (26290969/10^10) * pi[5] + (52977943/10^10) * pi[6] + (100802822/10^10) * pi[7] + (204145418/10^10) * pi[8] + (384157545/10^10) * pi[9] + (463265597/10^10) * pi[10] + (1486311682/10^10) * pi[11] + (1252194856/10^10) * pi[12] + (6009007672/10^10) * pi[13] + x4 - y4 = 133/1000;

$$res4 := -\frac{120442902951}{100000000000} b + \frac{2499999999}{25000000000} a + x4 - y4 = \frac{133}{1000}$$

> res5 :=

(4403875/10^10) * pi[1] + (6145425/10^10) * pi[2] + (10413253/10^10) * pi[3] + (35246923/10^10) * pi[4] + (59517106/10^10) * pi[5] + (104151218/10^10) * pi[6] + (177702738/10^10) * pi[7] + (311044340/10^10) * pi[8] + (531305590/10^10) * pi[9] + (607205764/10^10) * pi[10] + (1611034383/10^10) * pi[11] + (1309323257/10^10) * pi[12] + (5232506122/10^10) * pi[13] + x5 - y5 = 167/1000;

$$res5 := -\frac{117153333733}{100000000000} b + \frac{4999999997}{50000000000} a - y5 + x5 = \frac{167}{1000}$$

> res6 :=

(11917752/10^10) * pi[1] + (14482321/10^10) * pi[2] + (22226444/10^10) * pi[3] + (72802112/10^10) * pi[4] + (110837330/10^10) * pi[5] + (174276033/10^10) * pi[6] + (271046836/10^10) * pi[7] + (426705727/10^10) * pi[8] + (668

$$987213/10^{10} * \pi[9] + (727827680/10^{10}) * \pi[10] + (1673616835/10^{10}) * \pi[11] + (1315012153/10^{10}) * \pi[12] + (4510261566/10^{10}) * \pi[13] + x6 - y6 = 2/10;$$

$$res6 := -\frac{56716039893}{5000000000} b + \frac{50000000001}{50000000000} a - y6 + x6 = \frac{1}{5}$$

> res7 :=

$$(26940816/10^{10}) * \pi[1] + (29026900/10^{10}) * \pi[2] + (40794041/10^{10}) * \pi[3] + (131127644/10^{10}) * \pi[4] + (182159617/10^{10}) * \pi[5] + (262076176/10^{10}) * \pi[6] + (375731638/10^{10}) * \pi[7] + (543821097/10^{10}) * \pi[8] + (789484301/10^{10}) * \pi[9] + (820127553/10^{10}) * \pi[10] + (1682536752/10^{10}) * \pi[11] + (1279348568/10^{10}) * \pi[12] + (3836824898/10^{10}) * \pi[13] + x7 - y7 = 233/1000;$$

$$res7 := -\frac{109241277699}{10000000000} b + \frac{100000000001}{100000000000} a + x7 - y7 = \frac{233}{1000}$$

> res8 :=

$$(54124624/10^{10}) * \pi[1] + (52193987/10^{10}) * \pi[2] + (67600380/10^{10}) * \pi[3] + (215231212/10^{10}) * \pi[4] + (274718100/10^{10}) * \pi[5] + (365297527/10^{10}) * \pi[6] + (486209141/10^{10}) * \pi[7] + (655542721/10^{10}) * \pi[8] + (886624183/10^{10}) * \pi[9] + (880888957/10^{10}) * \pi[10] + (1644059218/10^{10}) * \pi[11] + (1209589613/10^{10}) * \pi[12] + (3207920334/10^{10}) * \pi[13] + x8 - y8 = 267/1000;$$

$$res8 := -\frac{26131654579}{2500000000} b + \frac{9999999997}{10000000000} a + x8 - y8 = \frac{267}{1000}$$

> res9 :=

$$(95595332/10^{10}) * \pi[1] + (83551609/10^{10}) * \pi[2] + (100664090/10^{10}) * \pi[3] + (319767493/10^{10}) * \pi[4] + (378718105/10^{10}) * \pi[5] + (470646996/10^{10}) * \pi[6] + (587197218/10^{10}) * \pi[7] + (747294801/10^{10}) * \pi[8] + (950289471/10^{10}) * \pi[9] + (906637400/10^{10}) * \pi[10] + (1571036124/10^{10}) * \pi[11] + (1120288434/10^{10}) * \pi[12] + (2668312924/10^{10}) * \pi[13] + x9 - y9 = 3/10;$$

$$res9 := -\frac{1993637561}{2000000000} b + \frac{9999999997}{10000000000} a + x9 - y9 = \frac{3}{10}$$

> res10 :=

$$(155041171/10^{10}) * \pi[1] + (123681228/10^{10}) * \pi[2] + (139377193/10^{10}) * \pi[3] + (444072281/10^{10}) * \pi[4] + (490820530/10^{10}) * \pi[5] + (573796694/10^{10}) * \pi[6] + (675025032/10^{10}) * \pi[7] + (817753557/10^{10}) * \pi[8] + (983490982/10^{10}) * \pi[9] + (903194621/10^{10}) * \pi[10] + (1473850834/10^{10}) * \pi[11] + (1019202810/10^{10}) * \pi[12] + (2200693064/10^{10}) * \pi[13] + x10 - y10 = 333/1000;$$

$$res10 := -\frac{47348039299}{5000000000} b + \frac{9999999997}{10000000000} a - y10 + x10 = \frac{333}{1000}$$

> res11 :=

$$(237325167/10^{10}) * \pi[1] + (173323974/10^{10}) * \pi[2] + (183169703/10^{10}) * \pi[3] + (588028096/10^{10}) * \pi[4] + (608182318/10^{10}) * \pi[5] + (6712033$$

$96/10^{10} \cdot \pi[6] + (746942297/10^{10}) \cdot \pi[7] + (866232493/10^{10}) \cdot \pi[8] +$
 $(988759011/10^{10}) \cdot \pi[9] + (874935878/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1359048013/10^{10}) \cdot \pi[11] +$
 $(910936640/10^{10}) \cdot \pi[12] + (1791913012/10^{10}) \cdot \pi[13] + x1$
 $1 - y11 = 367/1000;$

$$res11 := -y11 + x11 - \frac{17907201891}{2000000000} b + \frac{4999999999}{5000000000} a = \frac{367}{1000}$$

> res12 :=

$(338584264/10^{10}) \cdot \pi[1] + (228011090/10^{10}) \cdot \pi[2] + (227244227/10^{10}) \cdot \pi[3] +$
 $(737552844/10^{10}) \cdot \pi[4] + (717954972/10^{10}) \cdot \pi[5] + (7524699$
 $95/10^{10}) \cdot \pi[6] + (796591299/10^{10}) \cdot \pi[7] + (890671865/10^{10}) \cdot \pi[8] +$
 $(970524979/10^{10}) \cdot \pi[9] + (829899011/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1241961396/10^{10}) \cdot \pi[11] +$
 $(807843593/10^{10}) \cdot \pi[12] + (1460690461/10^{10}) \cdot \pi[13] + x1$
 $2 - y12 = 4/10;$

$$res12 := -y12 + x12 - \frac{8461104873}{1000000000} b + \frac{2499999999}{2500000000} a = \frac{2}{5}$$

> res13 :=

$(460706046/10^{10}) \cdot \pi[1] + (287153864/10^{10}) \cdot \pi[2] + (270721824/10^{10}) \cdot \pi[3] +$
 $(891040149/10^{10}) \cdot \pi[4] + (818879553/10^{10}) \cdot \pi[5] + (8179472$
 $90/10^{10}) \cdot \pi[6] + (826441849/10^{10}) \cdot \pi[7] + (895376032/10^{10}) \cdot \pi[8] +$
 $(934738557/10^{10}) \cdot \pi[9] + (773558938/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1125743068/10^{10}) \cdot \pi[11] +$
 $(710701553/10^{10}) \cdot \pi[12] + (1186991281/10^{10}) \cdot \pi[13] + x1$
 $3 - y13 = 433/1000;$

$$res13 := -y13 - \frac{9981529747}{1250000000} b + \frac{2500000001}{2500000000} a + x13 = \frac{433}{1000}$$

> res14 :=

$(607054841/10^{10}) \cdot \pi[1] + (350544378/10^{10}) \cdot \pi[2] + (312948234/10^{10}) \cdot \pi[3] +$
 $(1047844472/10^{10}) \cdot \pi[4] + (910062832/10^{10}) \cdot \pi[5] + (867887$
 $144/10^{10}) \cdot \pi[6] + (838202019/10^{10}) \cdot \pi[7] + (883255116/10^{10}) \cdot \pi[8] +$
 $(885135604/10^{10}) \cdot \pi[9] + (709146869/10^{10}) \cdot \pi[10] + (1011579715/10^{10}) \cdot \pi[11] +$
 $(619293640/10^{10}) \cdot \pi[12] + (957045133/10^{10}) \cdot \pi[13] + x1$
 $4 - y14 = 467/1000;$

$$res14 := x14 - \frac{4699227167}{625000000} b + \frac{9999999997}{10000000000} a - y14 = \frac{467}{1000}$$

> res15 :=

$(766989599/10^{10}) \cdot \pi[1] + (412389702/10^{10}) \cdot \pi[2] + (349977767/10^{10}) \cdot \pi[3] +$
 $(1194281534/10^{10}) \cdot \pi[4] + (984109990/10^{10}) \cdot \pi[5] + (899780$
 $647/10^{10}) \cdot \pi[6] + (833813223/10^{10}) \cdot \pi[7] + (858895091/10^{10}) \cdot \pi[8] +$
 $(829483856/10^{10}) \cdot \pi[9] + (644654426/10^{10}) \cdot \pi[10] + (908989133/10^{10}) \cdot \pi[11] +$
 $(540087640/10^{10}) \cdot \pi[12] + (776547395/10^{10}) \cdot \pi[13] + x15$
 $- y15 = 5/10;$

$$res15 := x15 - y15 - \frac{70932862803}{10000000000} b + \frac{10000000003}{10000000000} a = \frac{1}{2}$$

> res16 :=

$(942060479/10^{10}) \cdot \pi[1] + (472752930/10^{10}) \cdot \pi[2] + (382134914/10^{10})$

) *pi[3] + (1331677206/10^10) *pi[4] + (1043143053/10^10) *pi[5] + (916734310/10^10) *pi[6] + (816874991/10^10) *pi[7] + (825778270/10^10) *pi[8] + (770349873/10^10) *pi[9] + (581251996/10^10) *pi[10] + (815902690/10^10) *pi[11] + (470419491/10^10) *pi[12] + (630919796/10^10) *pi[13] + x16 - y16 = 533/1000;

$$res16 := -\frac{33484370887}{5000000000}b + \frac{9999999999}{10000000000}a - y16 + x16 = \frac{533}{1000}$$

> res17 :=

(1135430957/10^10) *pi[1] + (531863282/10^10) *pi[2] + (409612503/10^10) *pi[3] + (1461343195/10^10) *pi[4] + (1088471374/10^10) *pi[5] + (920630109/10^10) *pi[6] + (789475674/10^10) *pi[7] + (785847194/10^10) *pi[8] + (708897985/10^10) *pi[9] + (519198167/10^10) *pi[10] + (730374609/10^10) *pi[11] + (408168183/10^10) *pi[12] + (510686767/10^10) *pi[13] + x17 - y17 = 567/1000;

$$res17 := -\frac{12639148601}{20000000000}b + \frac{9999999999}{10000000000}a - y17 + x17 = \frac{567}{1000}$$

> res18 :=

(1332964309/10^10) *pi[1] + (585124044/10^10) *pi[2] + (430632634/10^10) *pi[3] + (1574238022/10^10) *pi[4] + (1118332726/10^10) *pi[5] + (913477819/10^10) *pi[6] + (756063833/10^10) *pi[7] + (744116694/10^10) *pi[8] + (650891988/10^10) *pi[9] + (463385229/10^10) *pi[10] + (657188667/10^10) *pi[11] + (356216469/10^10) *pi[12] + (417367569/10^10) *pi[13] + x18 - y18 = 6/10;

$$res18 := -\frac{29915652429}{50000000000}b + \frac{100000000003}{100000000000}a + x18 - y18 = \frac{3}{5}$$

> res19 :=

(1537626675/10^10) *pi[1] + (633581949/10^10) *pi[2] + (446219483/10^10) *pi[3] + (1673757130/10^10) *pi[4] + (1135596741/10^10) *pi[5] + (897763213/10^10) *pi[6] + (718342995/10^10) *pi[7] + (701488112/10^10) *pi[8] + (595884698/10^10) *pi[9] + (412525398/10^10) *pi[10] + (593033482/10^10) *pi[11] + (311681391/10^10) *pi[12] + (342498732/10^10) *pi[13] + x19 - y19 = 633/1000;

$$res19 := -y19 + x19 - \frac{28373795579}{50000000000}b + \frac{9999999999}{100000000000}a = \frac{633}{1000}$$

> res20 :=

(1753513684/10^10) *pi[1] + (678023818/10^10) *pi[2] + (456950261/10^10) *pi[3] + (1762300940/10^10) *pi[4] + (1141829875/10^10) *pi[5] + (874763716/10^10) *pi[6] + (677026670/10^10) *pi[7] + (658176036/10^10) *pi[8] + (543185077/10^10) *pi[9] + (365470148/10^10) *pi[10] + (535476742/10^10) *pi[11] + (272548384/10^10) *pi[12] + (280734644/10^10) *pi[13] + x20 - y20 = 667/1000;

$$res20 := -\frac{53845684827}{100000000000}b + \frac{19999999999}{20000000000}a + x20 - y20 = \frac{667}{1000}$$

> obj := (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x

$4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/1000) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11+y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000) ;$

$obj := \frac{1}{1000}y19 + \frac{1}{1000}x19 + \frac{3}{1000}x15 + \frac{3}{1000}y15 + \frac{7}{500}y11 + \frac{7}{500}x11 + \frac{143}{1000}x1 + \frac{143}{1000}y1$
 $+ \frac{7}{1000}y12 + \frac{7}{1000}x12 + \frac{1}{250}x14 + \frac{3}{500}y13 + \frac{1}{1000}y16 + \frac{43}{250}y2 + \frac{43}{250}x2 + \frac{1}{1000}x16$
 $+ \frac{57}{500}x4 + \frac{57}{500}y4 + \frac{29}{1000}y10 + \frac{29}{1000}x10 + \frac{3}{500}x13 + \frac{143}{1000}y3 + \frac{143}{1000}x3 + \frac{1}{1000}y17$
 $+ \frac{1}{1000}x17 + \frac{1}{1000}x18 + \frac{9}{125}x7 + \frac{9}{125}y7 + \frac{57}{1000}x8 + \frac{57}{1000}y8 + \frac{1}{1000}y18 + \frac{43}{1000}x9$
 $+ \frac{43}{1000}y9 + \frac{1}{10}y5 + \frac{1}{10}x5 + \frac{43}{500}y6 + \frac{1}{250}y14 + \frac{43}{500}x6 + \frac{1}{1000}x20 + \frac{1}{1000}y20$

$> dese := (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x11-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14) * (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/1000) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000) ;$

$dese := -\frac{1}{1000}y19 + \frac{1}{1000}x19 + \frac{3}{1000}x15 - \frac{3}{1000}y15 - \frac{7}{500}y11 + \frac{7}{500}x11 + \frac{143}{1000}x1$
 $- \frac{143}{1000}y1 - \frac{7}{1000}y12 + \frac{7}{1000}x12 + \frac{1}{250}x14 - \frac{3}{500}y13 - \frac{1}{1000}y16 - \frac{43}{250}y2 + \frac{43}{250}x2$
 $+ \frac{1}{1000}x16 + \frac{57}{500}x4 - \frac{57}{500}y4 - \frac{29}{1000}y10 + \frac{29}{1000}x10 + \frac{3}{500}x13 - \frac{143}{1000}y3 + \frac{143}{1000}x3$
 $- \frac{1}{1000}y17 + \frac{1}{1000}x17 + \frac{1}{1000}x18 + \frac{9}{125}x7 - \frac{9}{125}y7 + \frac{57}{1000}x8 - \frac{57}{1000}y8 - \frac{1}{1000}y18$
 $+ \frac{43}{1000}x9 - \frac{43}{1000}y9 - \frac{1}{10}y5 + \frac{1}{10}x5 - \frac{43}{500}y6 - \frac{1}{250}y14 + \frac{43}{500}x6 + \frac{1}{1000}x20 - \frac{1}{1000}y20$

Se calculan las variables de holgura, para las primas obtenidas por Gilde y Sundt, y se calcula el valor de la función objetivo

$> ec1 := evalf(subs({a=0.415, b=0.0228}, res1)) ;$

$ec1 := x1 - 1. y1 + .1252433639 = .03300000000$

$> y1 := .1252433639 - .3300000000e-1 ;$

$y1 := .09224336390$

$> ec2 := evalf(subs({a=0.415, b=0.0228}, res2)) ;$

```

      ec2 := .1293651223 - 1.y2 + x2 = .06700000000
> y2 := .1293651223 - .6700000000e-1;
      y2 := .06236512230
> ec3 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res3));
      ec3 := .1343251026 - 1.y3 + x3 = .1000000000
> y3 := .1343251026 - .1000000000;
      y3 := .0343251026
> ec4 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res4));
      ec4 := .1403901810 + x4 - 1.y4 = .1330000000
> y4 := .1403901810 - .1330000000;
      y4 := .0073901810
> ec5 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res5));
      ec5 := .1478903990 - 1.y5 + x5 = .1670000000
> x5 := .1670000000 - .1478903990;
      x5 := .0191096010
> ec6 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res6));
      ec6 := .1563748581 - 1.y6 + x6 = .2000000000
> x6 := .2000000000 - .1563748581;
      x6 := .0436251419
> ec7 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res7));
      ec7 := .1659298868 + x7 - 1.y7 = .2330000000
> x7 := .2330000000 - .1659298868;
      x7 := .0670701132
> ec8 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res8));
      ec8 := .1766793102 + x8 - 1.y8 = .2670000000
> x8 := .2670000000 - .1766793102;
      x8 := .0903206898
> ec9 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res9));
      ec9 := .1877253179 + x9 - 1.y9 = .3000000000
> x9 := .3000000000 - .1877253179;
      x9 := .1122746821
> ec10 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res10));
      ec10 := .1990929407 - 1.y10 + x10 = .3330000000
> x10 := .3330000000 - .1990929407;
      x10 := .1339070593
> ec11 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res11));
      ec11 := -1.y11 + x11 + .2108578983 = .3670000000
> x11 := .3670000000 - .2108578983;
      x11 := .1561421017
> ec12 := evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res12));
      ec12 := -1.y12 + x12 + .2220868087 = .4000000000
> x12 := .4000000000 - .2220868087;

```

```

x12 := .1779131913
> ec13:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res13));
      ec13 := -1.y13 + .2329368974 + x13 = .4330000000
> x13:=.4330000000-.2329368974;
      x13 := .2000631026
> ec14:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res14));
      ec14 := x14 + .2435721929 - 1.y14 = .4670000000
> x14:=.4670000000-.2435721929;
      x14 := .2234278071
> ec15:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res15));
      ec15 := x15 - 1.y15 + .2532730728 = .5000000000
> x15:=.5000000000-.2532730728;
      x15 := .2467269272
> ec16:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res16));
      ec16 := .2623112688 - 1.y16 + x16 = .5330000000
> x16:=.5330000000-.2623112688;
      x16 := .2706887312
> ec17:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res17));
      ec17 := .2709137059 - 1.y17 + x17 = .5670000000
> x17:=.5670000000-.2709137059;
      x17 := .2960862941
> ec18:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res18));
      ec18 := .2785846249 + x18 - 1.y18 = .6000000000
> x18:=.6000000000-.2785846249;
      x18 := .3214153751
> ec19:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res19));
      ec19 := -1.y19 + x19 + .2856154922 = .6330000000
> x19:=.6330000000-.2856154922;
      x19 := .3473845078
> ec20:=evalf(subs({a=0.415,b=0.0228},res20));
      ec20 := .2922318384 + x20 - 1.y20 = .6670000000
> x20:=.6670000000-.2922318384;
      x20 := .3747681616
> 'objG'=subs({x1=0,y1 = .9224336390e-1,x2=0,y2 =
      .6236512230e-1,x3=0,y3 = .343251026e-1,x4=0,y4 = .73901810e-2,x5
      = .191096010e-1,y5=0,x6 = .436251419e-1,y6=0,x7 =
      .670701132e-1,y7=0,x8 = .903206898e-1,y8=0,x9 =
      .1122746821,y9=0,x10 = .1339070593,y10=0,x11 =
      .1561421017,y11=0,x12 = .1779131913,y12=0,x13 =
      .2000631026,y13=0,x14 = .2234278071,y14=0,x15 =
      .2467269272,y15=0,x16 = .2706887312,y16=0,x17 =
      .2960862941,y17=0,x18 = .3214153751,y18=0,x19 =
      .3473845078,y19=0,x20 = .3747681616,y20=0},obj);

```

$objG = .06189573366$

>

fun-obj-Mapfre

☐ Calculo del valor de la función objetivo para los valores de las primas de Mapfre.

```
> restart;
> with(student):
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> with(simplex):
Warning, new definition for basis
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
Warning, new definition for pivot
>
> res1 :=
-.5654370166e-13*pi[1]+.3570957292e-15*pi[2]+.1372701504e-11*pi[
3]+.1854606734e-10*pi[4]-.1063360320e-10*pi[5]+.2126720640e-9*pi
[6]+.2094239815e-7*pi[7]+.2270950967e-7*pi[8]+.2709799771e-6*pi[
9]+.3745704900e-4*pi[10]+.4987332423e-2*pi[11]+.9949748955*pi[12
]+x1-y1 = .5e-2;

res1 := -.5654370166 10-13 π1 + .3570957292 10-15 π2 + .1372701504 10-11 π3
+ .1854606734 10-10 π4 - .1063360320 10-10 π5 + .2126720640 10-9 π6 + .2094239815 10-7 π7
+ .2270950967 10-7 π8 + .2709799771 10-6 π9 + .00003745704900 π10 + .004987332423 π11
+ .9949748955 π12 + x1 - y1 = .005

> res2 :=
.1230283314e-13*pi[1]+.9758358544e-12*pi[2]+.3396514862e-10*pi[3
]+.2093944245e-8*pi[4]+.2377962782e-8*pi[5]+.1947466086e-7*pi[6]
+.5762203514e-6*pi[7]+.7131459249e-6*pi[8]+.7320843594e-5*pi[9]+
.3362695456e-3*pi[10]+.1488292552e-1*pi[11]+.9847721711*pi[12]+x
2-y2 = .15e-1;

res2 := .1230283314 10-13 π1 + .9758358544 10-12 π2 + .3396514862 10-10 π3
+ .2093944245 10-8 π4 + .2377962782 10-8 π5 + .1947466086 10-7 π6 + .5762203514 10-6 π7
+ .7131459249 10-6 π8 + .7320843594 10-5 π9 + .0003362695456 π10 + .01488292552 π11
+ .9847721711 π12 + x2 - y2 = .015

> res3 :=
.3453612028e-12*pi[1]+.2122554929e-10*pi[2]+.4227545910e-9*pi[3]
+.1604129340e-7*pi[4]+.1983046935e-7*pi[5]+.1533172164e-6*pi[6]+
.2726516523e-5*pi[7]+.3769807487e-5*pi[8]+.3390631768e-4*pi[9]+
.9314663794e-3*pi[10]+.2466608773e-1*pi[11]+.9743618538*pi[12]+x3
```

$$-y3 = .25e-1;$$

$$\begin{aligned} res3 := & .3453612028 \cdot 10^{-12} \pi_1 + .2122554929 \cdot 10^{-10} \pi_2 + .4227545910 \cdot 10^{-9} \pi_3 \\ & + .1604129340 \cdot 10^{-7} \pi_4 + .1983046935 \cdot 10^{-7} \pi_5 + .1533172164 \cdot 10^{-6} \pi_6 + .2726516523 \cdot 10^{-5} \pi_7 \\ & + .3769807487 \cdot 10^{-5} \pi_8 + .00003390631768 \pi_9 + .0009314663794 \pi_{10} + .02466608773 \pi_{11} \\ & + .9743618538 \pi_{12} + x3 - y3 = .025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res4 := \\ & .3803045391e-11 \cdot \pi_1 + .1620717239e-9 \cdot \pi_2 + .2267782426e-8 \cdot \pi_3 + \\ & .6121607614e-7 \cdot \pi_4 + .8180830838e-7 \cdot \pi_5 + .6026204514e-6 \cdot \pi_6 + .7680077921e-5 \cdot \pi_7 \\ & + .1163696895e-4 \cdot \pi_8 + .9304834963e-4 \cdot \pi_9 + .1819994044e-2 \cdot \pi_{10} + .3432809528e-1 \cdot \pi_{11} + .9637387972 \cdot \pi_{12} + x4 - \\ & y4 = .35e-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res4 := & .3803045391 \cdot 10^{-11} \pi_1 + .1620717239 \cdot 10^{-9} \pi_2 + .2267782426 \cdot 10^{-8} \pi_3 \\ & + .6121607614 \cdot 10^{-7} \pi_4 + .8180830838 \cdot 10^{-7} \pi_5 + .6026204514 \cdot 10^{-6} \pi_6 + .7680077921 \cdot 10^{-5} \pi_7 \\ & + .00001163696895 \pi_8 + .00009304834963 \pi_9 + .001819994044 \pi_{10} + .03432809528 \pi_{11} \\ & + .9637387972 \pi_{12} + x4 - y4 = .035 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res5 := \\ & .2237675940e-10 \cdot \pi_1 + .7451377076e-9 \cdot \pi_2 + .8104804077e-8 \cdot \pi_3 + \\ & .1670251731e-6 \cdot \pi_4 + .2404686450e-6 \cdot \pi_5 + .1689839109e-5 \cdot \pi_6 + .1682491059e-4 \cdot \pi_7 \\ & + .2749259497e-4 \cdot \pi_8 + .1977199992e-3 \cdot \pi_9 + .2998220238e-2 \cdot \pi_{10} + .4385984588e-1 \cdot \pi_{11} + .9528977903 \cdot \pi_{12} + x5 - \\ & y5 = .45e-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res5 := & .2237675940 \cdot 10^{-10} \pi_1 + .7451377076 \cdot 10^{-9} \pi_2 + .8104804077 \cdot 10^{-8} \pi_3 \\ & + .1670251731 \cdot 10^{-6} \pi_4 + .2404686450 \cdot 10^{-6} \pi_5 + .1689839109 \cdot 10^{-5} \pi_6 + .00001682491059 \pi_7 \\ & + .00002749259497 \pi_8 + .0001977199992 \pi_9 + .002998220238 \pi_{10} + .04385984588 \pi_{11} \\ & + .9528977903 \pi_{12} + x5 - y5 = .045 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res6 := \\ & .9788840623e-10 \cdot \pi_1 + .2525805535e-8 \cdot \pi_2 + .2232366206e-7 \cdot \pi_3 + \\ & .3723849047e-6 \cdot \pi_4 + .5756213668e-6 \cdot \pi_5 + .3877785263e-5 \cdot \pi_6 + .3178161418e-4 \cdot \pi_7 \\ & + .5525025246e-4 \cdot \pi_8 + .3607981850e-3 \cdot \pi_9 + .4461895095e-2 \cdot \pi_{10} + .5325184928e-1 \cdot \pi_{11} + .9418335749 \cdot \pi_{12} + x6 - \\ & y6 = .55e-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res6 := & .9788840623 \cdot 10^{-10} \pi_1 + .2525805535 \cdot 10^{-8} \pi_2 + .2232366206 \cdot 10^{-7} \pi_3 \\ & + .3723849047 \cdot 10^{-6} \pi_4 + .5756213668 \cdot 10^{-6} \pi_5 + .3877785263 \cdot 10^{-5} \pi_6 + .00003178161418 \pi_7 \\ & + .00005525025246 \pi_8 + .0003607981850 \pi_9 + .004461895095 \pi_{10} + .05325184928 \pi_{11} \\ & + .9418335749 \pi_{12} + x6 - y6 = .055 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res7 := \\ & .3389803151e-9 \cdot \pi_1 + .7003762447e-8 \cdot \pi_2 + .5232741834e-7 \cdot \pi_3 + \\ & .7276484811e-6 \cdot \pi_4 + .1203725738e-5 \cdot \pi_5 + .7797582093e-5 \cdot \pi_6 + .5446014928e-4 \cdot \pi_7 \\ & + .9956020477e-4 \cdot \pi_8 + .5950159056e-3 \cdot \pi_9 + .62 \end{aligned}$$

06110986e-2*pi[10]+.6249421549e-1*pi[11]+.9305408489*pi[12]+x7-y
7 = .65e-1;

res7 := .3389803151 10⁻⁹ π₁ + .7003762447 10⁻⁸ π₂ + .5232741834 10⁻⁷ π₃
+ .7276484811 10⁻⁶ π₄ + .1203725738 10⁻⁵ π₅ + .7797582093 10⁻⁵ π₆ + .00005446014928 π₇
+ .00009956020477 π₈ + .0005950159056 π₉ + .006206110986 π₁₀ + .06249421549 π₁₁
+ .9305408489 π₁₂ + x7 - y7 = .065

> res8 :=
.9746099468e-9*pi[1]+.1682796013e-7*pi[2]+.1090451677e-6*pi[3]+.
1294930507e-5*pi[4]+.2284910115e-5*pi[5]+.1427617933e-4*pi[6]+.8
711230476e-4*pi[7]+.1658002774e-3*pi[8]+.9129036107e-3*pi[9]+.82
25262348e-2*pi[10]+.7157664808e-1*pi[11]+.9190142904*pi[12]+x8-y
8 = .75e-1;

res8 := .9746099468 10⁻⁹ π₁ + .1682796013 10⁻⁷ π₂ + .1090451677 10⁻⁶ π₃
+ .1294930507 10⁻⁵ π₄ + .2284910115 10⁻⁵ π₅ + .00001427617933 π₆ + .00008711230476 π₇
+ .0001658002774 π₈ + .0009129036107 π₉ + .008225262348 π₁₀ + .07157664808 π₁₁
+ .9190142904 π₁₂ + x8 - y8 = .075

> res9 :=
.2477431013e-8*pi[1]+.3632359645e-7*pi[2]+.2079126505e-6*pi[3]+.
2150320195e-5*pi[4]+.4033385794e-5*pi[5]+.2437351392e-4*pi[6]+.1
323875579e-3*pi[7]+.2600657539e-3*pi[8]+.1326731463e-2*pi[9]+.10
51300087e-1*pi[10]+.8048843231e-1*pi[11]+.9072485779*pi[12]+x9-y
9 = .85e-1;

res9 := .2477431013 10⁻⁸ π₁ + .3632359645 10⁻⁷ π₂ + .2079126505 10⁻⁶ π₃
+ .2150320195 10⁻⁵ π₄ + .4033385794 10⁻⁵ π₅ + .00002437351392 π₆ + .0001323875579 π₇
+ .0002600657539 π₈ + .001326731463 π₉ + .01051300087 π₁₀ + .08048843231 π₁₁
+ .9072485779 π₁₂ + x9 - y9 = .085

> res10 :=
.5695794205e-8*pi[1]+.7215937365e-7*pi[2]+.3702022661e-6*pi[3]+.
3386735946e-5*pi[4]+.6728954153e-5*pi[5]+.3942208304e-4*pi[6]+.1
933856020e-3*pi[7]+.3891486997e-3*pi[8]+.1848441583e-2*pi[9]+.13
06219293e-1*pi[10]+.8921843384e-1*pi[11]+.8952384110*pi[12]+x10-
y10 = .95e-1;

res10 := .5695794205 10⁻⁸ π₁ + .7215937365 10⁻⁷ π₂ + .3702022661 10⁻⁶ π₃
+ .3386735946 10⁻⁵ π₄ + .6728954153 10⁻⁵ π₅ + .00003942208304 π₆ + .0001933856020 π₇
+ .0003891486997 π₈ + .001848441583 π₉ + .01306219293 π₁₀ + .08921843384 π₁₁
+ .8952384110 π₁₂ + x10 - y10 = .095

> res11 :=
.1211443989e-7*pi[1]+.1341706542e-6*pi[2]+.6259313353e-6*pi[3]+.
5117264536e-5*pi[4]+.1073192299e-4*pi[5]+.6107319073e-4*pi[6]+.2

737080077e-3*pi[7]+.5605133476e-3*pi[8]+.2489577328e-2*pi[9]+.15
86487174e-1*pi[10]+.9775509242e-1*pi[11]+.8829785421*pi[12]+x11-
y11 = .105;

res11 := .1211443989 $10^{-7} \pi_1$ + .1341706542 $10^{-6} \pi_2$ + .6259313353 $10^{-6} \pi_3$
+ .5117264536 $10^{-5} \pi_4$ + .00001073192299 π_5 + .00006107319073 π_6 + .0002737080077 π_7
+ .0005605133476 π_8 + .002489577328 π_9 + .01586487174 π_{10} + .09775509242 π_{11}
+ .8829785421 π_{12} + x11 - y11 = .105

> res12 :=
.2419384885e-7*pi[1]+.2363680316e-6*pi[2]+.1013569188e-5*pi[3]+.
7479594749e-5*pi[4]+.1649653637e-4*pi[5]+.9134508204e-4*pi[6]+.3
775069955e-3*pi[7]+.7822659757e-3*pi[8]+.3261209775e-2*pi[9]+.18
91219567e-1*pi[10]+.1060864169*pi[11]+.8704638090*pi[12]+x12-y12
= .115;

res12 := .2419384885 $10^{-7} \pi_1$ + .2363680316 $10^{-6} \pi_2$ + .1013569188 $10^{-5} \pi_3$
+ .7479594749 $10^{-5} \pi_4$ + .00001649653637 π_5 + .00009134508204 π_6 + .0003775069955 π_7
+ .0007822659757 π_8 + .003261209775 π_9 + .01891219567 π_{10} + .1060864169 π_{11}
+ .8704638090 π_{12} + x12 - y12 = .115

> res13 :=
.4576134877e-7*pi[1]+.3981628166e-6*pi[2]+.1582318022e-5*pi[3]+.
1064167432e-4*pi[4]+.2458771353e-4*pi[5]+.1326770367e-3*pi[6]+.5
095259340e-3*pi[7]+.1063100589e-2*pi[8]+.4173846175e-2*pi[9]+.22
19439279e-1*pi[10]+.1141999921*pi[11]+.8576892101*pi[12]+x13-y13
= .125;

res13 := .4576134877 $10^{-7} \pi_1$ + .3981628166 $10^{-6} \pi_2$ + .1582318022 $10^{-5} \pi_3$
+ .00001064167432 π_4 + .00002458771353 π_5 + .0001326770367 π_6 + .0005095259340 π_7
+ .001063100589 π_8 + .004173846175 π_9 + .02219439279 π_{10} + .1141999921 π_{11}
+ .8576892101 π_{12} + x13 - y13 = .125

> res14 :=
.8282365786e-7*pi[1]+.6458721231e-6*pi[2]+.2398005663e-5*pi[3]+.
1480924850e-4*pi[4]+.3570561313e-4*pi[5]+.1879880914e-3*pi[6]+.6
751446185e-3*pi[7]+.1412261043e-2*pi[8]+.5237350677e-2*pi[9]+.25
70072483e-1*pi[10]+.1220829806*pi[11]+.8446499088*pi[12]+x14-y14
= .135;

res14 := .8282365786 $10^{-7} \pi_1$ + .6458721231 $10^{-6} \pi_2$ + .2398005663 $10^{-5} \pi_3$
+ .00001480924850 π_4 + .00003570561313 π_5 + .0001879880914 π_6 + .0006751446185 π_7
+ .001412261043 π_8 + .005237350677 π_9 + .02570072483 π_{10} + .1220829806 π_{11}
+ .8446499088 π_{12} + x14 - y14 = .135

> res15 :=
.1442686407e-6*pi[1]+.1014502200e-5*pi[2]+.3546166816e-5*pi[3]+.
2023408329e-4*pi[4]+.5070651497e-4*pi[5]+.2607369161e-3*pi[6]+.8

$$804092146e-3\pi_1 + .1839473078e-2\pi_2 + .6460848043e-2\pi_3 + .2941943647e-1\pi_4 + .1297221399\pi_5 + .8313413113\pi_6 + x_{15} - y_{15} = .145;$$

$$\begin{aligned} res15 := & .1442686407 \cdot 10^{-6} \pi_1 + .1014502200 \cdot 10^{-5} \pi_2 + .3546166816 \cdot 10^{-5} \pi_3 \\ & + .00002023408329 \pi_4 + .00005070651497 \pi_5 + .0002607369161 \pi_6 + .0008804092146 \pi_7 \\ & + .001839473078 \pi_8 + .006460848043 \pi_9 + .02941943647 \pi_{10} + .1297221399 \pi_{11} \\ & + .8313413113 \pi_{12} + x_{15} - y_{15} = .145 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res16 := & .2430807922e-6\pi_1 + .1549875337e-5\pi_2 + .5131700866e-5\pi_3 + .2722392785e-4\pi_4 \\ & + .7062501897e-4\pi_5 + .3549808558e-3\pi_6 + .1132055409e-2\pi_7 + .2354867989e-2\pi_8 \\ & + .7852619420e-2\pi_9 + .3333771228e-1\pi_{10} + .1371038323\pi_{11} + .8177591579\pi_{12} + x_{16} - y_{16} \\ & = .155; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res16 := & .2430807922 \cdot 10^{-6} \pi_1 + .1549875337 \cdot 10^{-5} \pi_2 + .5131700866 \cdot 10^{-5} \pi_3 \\ & + .00002722392785 \pi_4 + .00007062501897 \pi_5 + .0003549808558 \pi_6 + .001132055409 \pi_7 \\ & + .002354867989 \pi_8 + .007852619420 \pi_9 + .03333771228 \pi_{10} + .1371038323 \pi_{11} \\ & + .8177591579 \pi_{12} + x_{16} - y_{16} = .155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res17 := & .3977917036e-6\pi_1 + .2311197676e-5\pi_2 + .7290391671e-5\pi_3 + .3615498646e-4\pi_4 \\ & + .9670660861e-4\pi_5 + .4754411040e-3\pi_6 + .1437526609e-2\pi_7 + .2968900769e-2\pi_8 \\ & + .9420000221e-2\pi_9 + .3744163061e-1\pi_{10} + .1442140540\pi_{11} + .8038995856\pi_{12} + x_{17} - y_{17} \\ & = .165; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res17 := & .3977917036 \cdot 10^{-6} \pi_1 + .2311197676 \cdot 10^{-5} \pi_2 + .7290391671 \cdot 10^{-5} \pi_3 \\ & + .00003615498646 \pi_4 + .00009670660861 \pi_5 + .0004754411040 \pi_6 + .001437526609 \pi_7 \\ & + .002968900769 \pi_8 + .009420000221 \pi_9 + .03744163061 \pi_{10} + .1442140540 \pi_{11} \\ & + .8038995856 \pi_{12} + x_{17} - y_{17} = .165 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res18 := & .6345209621e-6\pi_1 + .3374057404e-5\pi_2 + .1019314763e-4\pi_3 + .4748549679e-4\pi_4 \\ & + .1304371807e-3\pi_5 + .6275619869e-3\pi_6 + .1804975442e-2\pi_7 + .3692246994e-2\pi_8 \\ & + .1116926717e-1\pi_9 + .4171613357e-1\pi_{10} + .1510384646\pi_{11} + .7897592260\pi_{12} + x_{18} - y_{18} \\ & = .175; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res18 := & .6345209621 \cdot 10^{-6} \pi_1 + .3374057404 \cdot 10^{-5} \pi_2 + .00001019314763 \pi_3 \\ & + .00004748549679 \pi_4 + .0001304371807 \pi_5 + .0006275619869 \pi_6 + .001804975442 \pi_7 \\ & + .003692246994 \pi_8 + .01116926717 \pi_9 + .04171613357 \pi_{10} + .1510384646 \pi_{11} \\ & + .7897592260 \pi_{12} + x_{18} - y_{18} = .175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res19 := & .9893140141e-6\pi_1 + .4833935507e-5\pi_2 + .1405412566e-4\pi_3 + .6177133109e-4\pi_4 \\ & + .1735763694e-3\pi_5 + .8175727514e-3\pi_6 + .2 \end{aligned}$$

$$243262676e-2*\pi[7]+.4535703631e-2*\pi[8]+.1310552913e-1*\pi[9]+.4614499143e-1*\pi[10]+.1575624277*\pi[11]+.7753352877*\pi[12]+x19-y19 = .185;$$

$$\begin{aligned} res19 := & .9893140141 \cdot 10^{-6} \pi_1 + .4833935507 \cdot 10^{-5} \pi_2 + .00001405412566 \pi_3 \\ & + .00006177133109 \pi_4 + .0001735763694 \pi_5 + .0008175727514 \pi_6 + .002243262676 \pi_7 \\ & + .004535703631 \pi_8 + .01310552913 \pi_9 + .04614499143 \pi_{10} + .1575624277 \pi_{11} \\ & + .7753352877 \pi_{12} + x19 - y19 = .185 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res20 := \\ & .1511242756e-5*\pi[1]+.6810345296e-5*\pi[2]+.1913866602e-4*\pi[3]+. \\ & 7968413948e-4*\pi[4]+.2281927526e-3*\pi[5]+.1052541147e-2*\pi[6]+.2 \\ & 761927875e-2*\pi[7]+.5510049068e-2*\pi[8]+.1523260034e-1*\pi[9]+.50 \\ & 71076778e-1*\pi[10]+.1637710711*\pi[11]+.7606257057*\pi[12]+x20-y20 \\ & = .195; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res20 := & .1511242756 \cdot 10^{-5} \pi_1 + .6810345296 \cdot 10^{-5} \pi_2 + .00001913866602 \pi_3 \\ & + .00007968413948 \pi_4 + .0002281927526 \pi_5 + .001052541147 \pi_6 + .002761927875 \pi_7 \\ & + .005510049068 \pi_8 + .01523260034 \pi_9 + .05071076778 \pi_{10} + .1637710711 \pi_{11} \\ & + .7606257057 \pi_{12} + x20 - y20 = .195 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > obj := & (x1+y1) * (703/10000) + (x2+y2) * (1261/10000) + (x3+y3) * (1354/10000) \\ & + (x4+y4) * (1262/10000) + (x5+y5) * (1101/10000) + (x6+y6) * (922/10000) \\ & + (x7+y7) * (752/10000) + (x8+y8) * (602/10000) + (x9+y9) * (476/10000) + (x10+y10) * (371/10000) \\ & + (x11+y11) * (288/10000) + (x12+y12) * (221/10000) + (x13+y13) * (169/10000) \\ & + (x14+y14) * (128/10000) + (x15+y15) * (97/10000) + (x16+y16) * (73/10000) \\ & + (x17+y17) * (41/10000) + (x18+y18) * (31/10000) + (x19+y19) * (23/10000) \\ & + (x20+y20) * (68/10000); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} obj := & \frac{73}{10000}x16 + \frac{73}{10000}y16 + \frac{41}{10000}x17 + \frac{41}{10000}y17 + \frac{31}{10000}x18 + \frac{31}{10000}y18 \\ & + \frac{23}{10000}x19 + \frac{23}{10000}y19 + \frac{17}{2500}x20 + \frac{17}{2500}y20 + \frac{18}{625}y11 + \frac{221}{10000}x12 + \frac{221}{10000}y12 \\ & + \frac{169}{10000}x13 + \frac{169}{10000}y13 + \frac{8}{625}x14 + \frac{8}{625}y14 + \frac{97}{10000}x15 + \frac{97}{10000}y15 + \frac{18}{625}x11 \\ & + \frac{703}{10000}y1 + \frac{703}{10000}x1 + \frac{1261}{10000}x2 + \frac{1261}{10000}y2 + \frac{677}{5000}x3 + \frac{677}{5000}y3 + \frac{631}{5000}x4 + \frac{631}{5000}y4 \\ & + \frac{1101}{10000}x5 + \frac{1101}{10000}y5 + \frac{461}{5000}x6 + \frac{461}{5000}y6 + \frac{47}{625}x7 + \frac{47}{625}y7 + \frac{301}{5000}x8 + \frac{301}{5000}y8 \\ & + \frac{119}{2500}x9 + \frac{119}{2500}y9 + \frac{371}{10000}x10 + \frac{371}{10000}y10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > dese := & (x1-y1) * (703/10000) + (x2-y2) * (1261/10000) + (x3-y3) * (1354/10000) \\ & + (x4-y4) * (1262/10000) + (x5-y5) * (1101/10000) + (x6-y6) * (922/10000) \\ & + (x7-y7) * (752/10000) + (x8-y8) * (602/10000) + (x9-y9) * (476/10000) + (x10-y10) * (371/10000) \\ & + (x11-y11) * (288/10000) + (x12-y12) * (221/10000) + (x13-y13) * (169/10000) \\ & + (x14-y14) * (128/10000) + (x15-y15) * (97/10000) \end{aligned}$$

$$+ (x_{16}-y_{16}) * (73/10000) + (x_{17}-y_{17}) * (41/10000) + (x_{18}-y_{18}) * (31/10000) + (x_{19}-y_{19}) * (23/10000) + (x_{20}-y_{20}) * (68/10000) ;$$

$$\begin{aligned} dese := & \frac{73}{10000} x_{16} - \frac{73}{10000} y_{16} + \frac{41}{10000} x_{17} - \frac{41}{10000} y_{17} + \frac{31}{10000} x_{18} - \frac{31}{10000} y_{18} \\ & + \frac{23}{10000} x_{19} - \frac{23}{10000} y_{19} + \frac{17}{2500} x_{20} - \frac{17}{2500} y_{20} - \frac{18}{625} y_{11} + \frac{221}{10000} x_{12} - \frac{221}{10000} y_{12} \\ & + \frac{169}{10000} x_{13} - \frac{169}{10000} y_{13} + \frac{8}{625} x_{14} - \frac{8}{625} y_{14} + \frac{97}{10000} x_{15} - \frac{97}{10000} y_{15} + \frac{18}{625} x_{11} \\ & - \frac{703}{10000} y_{11} + \frac{703}{10000} x_1 + \frac{1261}{10000} x_2 - \frac{1261}{10000} y_2 + \frac{677}{5000} x_3 - \frac{677}{5000} y_3 + \frac{631}{5000} x_4 - \frac{631}{5000} y_4 \\ & + \frac{1101}{10000} x_5 - \frac{1101}{10000} y_5 + \frac{461}{5000} x_6 - \frac{461}{5000} y_6 + \frac{47}{625} x_7 - \frac{47}{625} y_7 + \frac{301}{5000} x_8 - \frac{301}{5000} y_8 \\ & + \frac{119}{2500} x_9 - \frac{119}{2500} y_9 + \frac{371}{10000} x_{10} - \frac{371}{10000} y_{10} \end{aligned}$$

☐ Sustituimos las primas de Mapfre para calcular las variables de holgura

```
> ec1:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res1);
```

$$ec1 := .02662693556 + x_1 - y_1 = .005$$

```
> y1:=.02662693556-0.005;
```

$$y1 := .02162693556$$

```
> ec2:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res2);
```

$$ec2 := .02668287676 + x_2 - y_2 = .015$$

```
> y2:=.02668287676-0.015;
```

$$y2 := .01168287676$$

```
> ec3:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res3);
```

$$ec3 := .02674170886 + x_3 - y_3 = .025$$

```
> y3:=.02674170886-.25e-1;
```

$$y3 := .00174170886$$

```
> ec4:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res4);
```

$$ec4 := .02680359793 + x_4 - y_4 = .035$$

```
> x4:=.35e-1-.02680359793;
```

$$x4 := .00819640207$$

```

> ec5:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.063
84,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=
0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res5);
      ec5 := .02686872116 + x5 - y5 = .045
> x5:=.45e-1-.02686872116;
      x5 := .01813127884
> ec6:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.063
84,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=
0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res6);
      ec6 := .02693726759 + x6 - y6 = .055
> x6:=0.055-.02693726759;
      x6 := .02806273241
> ec7:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.063
84,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=
0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res7);
      ec7 := .02700943937 + x7 - y7 = .065
> x7:=0.065-.02700943937;
      x7 := .03799056063
> ec8:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.063
84,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=
0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res8);
      ec8 := .02708545250 + x8 - y8 = .075
> x8:=0.075-.02708545250;
      x8 := .04791454750
> ec9:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.063
84,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]=
0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res9);
      ec9 := .02716553805 + x9 - y9 = .085
> x9:=0.085-.02716553805;
      x9 := .05783446195
> ec10:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res10);
      ec10 := .02724994317 + x10 - y10 = .095
> x10:=0.095-.02724994317;
      x10 := .06775005683
> ec11:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res11);
      ec11 := .02733893238 + x11 - y11 = .105
> x11:=0.105-.02733893238;
      x11 := .07766106762
> ec12:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06

```

```

384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res12);
      ec12 := .02743278853 + x12 - y12 = .115
> x12:=0.115-.02743278853;
      x12 := .08756721147
> ec13:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res13);
      ec13 := .02753181345 + x13 - y13 = .125
> x13:=0.125-.02753181345;
      x13 := .09746818655
> ec14:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res14);
      ec14 := .02763632979 + x14 - y14 = .135
> x14:=0.135-.02763632979;
      x14 := .1073636702
> ec15:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res15);
      ec15 := .02774668182 + x15 - y15 = .145
> x15:=0.145-.02774668182;
      x15 := .1172533182
> ec16:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res16);
      ec16 := .02786323552 + x16 - y16 = .155
> x16:=0.155-.02786323552;
      x16 := .1271367645
> ec17:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res17);
      ec17 := .02798638007 + x17 - y17 = .165
> x17:=0.165-.02798638007;
      x17 := .1370136199
> ec18:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res18);
      ec18 := .02811652788 + x18 - y18 = .175
> x18:=0.175-.02811652788;
      x18 := .1468834721
> ec19:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]

```

```

=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res19);
ec19:=.02825411540+x19-y19=.185
> x19:=0.185-.02825411540;
x19:=.1567458846
> ec20:=subs({pi[1]=0.07980,pi[2]=0.07448,pi[3]=0.06916,pi[4]=0.06
384,pi[5]=0.05852,pi[6]=0.0532,pi[7]=0.04788,pi[8]=0.04256,pi[9]
=0.03990,pi[10]=0.03724,pi[11]=0.03192,pi[12]=0.02660},res20);
ec20:=.02839960243+x20-y20=.195
> x20:=0.195-.02839960243;
x20:=.1666003976
>

```

Calculamos el valor de la función objetivo y del desequilibrio financiero para la escala de primas de Mapfre

```

> objMapfre:=subs({x1=0,y1=.2162693556e-1,x2=0,y2=.1168287676e-
1,x3=0,y3=.174170886e-2,x4=.819640207e-2,y4=0,x5=.1813127884e
-1,y5=0,x6=.2806273241e-1,y6=0,x7=.3799056063e-1,y7=0,x8=.479
1454750e-1,y8=0,x9=.5783446195e-1,y9=0,x10=.6775005683e-1,y10
=0,x11=.7766106762e-1,y11=0,x12=.8756721147e-1,y12=0,x13=.974
6818655e-1,y13=0,x14=.1073636702,y14=0,x15=.1172533182,y15=0,
x16=.1271367645,y16=0,x17=
.1370136199,y17=0,x18=.1468834721,y18=0,x19=.1567458846,y19=0
,x20=.1666003976,y20=0},obj);
objMapfre:=.03162451867
> deseMapfre:=subs({x1=0,y1=.2162693556e-1,x2=0,y2=.1168287676e
-1,x3=0,y3=.174170886e-2,x4=.819640207e-2,y4=0,x5=.1813127884
e-1,y5=0,x6=.2806273241e-1,y6=0,x7=.3799056063e-1,y7=0,x8=.47
91454750e-1,y8=0,x9=.5783446195e-1,y9=0,x10=.6775005683e-1,y1
0=0,x11=.7766106762e-1,y11=0,x12=.8756721147e-1,y12=0,x13=.97
46818655e-1,y13=0,x14=.1073636702,y14=0,x15=.1172533182,y15=0
,x16=.1271367645,y16=0,x17=.1370136199,y17=0,x18=.1468834721,
y18=0,x19=.1567458846,y19=0,x20=.1666003976,y20=0},dese);
deseMapfre:=.02516569525
>

```

fun-obj-Norberg1

☐ Calculo del valor de la función objetivo para los valores de las primas de Norberg 1.

```
> restart;
> with(student):
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> with(simplex):
Warning, new definition for basis
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
Warning, new definition for pivot
> res1 :=
.1169072878e-7*pi[1]+.3126149941e-7*pi[2]+.2074599740e-6*pi[3]+.
7421173438e-6*pi[4]+.4671320067e-5*pi[5]+.1205063178e-4*pi[6]+.8
845618583e-4*pi[7]+.1865341620e-3*pi[8]+.1703009854e-2*pi[9]+.26
45882192e-2*pi[10]+.3231076730e-1*pi[11]+.3126191325e-1*pi[12]+.
9317857227*pi[13]+x1-y1 = .33e-1;
res1 := .1169072878 10-7 π1 + .3126149941 10-7 π2 + .2074599740 10-6 π3
+ .7421173438 10-6 π4 + .4671320067 10-5 π5 + .00001205063178 π6 + .00008845618583 π7
+ .0001865341620 π8 + .001703009854 π9 + .002645882192 π10 + .03231076730 π11
+ .03126191325 π12 + .9317857227 π13 + x1 - y1 = .033
> res2 :=
.1071640373e-5*pi[1]+.2274761398e-5*pi[2]+.8181294539e-5*pi[3]+.
2788609455e-4*pi[4]+.9658806872e-4*pi[5]+.2123977470e-3*pi[6]+.8
249332000e-3*pi[7]+.1552702892e-2*pi[8]+.7227946805e-2*pi[9]+.10
47934934e-1*pi[10]+.6348062024e-1*pi[11]+.5936677152e-1*pi[12]+.
8567192761*pi[13]+x2-y2 = .67e-1;
res2 := .1071640373 10-5 π1 + .2274761398 10-5 π2 + .8181294539 10-5 π3
+ .00002788609455 π4 + .00009658806872 π5 + .0002123977470 π6 + .0008249332000 π7
+ .001552702892 π8 + .007227946805 π9 + .01047934934 π10 + .06348062024 π11
+ .05936677152 π12 + .8567192761 π13 + x2 - y2 = .067
> res3 :=
.1459249314e-4*pi[1]+.2575869361e-4*pi[2]+.6701462035e-4*pi[3]+.
2213164528e-3*pi[4]+.5601107540e-3*pi[5]+.1078338843e-2*pi[6]+.2
978324750e-2*pi[7]+.5071424516e-2*pi[8]+.1630641217e-1*pi[9]+.22
16809710e-1*pi[10]+.9054801594e-1*pi[11]+.8193123208e-1*pi[12]+.
7790293614*pi[13]+x3-y3 = .1;
res3 := .00001459249314 π1 + .00002575869361 π2 + .00006701462035 π3
```


$$\begin{aligned}
& + .0002213164528 \pi_4 + .0005601107540 \pi_5 + .001078338843 \pi_6 + .002978324750 \pi_7 \\
& + .005071424516 \pi_8 + .01630641217 \pi_9 + .02216809710 \pi_{10} + .09054801594 \pi_{11} \\
& + .08193123208 \pi_{12} + .7790293614 \pi_{13} + x^3 - y^3 = .1
\end{aligned}$$

> res4 :=

$$\begin{aligned}
& .9539342003e-4 * \pi_1 + .1436987271e-3 * \pi_2 + .2997821057e-3 * \pi_3 + \\
& .9703595253e-3 * \pi_4 + .1983226109e-2 * \pi_5 + .3397204101e-2 * \pi_6 + .7 \\
& 428065682e-2 * \pi_7 + .1153630984e-1 * \pi_8 + .2867172387e-1 * \pi_9 + .36 \\
& 63843766e-1 * \pi_{10} + .1131817826 * \pi_{11} + .9908669957e-1 * \pi_{12} + .696 \\
& 5673165 * \pi_{13} + x^4 - y^4 = .133;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res4 := & .00009539342003 \pi_1 + .0001436987271 \pi_2 + .0002997821057 \pi_3 \\
& + .0009703595253 \pi_4 + .001983226109 \pi_5 + .003397204101 \pi_6 + .007428065682 \pi_7 \\
& + .01153630984 \pi_8 + .02867172387 \pi_9 + .03663843766 \pi_{10} + .1131817826 \pi_{11} \\
& + .09908669957 \pi_{12} + .6965673165 \pi_{13} + x^4 - y^4 = .133
\end{aligned}$$

> res5 :=

$$\begin{aligned}
& .4259152410e-3 * \pi_1 + .5557137586e-3 * \pi_2 + .9766461269e-3 * \pi_3 + \\
& .3125991839e-2 * \pi_4 + .5410389076e-2 * \pi_5 + .8324717506e-2 * \pi_6 + .1 \\
& 518069966e-1 * \pi_7 + .2159693150e-1 * \pi_8 + .4386578615e-1 * \pi_9 + .52 \\
& 71207479e-1 * \pi_{10} + .1303958369 * \pi_{11} + .1103409060 * \pi_{12} + .607088 \\
& 3914 * \pi_{13} + x^5 - y^5 = .167;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res5 := & .0004259152410 \pi_1 + .0005557137586 \pi_2 + .0009766461269 \pi_3 + .003125991839 \pi_4 \\
& + .005410389076 \pi_5 + .008324717506 \pi_6 + .01518069966 \pi_7 + .02159693150 \pi_8 \\
& + .04386578615 \pi_9 + .05271207479 \pi_{10} + .1303958369 \pi_{11} + .1103409060 \pi_{12} \\
& + .6070883914 \pi_{13} + x^5 - y^5 = .167
\end{aligned}$$

> res6 :=

$$\begin{aligned}
& .1369755763e-2 * \pi_1 + .1577037641e-2 * \pi_2 + .2424558527e-2 * \pi_3 + \\
& .7733006444e-2 * \pi_4 + .1175159293e-1 * \pi_5 + .1645706409e-1 * \pi_6 + .2 \\
& 605651427e-1 * \pi_7 + .3424316883e-1 * \pi_8 + .5940753201e-1 * \pi_9 + .67 \\
& 38970921e-1 * \pi_{10} + .1398655489 * \pi_{11} + .1145122259 * \pi_{12} + .517212 \\
& 2857 * \pi_{13} + x^6 - y^6 = .2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res6 := & .001369755763 \pi_1 + .001577037641 \pi_2 + .002424558527 \pi_3 + .007733006444 \pi_4 \\
& + .01175159293 \pi_5 + .01645706409 \pi_6 + .02605651427 \pi_7 + .03424316883 \pi_8 \\
& + .05940753201 \pi_9 + .06738970921 \pi_{10} + .1398655489 \pi_{11} + .1145122259 \pi_{12} \\
& + .5172122857 \pi_{13} + x^6 - y^6 = .2
\end{aligned}$$

> res7 :=

$$\begin{aligned}
& .3580304552e-2 * \pi_1 + .3677652820e-2 * \pi_2 + .5051753289e-2 * \pi_3 + \\
& .1615093651e-1 * \pi_4 + .2198957156e-1 * \pi_5 + .2825233157e-1 * \pi_6 + .3 \\
& 973290457e-1 * \pi_7 + .4847196179e-1 * \pi_8 + .7367843964e-1 * \pi_9 + .79 \\
& 04055237e-1 * \pi_{10} + .1414132199 * \pi_{11} + .1120209867 * \pi_{12} + .426939 \\
& 3847 * \pi_{13} + x^7 - y^7 = .233;
\end{aligned}$$

$$res7 := .003580304552 \pi_1 + .003677652820 \pi_2 + .005051753289 \pi_3 + .01615093651 \pi_4$$

```

+ .02198957156  $\pi_5$  + .02825233157  $\pi_6$  + .03973290457  $\pi_7$  + .04847196179  $\pi_8$ 
+ .07367843964  $\pi_9$  + .07904055237  $\pi_{10}$  + .1414132199  $\pi_{11}$  + .1120209867  $\pi_{12}$ 
+ .4269393847  $\pi_{13}$  + x7 - y7 = .233
-
> res8 :=
.8108537910e-2*pi[1]+.7473571793e-2*pi[2]+.9283604628e-2*pi[3]+.
2990750987e-1*pi[4]+.3690049727e-1*pi[5]+.4368197230e-1*pi[6]+.5
529096411e-1*pi[7]+.6274998046e-1*pi[8]+.8483558627e-1*pi[9]+.86
07238745e-1*pi[10]+.1349009323*pi[11]+.1032900111*pi[12]+.337504
4448*pi[13]+x8-y8 = .267;
res8 := .008108537910  $\pi_1$  + .007473571793  $\pi_2$  + .009283604628  $\pi_3$  + .02990750987  $\pi_4$ 
+ .03690049727  $\pi_5$  + .04368197230  $\pi_6$  + .05529096411  $\pi_7$  + .06274998046  $\pi_8$ 
+ .08483558627  $\pi_9$  + .08607238745  $\pi_{10}$  + .1349009323  $\pi_{11}$  + .1032900111  $\pi_{12}$ 
+ .3375044448  $\pi_{13}$  + x8 - y8 = .267
-
> res9 :=
.1560749558e-1*pi[1]+.1304305339e-1*pi[2]+.1485756993e-1*pi[3]+.
4842275228e-1*pi[4]+.5487206542e-1*pi[5]+.6032776168e-1*pi[6]+.6
976998696e-1*pi[7]+.7409449922e-1*pi[8]+.9064615775e-1*pi[9]+.87
25551762e-1*pi[10]+.1221013507*pi[11]+.9045490452e-1*pi[12]+.258
5468847*pi[13]+x9-y9 = .3;
res9 := .01560749558  $\pi_1$  + .01304305339  $\pi_2$  + .01485756993  $\pi_3$  + .04842275228  $\pi_4$ 
+ .05487206542  $\pi_5$  + .06032776168  $\pi_6$  + .06976998696  $\pi_7$  + .07409449922  $\pi_8$ 
+ .09064615775  $\pi_9$  + .08725551762  $\pi_{10}$  + .1221013507  $\pi_{11}$  + .09045490452  $\pi_{12}$ 
+ .2585468847  $\pi_{13}$  + x9 - y9 = .3
-
> res10 :=
.2678822532e-1*pi[1]+.2041755755e-1*pi[2]+.2150431253e-1*pi[3]+.
7115382574e-1*pi[4]+.7463867407e-1*pi[5]+.7656605175e-1*pi[6]+.8
163577109e-1*pi[7]+.8138579716e-1*pi[8]+.9104336011e-1*pi[9]+.83
26337778e-1*pi[10]+.1052490586*pi[11]+.7543938798e-1*pi[12]+.190
9146002*pi[13]+x10-y10 = .333;
res10 := .02678822532  $\pi_1$  + .02041755755  $\pi_2$  + .02150431253  $\pi_3$  + .07115382574  $\pi_4$ 
+ .07463867407  $\pi_5$  + .07656605175  $\pi_6$  + .08163577109  $\pi_7$  + .08138579716  $\pi_8$ 
+ .09104336011  $\pi_9$  + .08326337778  $\pi_{10}$  + .1052490586  $\pi_{11}$  + .07543938798  $\pi_{12}$ 
+ .1909146002  $\pi_{13}$  + x10 - y10 = .333
-
> res11 :=
.4228583645e-1*pi[1]+.2946391306e-1*pi[2]+.2881733836e-1*pi[3]+.
9715756666e-1*pi[4]+.9472961137e-1*pi[5]+.9085448362e-1*pi[6]+.8
974188913e-1*pi[7]+.8407469068e-1*pi[8]+.8650995393e-1*pi[9]+.75
15218007e-1*pi[10]+.8638577912e-1*pi[11]+.5984890057e-1*pi[12]+.
1349778568*pi[13]+x11-y11 = .367;
res11 := .04228583645  $\pi_1$  + .02946391306  $\pi_2$  + .02881733836  $\pi_3$  + .09715756666  $\pi_4$ 

```

$$\begin{aligned}
& +.09472961137 \pi_5 + .09085448362 \pi_6 + .08974188913 \pi_7 + .08407469068 \pi_8 \\
& + .08650995393 \pi_9 + .07515218007 \pi_{10} + .08638577912 \pi_{11} + .05984890057 \pi_{12} \\
& + .1349778568 \pi_{13} + x/1 - y/1 = .367
\end{aligned}$$

```

> res12 :=
.6080668643e-1*pi[1]+.3899974135e-1*pi[2]+.3568441297e-1*pi[3]+.
1228499692*pi[4]+.1121338704*pi[5]+.1010980340*pi[6]+.9324770304
e-1*pi[7]+.8245303924e-1*pi[8]+.7875850516e-1*pi[9]+.6516575473e
-1*pi[10]+.6883792720e-1*pi[11]+.4614344286e-1*pi[12]+.938209133
8e-1*pi[13]+x12-y12 = .4;

```

$$\begin{aligned}
res12 := & .06080668643 \pi_1 + .03899974135 \pi_2 + .03568441297 \pi_3 + .1228499692 \pi_4 \\
& + .1121338704 \pi_5 + .1010980340 \pi_6 + .09324770304 \pi_7 + .08245303924 \pi_8 \\
& + .07875850516 \pi_9 + .06516575473 \pi_{10} + .06883792720 \pi_{11} + .04614344286 \pi_{12} \\
& + .09382091338 \pi_{13} + x/2 - y/2 = .4
\end{aligned}$$

```

> res13 :=
.8206290693e-1*pi[1]+.4861985578e-1*pi[2]+.4179290929e-1*pi[3]+.
1472572113*pi[4]+.1263403150*pi[5]+.1073920124*pi[6]+.9291558262
e-1*pi[7]+.7771798097e-1*pi[8]+.6928734423e-1*pi[9]+.5466320922e
-1*pi[10]+.5340146946e-1*pi[11]+.3463408327e-1*pi[12]+.639151195
1e-1*pi[13]+x13-y13 = .433;

```

$$\begin{aligned}
res13 := & .08206290693 \pi_1 + .04861985578 \pi_2 + .04179290929 \pi_3 + .1472572113 \pi_4 \\
& + .1263403150 \pi_5 + .1073920124 \pi_6 + .09291558262 \pi_7 + .07771798097 \pi_8 \\
& + .06928734423 \pi_9 + .05466320922 \pi_{10} + .05340146946 \pi_{11} + .03463408327 \pi_{12} \\
& + .06391511951 \pi_{13} + x/3 - y/3 = .433
\end{aligned}$$

```

> res14 :=
.1060067090*pi[1]+.5806313242e-1*pi[2]+.4696940056e-1*pi[3]+.169
8628580*pi[4]+.1372062519*pi[5]+.1100576121*pi[6]+.8949965366e-1
*pi[7]+.7084184224e-1*pi[8]+.5910088420e-1*pi[9]+.4444111811e-1*
pi[10]+.4027849508e-1*pi[11]+.2524978660e-1*pi[12]+.4242225628e-
1*pi[13]+x14-y14 = .467;

```

$$\begin{aligned}
res14 := & .1060067090 \pi_1 + .05806313242 \pi_2 + .04696940056 \pi_3 + .1698628580 \pi_4 \\
& + .1372062519 \pi_5 + .1100576121 \pi_6 + .08949965366 \pi_7 + .07084184224 \pi_8 \\
& + .05910088420 \pi_9 + .04444111811 \pi_{10} + .04027849508 \pi_{11} + .02524978660 \pi_{12} \\
& + .04242225628 \pi_{13} + x/4 - y/4 = .467
\end{aligned}$$

```

> res15 :=
.1305087280*pi[1]+.6641670211e-1*pi[2]+.5080156554e-1*pi[3]+.188
7715601*pi[4]+.1442235180*pi[5]+.1096056863*pi[6]+.8419674884e-1
*pi[7]+.6328335258e-1*pi[8]+.4969022271e-1*pi[9]+.3569734640e-1*
pi[10]+.3022024310e-1*pi[11]+.1832950399e-1*pi[12]+.2825482179e-
1*pi[13]+x15-y15 = .5;

```

$$res15 := .1305087280 \pi_1 + .06641670211 \pi_2 + .05080156554 \pi_3 + .1887715601 \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& +.1442235180 \pi_5 + .1096056863 \pi_6 + .08419674884 \pi_7 + .06328335258 \pi_8 \\
& + .04969022271 \pi_9 + .03569734640 \pi_{10} + .03022024310 \pi_{11} + .01832950399 \pi_{12} \\
& + .02825482179 \pi_{13} + x/5 - y/5 = .5
\end{aligned}$$

> res16 :=

$$\begin{aligned}
& .1556855321 * \pi_1 + .7378351419 e-1 * \pi_2 + .5349566429 e-1 * \pi_3 + .204 \\
& 5776811 * \pi_4 + .1481922592 * \pi_5 + .1069145598 * \pi_6 + .7778823884 e-1 \\
& * \pi_7 + .5560700524 e-1 * \pi_8 + .4122591717 e-1 * \pi_9 + .2831943989 e-1 * \\
& \pi_{10} + .2248001535 e-1 * \pi_{11} + .1319221231 e-1 * \pi_{12} + .1873796068 e- \\
& 1 * \pi_{13} + x/6 - y/6 = .533;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res16 := & .1556855321 \pi_1 + .07378351419 \pi_2 + .05349566429 \pi_3 + .2045776811 \pi_4 \\
& + .1481922592 \pi_5 + .1069145598 \pi_6 + .07778823884 \pi_7 + .05560700524 \pi_8 \\
& + .04122591717 \pi_9 + .02831943989 \pi_{10} + .02248001535 \pi_{11} + .01319221231 \pi_{12} \\
& + .01873796068 \pi_{13} + x/6 - y/6 = .533
\end{aligned}$$

> res17 :=

$$\begin{aligned}
& .1818916106 * \pi_1 + .8027481448 e-1 * \pi_2 + .5520239391 e-1 * \pi_3 + .217 \\
& 7802883 * \pi_4 + .1496552907 * \pi_5 + .1025258841 * \pi_6 + .7070368158 e-1 \\
& * \pi_7 + .4807014821 e-1 * \pi_8 + .3368635113 e-1 * \pi_9 + .2211529115 e-1 * \\
& \pi_{10} + .1648625402 e-1 * \pi_{11} + .9351407971 e-2 * \pi_{12} + .1225658376 e- \\
& 1 * \pi_{13} + x/7 - y/7 = .567;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res17 := & .1818916106 \pi_1 + .08027481448 \pi_2 + .05520239391 \pi_3 + .2177802883 \pi_4 \\
& + .1496552907 \pi_5 + .1025258841 \pi_6 + .07070368158 \pi_7 + .04807014821 \pi_8 \\
& + .03368635113 \pi_9 + .02211529115 \pi_{10} + .01648625402 \pi_{11} + .009351407971 \pi_{12} \\
& + .01225658376 \pi_{13} + x/7 - y/7 = .567
\end{aligned}$$

> res18 :=

$$\begin{aligned}
& .2072848196 * \pi_1 + .8552354856 e-1 * \pi_2 + .5597183945 e-1 * \pi_3 + .227 \\
& 8952667 * \pi_4 + .1490664231 * \pi_5 + .9727542845 e-1 * \pi_6 + .6381019469 \\
& e-1 * \pi_7 + .4137692184 e-1 * \pi_8 + .2751846221 e-1 * \pi_9 + .1730193132 e- \\
& 1 * \pi_{10} + .1217087998 e-1 * \pi_{11} + .6679520904 e-2 * \pi_{12} + .812476320 \\
& 6 e-2 * \pi_{13} + x/8 - y/8 = .6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res18 := & .2072848196 \pi_1 + .08552354856 \pi_2 + .05597183945 \pi_3 + .2278952667 \pi_4 \\
& + .1490664231 \pi_5 + .09727542845 \pi_6 + .06381019469 \pi_7 + .04137692184 \pi_8 \\
& + .02751846221 \pi_9 + .01730193132 \pi_{10} + .01217087998 \pi_{11} + .006679520904 \pi_{12} \\
& + .008124763206 \pi_{13} + x/8 - y/8 = .6
\end{aligned}$$

> res19 :=

$$\begin{aligned}
& .2324339980 * \pi_1 + .8979536108 e-1 * \pi_2 + .5601946282 e-1 * \pi_3 + .235 \\
& 6843596 * \pi_4 + .1469697588 * \pi_5 + .9148307148 e-1 * \pi_6 + .5717996919 \\
& e-1 * \pi_7 + .3540471743 e-1 * \pi_8 + .2239202367 e-1 * \pi_9 + .1349263015 e- \\
& 1 * \pi_{10} + .8978908045 e-2 * \pi_{11} + .4767768318 e-2 * \pi_{12} + .539797108 \\
& 5 e-2 * \pi_{13} + x/9 - y/9 = .633;
\end{aligned}$$

$$res19 := .2324339980 \pi_1 + .08979536108 \pi_2 + .05601946282 \pi_3 + .2356843596 \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& +.1469697588 \pi_3 + .09148307148 \pi_6 + .05717996919 \pi_7 + .03540471743 \pi_8 \\
& + .02239202367 \pi_9 + .01349263015 \pi_{10} + .008978908045 \pi_{11} + .004767768318 \pi_{12} \\
& + .005397971085 \pi_{13} + x19 - y19 = .633
\end{aligned}$$

> res20 :=

$$\begin{aligned}
& .2579481395 * \pi_1 + .9325933924e-1 * \pi_2 + .5546095846e-1 * \pi_3 + .241 \\
& 6207567 * \pi_4 + .1436424963 * \pi_5 + .8527717255e-1 * \pi_6 + .5079150138 \\
& e-1 * \pi_7 + .3002192071e-1 * \pi_8 + .1806241763e-1 * \pi_9 + .1042426651e \\
& -1 * \pi_{10} + .6566812816e-2 * \pi_{11} + .3370390710e-2 * \pi_{12} + .355382696 \\
& 3e-2 * \pi_{13} + x20 - y20 = .667;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res20 := & .2579481395 \pi_1 + .09325933924 \pi_2 + .05546095846 \pi_3 + .2416207567 \pi_4 \\
& + .1436424963 \pi_5 + .08527717255 \pi_6 + .05079150138 \pi_7 + .03002192071 \pi_8 \\
& + .01806241763 \pi_9 + .01042426651 \pi_{10} + .006566812816 \pi_{11} + .003370390710 \pi_{12} \\
& + .003553826963 \pi_{13} + x20 - y20 = .667
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> obj := & (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x \\
& 4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/10 \\
& 00) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11 \\
& +y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * \\
& (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000 \\
&) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
obj := & \frac{57}{1000} x8 + \frac{29}{1000} x10 + \frac{43}{500} y6 + \frac{43}{500} x6 + \frac{7}{500} x11 + \frac{3}{500} y13 + \frac{57}{1000} y8 + \frac{9}{125} y7 \\
& + \frac{9}{125} x7 + \frac{3}{1000} x15 + \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{1000} x18 + \frac{3}{500} x13 + \frac{143}{1000} x1 + \frac{143}{1000} y1 \\
& + \frac{43}{250} x2 + \frac{43}{250} y2 + \frac{143}{1000} x3 + \frac{143}{1000} y3 + \frac{57}{500} x4 + \frac{57}{500} y4 + \frac{1}{10} x5 + \frac{1}{10} y5 + \frac{43}{1000} y9 \\
& + \frac{43}{1000} x9 + \frac{29}{1000} y10 + \frac{7}{500} y11 + \frac{1}{250} y14 + \frac{7}{1000} y12 + \frac{7}{1000} x12 + \frac{1}{1000} y16 + \frac{1}{1000} y18 \\
& + \frac{1}{1000} x16 + \frac{1}{1000} y19 + \frac{1}{1000} x19 + \frac{1}{1000} y20 + \frac{1}{1000} x20 + \frac{1}{1000} x17 + \frac{1}{1000} y17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> dese := & (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (\\
& x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1 \\
& 000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x1 \\
& 1-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14) \\
& * (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/100 \\
& 0) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dese := & \frac{57}{1000} x8 + \frac{29}{1000} x10 - \frac{43}{500} y6 + \frac{43}{500} x6 + \frac{7}{500} x11 - \frac{3}{500} y13 - \frac{57}{1000} y8 - \frac{9}{125} y7 \\
& + \frac{9}{125} x7 + \frac{3}{1000} x15 - \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{1000} x18 + \frac{3}{500} x13 + \frac{143}{1000} x1 - \frac{143}{1000} y1 \\
& + \frac{43}{250} x2 - \frac{43}{250} y2 + \frac{143}{1000} x3 - \frac{143}{1000} y3 + \frac{57}{500} x4 - \frac{57}{500} y4 + \frac{1}{10} x5 - \frac{1}{10} y5 - \frac{43}{1000} y9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{43}{1000}x_9 - \frac{29}{1000}y_{10} - \frac{7}{500}y_{11} - \frac{1}{250}y_{14} - \frac{7}{1000}y_{12} + \frac{7}{1000}x_{12} - \frac{1}{1000}y_{16} - \frac{1}{1000}y_{18} \\
& + \frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{19} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}x_{20} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{1000}y_{17}
\end{aligned}$$

≡ Sustituimos las primas de Norberg para calcular las variables de holgura

```

> ec1:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res1);
ec1 := .1180403362 + x1 - y1 = .033
> y1:=.1180403228-0.033;
y1 := .0850403228
> ec2:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res2);
ec2 := .1231550024 + x2 - y2 = .067
> y2:=.1231550024-0.067;
y2 := .0561550024
> ec3:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res3);
ec3 := .1293530225 + x3 - y3 = .1
> y3:=.1293530225-0.1;
y3 := .0293530225
> ec4:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res4);
ec4 := .1371790535 + x4 - y4 = .133
> y4:=.1371790535-0.133;
y4 := .0041790535
> ec5:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res5);
ec5 := .1474614781 + x5 - y5 = .167
> x5:=0.167-.1474614781;
x5 := .0195385219
> ec6:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res6);
ec6 := .1600708053 + x6 - y6 = .2
> x6:=0.2-.1600708053;

```

```

                                x6 := .0399291947
> ec7:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res7);
                                ec7 := .1755164738 + x7 - y7 = .233
> x7:=0.233-.1755164738;
                                x7 := .0574835262
> ec8:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res8);
                                ec8 := .1941803820 + x8 - y8 = .267
> x8:=0.267-.1941803820;
                                x8 := .0728196180
> ec9:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0.
215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res9);
                                ec9 := .2141842671 + x9 - y9 = .3
> x9:=0.3-.2141842671;
                                x9 := .0858157329
> ec10:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res10);
                                ec10 := .2348523202 + x10 - y10 = .333
> x10:=0.333-.2348523202;
                                x10 := .0981476798
> ec11:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res11);
                                ec11 := .2555047607 + x11 - y11 = .367
> x11:=0.367-.2555047607;
                                x11 := .1114952393
> ec12:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res12);
                                ec12 := .2739076835 + x12 - y12 = .4
> x12:=0.4-.2739076835;
                                x12 := .1260923165
> ec13:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res13);
                                ec13 := .2901369321 + x13 - y13 = .433
> x13:=0.433-.2901369321;
                                x13 := .1428630679

```

```

> ec14:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res14);

      ec14 := .3044430283 + x14 - y14 = .467
> x14:=0.467-.3044430283;

      x14 := .1625569717
> ec15:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res15);

      ec15 := .3161312513 + x15 - y15 = .5
> x15:=0.5-.3161312513;

      x15 := .1838687487
> ec16:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res16);

      ec16 := .3259363611 + x16 - y16 = .533
> x16:=0.533-.3259363611;

      x16 := .2070636389
> ec17:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res17);

      ec17 := .3343995617 + x17 - y17 = .567
> x17:=0.567-.3343995617;

      x17 := .2326004383
> ec18:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res18);

      ec18 := .3413225831 + x18 - y18 = .6
> x18:=0.6-.3413225831;

      x18 := .2586774169
> ec19:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res19);

      ec19 := .3472254655 + x19 - y19 = .633
> x19:=0.633-.3472254655;

      x19 := .2857745345
> ec20:=subs({pi[1]=0.418,pi[2]=0.379,pi[3]=0.349,pi[4]=0.357,pi[5]
]=0.329,pi[6]=0.305,pi[7]=0.278,pi[8]=0.260,pi[9]=0.229,pi[10]=0
.215,pi[11]=0.173,pi[12]=0.166,pi[13]=0.114},res20);

      ec20 := .3524539429 + x20 - y20 = .667
> x20:=0.667-.3524539429;

      x20 := .3145460571
> objNorb1:=subs({x1=0,y1=.850403228e-1,x2=0,y2=.561550024e-1,x3=0

```



```
,y3=.293530225e-1,x4=0,y4=.41790535e-2,x5=.195385219e-1,y5=0,x6=
.399291947e-1,y6=0,x7=.574835262e-1,y7=0,x8=.728196180e-1,y8=0,x
9=.858157329e-1,y9=0,x10=.981476798e-1,y10=0,x11=.1114952393,y11
=0,x12=.1260923165,y12=0,x13=.1428630679,y13=0,x14=.1625569717,y
14=0,x15=.1838687487,y15=0,x16=.2070636389,y16=0,x17=.2326004383
,y17=0,x18=.2586774169,y18=0,x19=.2857745345,y19=0,x20=.31454605
71,y20=0},obj);
```

```
objNorbl := .05250822938
```

```
> deseNorberg1:=subs({x1=0,y1=.850403228e-1,x2=0,y2=.561550024e-1,
x3=0,y3=.293530225e-1,x4=0,y4=.41790535e-2,x5=.195385219e-1,y5=0
,x6=.399291947e-1,y6=0,x7=.574835262e-1,y7=0,x8=.728196180e-1,y8
=0,x9=.858157329e-1,y9=0,x10=.981476798e-1,y10=0,x11=.1114952393
,y11=0,x12=.1260923165,y12=0,x13=.1428630679,y13=0,x14=.16255697
17,y14=0,x15=.1838687487,y15=0,x16=.2070636389,y16=0,x17=.232600
4383,y17=0,x18=.2586774169,y18=0,x19=.2857745345,y19=0,x20=.3145
460571,y20=0},dese);
```

```
deseNorberg1 := -.0004784124116
```

```
>
```

fun-obj-Norberg2

```
> restart;
```

▣ Cálculo del valor de la función objetivo y de las variables de holgura para el valor de las primas de Norberg 2

```
> with(student):
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> with(simplex):
Warning, new definition for basis
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
Warning, new definition for pivot
> res1 :=
.1355558514e-7*pi[1]+.4443152864e-7*pi[2]+.2501262343e-6*pi[3]+.
7419567538e-6*pi[4]+.4671064000e-5*pi[5]+.1205030794e-4*pi[6]+.8
845588615e-4*pi[7]+.1865337089e-3*pi[8]+.1703009192e-2*pi[9]+.26
45881752e-2*pi[10]+.3231076511e-1*pi[11]+.3126191136e-1*pi[12]+.
9317856718*pi[13]+x1-y1 = .33e-1;
res1 := .1355558514 10-7 π1 + .4443152864 10-7 π2 + .2501262343 10-6 π3
+ .7419567538 10-6 π4 + .4671064000 10-5 π5 + .00001205030794 π6 + .00008845588615 π7
+ .0001865337089 π8 + .001703009192 π9 + .002645881752 π10 + .03231076511 π11
+ .03126191136 π12 + .9317856718 π13 + x1 - y1 = .033
> res2 :=
.1393805631e-5*pi[1]+.3578191466e-5*pi[2]+.1152761065e-4*pi[3]+.
2788582302e-4*pi[4]+.9658755359e-4*pi[5]+.2123966577e-3*pi[6]+.8
249288815e-3*pi[7]+.1552695091e-2*pi[8]+.7227911023e-2*pi[9]+.10
47929679e-1*pi[10]+.6348030509e-1*pi[11]+.5936647679e-1*pi[12]+.
8567150165*pi[13]+x2-y2 = .67e-1;
res2 := .1393805631 10-5 π1 + .3578191466 10-5 π2 + .00001152761065 π3
+ .00002788582302 π4 + .00009658755359 π5 + .0002123966577 π6 + .0008249288815 π7
+ .001552695091 π8 + .007227911023 π9 + .01047929679 π10 + .06348030509 π11
+ .05936647679 π12 + .8567150165 π13 + x2 - y2 = .067
> res3 :=
.2081593242e-4*pi[1]+.4459205993e-4*pi[2]+.1073589354e-3*pi[3]+.
2213023715e-3*pi[4]+.5600748933e-3*pi[5]+.1078269173e-2*pi[6]+.2
978131866e-2*pi[7]+.5071094719e-2*pi[8]+.1630534757e-1*pi[9]+.22
16664979e-1*pi[10]+.9054209499e-1*pi[11]+.8192587524e-1*pi[12]+.
7789783927*pi[13]+x3-y3 = .1;
res3 := .00002081593242 π1 + .00004459205993 π2 + .0001073589354 π3
```

$$\begin{aligned}
& + .0002213023715 \pi_4 + .0005600748933 \pi_5 + .001078269173 \pi_6 + .002978131866 \pi_7 \\
& + .005071094719 \pi_8 + .01630534757 \pi_9 + .02216664979 \pi_{10} + .09054209499 \pi_{11} \\
& + .08192587524 \pi_{12} + .7789783927 \pi_{13} + x^3 - y^3 = .1
\end{aligned}$$

```

> res4 :=
.1477497102e-3*pi[1]+.2729879169e-3*pi[2]+.5386477517e-3*pi[3]+.
9699506503e-3*pi[4]+.1982390577e-2*pi[5]+.3395775673e-2*pi[6]+.7
424941268e-2*pi[7]+.1153145664e-1*pi[8]+.2865966126e-1*pi[9]+.36
62302250e-1*pi[10]+.1131341615*pi[11]+.9904500818e-1*pi[12]+.696
2742466*pi[13]+x4-y4 = .133;

```

$$\begin{aligned}
res4 := & .0001477497102 \pi_1 + .0002729879169 \pi_2 + .0005386477517 \pi_3 + .0009699506503 \pi_4 \\
& + .001982390577 \pi_5 + .003395775673 \pi_6 + .007424941268 \pi_7 + .01153145664 \pi_8 \\
& + .02865966126 \pi_9 + .03662302250 \pi_{10} + .1131341615 \pi_{11} + .09904500818 \pi_{12} \\
& + .6962742466 \pi_{13} + x^4 - y^4 = .133
\end{aligned}$$

```

> res5 :=
.7128337922e-3*pi[1]+.1157873313e-2*pi[2]+.1954611528e-2*pi[3]+.
3120143766e-2*pi[4]+.5400266247e-2*pi[5]+.8309144741e-2*pi[6]+.1
515230079e-1*pi[7]+.2155652943e-1*pi[8]+.4378372681e-1*pi[9]+.52
61346612e-1*pi[10]+.1301519041*pi[11]+.1101344906*pi[12]+.605952
7089*pi[13]+x5-y5 = .167;

```

$$\begin{aligned}
res5 := & .0007128337922 \pi_1 + .001157873313 \pi_2 + .001954611528 \pi_3 + .003120143766 \pi_4 \\
& + .005400266247 \pi_5 + .008309144741 \pi_6 + .01515230079 \pi_7 + .02155652943 \pi_8 \\
& + .04378372681 \pi_9 + .05261346612 \pi_{10} + .1301519041 \pi_{11} + .1101344906 \pi_{12} \\
& + .6059527089 \pi_{13} + x^5 - y^5 = .167
\end{aligned}$$

```

> res6 :=
.2455001533e-2*pi[1]+.3577509531e-2*pi[2]+.5338949100e-2*pi[3]+.
7686357437e-2*pi[4]+.1168070217e-1*pi[5]+.1635778732e-1*pi[6]+.2
589932759e-1*pi[7]+.3403659608e-1*pi[8]+.5904915644e-1*pi[9]+.66
98318172e-1*pi[10]+.1390218085*pi[11]+.1138214303*pi[12]+.514092
1921*pi[13]+x6-y6 = .2;

```

$$\begin{aligned}
res6 := & .002455001533 \pi_1 + .003577509531 \pi_2 + .005338949100 \pi_3 + .007686357437 \pi_4 \\
& + .01168070217 \pi_5 + .01635778732 \pi_6 + .02589932759 \pi_7 + .03403659608 \pi_8 \\
& + .05904915644 \pi_9 + .06698318172 \pi_{10} + .1390218085 \pi_{11} + .1138214303 \pi_{12} \\
& + .5140921921 \pi_{13} + x^6 - y^6 = .2
\end{aligned}$$

```

> res7 :=
.6814118287e-2*pi[1]+.9017258448e-2*pi[2]+.1211483088e-1*pi[3]+.
1589524470e-1*pi[4]+.2164144573e-1*pi[5]+.2780505774e-1*pi[6]+.3
910387813e-1*pi[7]+.4770458415e-1*pi[8]+.7251200888e-1*pi[9]+.77
78923133e-1*pi[10]+.1391744528*pi[11]+.1102475403*pi[12]+.420180
3485*pi[13]+x7-y7 = .233;

```

$$res7 := .006814118287 \pi_1 + .009017258448 \pi_2 + .01211483088 \pi_3 + .01589524470 \pi_4$$

```

+ .02164144573  $\pi_5$  + .02780505774  $\pi_6$  + .03910387813  $\pi_7$  + .04770458415  $\pi_8$ 
+ .07251200888  $\pi_9$  + .07778923133  $\pi_{10}$  + .1391744528  $\pi_{11}$  + .1102475403  $\pi_{12}$ 
+ .4201803485  $\pi_{13}$  + x7 - y7 = .233
-
> res8 :=
.1621554785e-1*pi[1]+.1962154918e-1*pi[2]+.2397459827e-1*pi[3]+.
2883571029e-1*pi[4]+.3557808964e-1*pi[5]+.4211653678e-1*pi[6]+.5
330949581e-1*pi[7]+.6050120281e-1*pi[8]+.8179532451e-1*pi[9]+.82
98780282e-1*pi[10]+.1300664752*pi[11]+.9958839796e-1*pi[12]+.325
4092688*pi[13]+x8-y8 = .267;
res8 := .01621554785  $\pi_1$  + .01962154918  $\pi_2$  + .02397459827  $\pi_3$  + .02883571029  $\pi_4$ 
+ .03557808964  $\pi_5$  + .04211653678  $\pi_6$  + .05330949581  $\pi_7$  + .06050120281  $\pi_8$ 
+ .08179532451  $\pi_9$  + .08298780282  $\pi_{10}$  + .1300664752  $\pi_{11}$  + .09958839796  $\pi_{12}$ 
+ .3254092688  $\pi_{13}$  + x8 - y8 = .267
-
> res9 :=
.3223637902e-1*pi[1]+.3603389749e-1*pi[2]+.4053780673e-1*pi[3]+.
4511691675e-1*pi[4]+.5112593369e-1*pi[5]+.5620916860e-1*pi[6]+.6
500676999e-1*pi[7]+.6903604702e-1*pi[8]+.8445771943e-1*pi[9]+.81
29855987e-1*pi[10]+.1137654580*pi[11]+.8427952426e-1*pi[12]+.240
8958189*pi[13]+x9-y9 = .3;
res9 := .03223637902  $\pi_1$  + .03603389749  $\pi_2$  + .04053780673  $\pi_3$  + .04511691675  $\pi_4$ 
+ .05112593369  $\pi_5$  + .05620916860  $\pi_6$  + .06500676999  $\pi_7$  + .06903604702  $\pi_8$ 
+ .08445771943  $\pi_9$  + .08129855987  $\pi_{10}$  + .1137654580  $\pi_{11}$  + .08427952426  $\pi_{12}$ 
+ .2408958189  $\pi_{13}$  + x9 - y9 = .3
-
> res10 :=
.5614094792e-1*pi[1]+.5832068840e-1*pi[2]+.6084542499e-1*pi[3]+.
6300944177e-1*pi[4]+.6609540878e-1*pi[5]+.6780217575e-1*pi[6]+.7
229160705e-1*pi[7]+.7207024557e-1*pi[8]+.8062238835e-1*pi[9]+.73
73291550e-1*pi[10]+.9320207939e-1*pi[11]+.6680447259e-1*pi[12]+.
1690622035*pi[13]+x10-y10 = .333;
res10 := .05614094792  $\pi_1$  + .05832068840  $\pi_2$  + .06084542499  $\pi_3$  + .06300944177  $\pi_4$ 
+ .06609540878  $\pi_5$  + .06780217575  $\pi_6$  + .07229160705  $\pi_7$  + .07207024557  $\pi_8$ 
+ .08062238835  $\pi_9$  + .07373291550  $\pi_{10}$  + .09320207939  $\pi_{11}$  + .06680447259  $\pi_{12}$ 
+ .1690622035  $\pi_{13}$  + x10 - y10 = .333
-
> res11 :=
.8835478010e-1*pi[1]+.8555295378e-1*pi[2]+.8307769156e-1*pi[3]+.
8026111271e-1*pi[4]+.7825539811e-1*pi[5]+.7505418529e-1*pi[6]+.7
413508018e-1*pi[7]+.6945345188e-1*pi[8]+.7146520485e-1*pi[9]+.62
08263548e-1*pi[10]+.7136262498e-1*pi[11]+.4944071481e-1*pi[12]+.
1115041661*pi[13]+x11-y11 = .367;
res11 := .08835478010  $\pi_1$  + .08555295378  $\pi_2$  + .08307769156  $\pi_3$  + .08026111271  $\pi_4$ 

```

$$\begin{aligned}
& +.07825539811 \pi_5 + .07505418529 \pi_6 + .07413508018 \pi_7 + .06945345188 \pi_8 \\
& + .07146520485 \pi_9 + .06208263548 \pi_{10} + .07136262498 \pi_{11} + .04944071481 \pi_{12} \\
& + .1115041661 \pi_{13} + x11 - y11 = .367
\end{aligned}$$

> res12 :=

$$\begin{aligned}
& .1248765923 \pi_1 + .1134137620 \pi_2 + .1032046790 \pi_3 + .935760059 \\
& 6e-1 \pi_4 + .8541345037e-1 \pi_5 + .7700734704e-1 \pi_6 + .7102767469 \\
& e-1 \pi_7 + .6280527525e-1 \pi_8 + .5999111333e-1 \pi_9 + .4963738424e-1 \\
& \pi_{10} + .5243451395e-1 \pi_{11} + .3514790552e-1 \pi_{12} + .714642961 \\
& 0e-1 \pi_{13} + x12 - y12 = .4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res12 := & .1248765923 \pi_1 + .1134137620 \pi_2 + .1032046790 \pi_3 + .09357600596 \pi_4 \\
& + .08541345037 \pi_5 + .07700734704 \pi_6 + .07102767469 \pi_7 + .06280527525 \pi_8 \\
& + .05999111333 \pi_9 + .04963738424 \pi_{10} + .05243451395 \pi_{11} + .03514790552 \pi_{12} \\
& + .07146429610 \pi_{13} + x12 - y12 = .4
\end{aligned}$$

> res13 :=

$$\begin{aligned}
& .1640097660 \pi_1 + .1401995005 \pi_2 + .1200069766 \pi_3 + .102460204 \\
& 6 \pi_4 + .8790642142e-1 \pi_5 + .7472236775e-1 \pi_6 + .6464980140e-1 \\
& \pi_7 + .5407545073e-1 \pi_8 + .4820949089e-1 \pi_9 + .3803415350e-1 \pi_{10} \\
& + .3715624664e-1 \pi_{11} + .2409807354e-1 \pi_{12} + .4447154602e-1 \\
& \pi_{13} + x13 - y13 = .433;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res13 := & .1640097660 \pi_1 + .1401995005 \pi_2 + .1200069766 \pi_3 + .1024602046 \pi_4 \\
& + .08790642142 \pi_5 + .07472236775 \pi_6 + .06464980140 \pi_7 + .05407545073 \pi_8 \\
& + .04820949089 \pi_9 + .03803415350 \pi_{10} + .03715624664 \pi_{11} + .02409807354 \pi_{12} \\
& + .04447154602 \pi_{13} + x13 - y13 = .433
\end{aligned}$$

> res14 :=

$$\begin{aligned}
& .2047647352 \pi_1 + .1649587636 \pi_2 + .1330130742 \pi_3 + .107060566 \\
& 7 \pi_4 + .8647787575e-1 \pi_5 + .6936672636e-1 \pi_6 + .5640952879e-1 \\
& \pi_7 + .4464994837e-1 \pi_8 + .3724989888e-1 \pi_9 + .2801019304e-1 \pi_{10} \\
& + .2538658945e-1 \pi_{11} + .1591434769e-1 \pi_{12} + .2673775204e-1 \\
& \pi_{13} + x14 - y14 = .467;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res14 := & .2047647352 \pi_1 + .1649587636 \pi_2 + .1330130742 \pi_3 + .1070605667 \pi_4 \\
& + .08647787575 \pi_5 + .06936672636 \pi_6 + .05640952879 \pi_7 + .04464994837 \pi_8 \\
& + .03724989888 \pi_9 + .02801019304 \pi_{10} + .02538658945 \pi_{11} + .01591434769 \pi_{12} \\
& + .02673775204 \pi_{13} + x14 - y14 = .467
\end{aligned}$$

> res15 :=

$$\begin{aligned}
& .2432465940 \pi_1 + .1854786991 \pi_2 + .1415201674 \pi_3 + .107840418 \\
& 0 \pi_4 + .8239124767e-1 \pi_5 + .6261495658e-1 \pi_6 + .4809947290e-1 \\
& \pi_7 + .3615217897e-1 \pi_8 + .2838676712e-1 \pi_9 + .2039299127e-1 \pi_{10} \\
& + .1726406042e-1 \pi_{11} + .1047118177e-1 \pi_{12} + .1614126500e-1 \\
& \pi_{13} + x15 - y15 = .5;
\end{aligned}$$

$$res15 := .2432465940 \pi_1 + .1854786991 \pi_2 + .1415201674 \pi_3 + .1078404180 \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& +.08239124767 \pi_5 + .06261495658 \pi_6 + .04809947290 \pi_7 + .03615217897 \pi_8 \\
& +.02838676712 \pi_9 + .02039299127 \pi_{10} + .01726406042 \pi_{11} + .01047118177 \pi_{12} \\
& +.01614126500 \pi_{13} + x/5 - y/5 = .5
\end{aligned}$$

> res16 :=

$$\begin{aligned}
& .2798640462 * \pi_1 + .2024338058 * \pi_2 + .1464914391 * \pi_3 + .1059103053 * \pi_4 \\
& +.7671945155e-1 * \pi_5 + .5534989746e-1 * \pi_6 + .4027113805e-1 * \pi_7 \\
& +.2878786601e-1 * \pi_8 + .2134274554e-1 * \pi_9 + .1466103467e-1 * \pi_{10} \\
& +.1163795170e-1 * \pi_{11} + .6829636729e-2 * \pi_{12} + .9700681740e-2 * \pi_{13} \\
& + x/6 - y/6 = .533;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res16 := & .2798640462 \pi_1 + .2024338058 \pi_2 + .1464914391 \pi_3 + .1059103053 \pi_4 \\
& +.07671945155 \pi_5 + .05534989746 \pi_6 + .04027113805 \pi_7 + .02878786601 \pi_8 \\
& +.02134274554 \pi_9 + .01466103467 \pi_{10} + .01163795170 \pi_{11} + .006829636729 \pi_{12} \\
& +.009700681740 \pi_{13} + x/6 - y/6 = .533
\end{aligned}$$

> res17 :=

$$\begin{aligned}
& .3152929348 * \pi_1 + .2164325463 * \pi_2 + .1486157313 * \pi_3 + .1019809602 * \pi_4 \\
& +.7007975896e-1 * \pi_5 + .4801025907e-1 * \pi_6 + .3310873246e-1 * \pi_7 \\
& +.2251002531e-1 * \pi_8 + .1577445957e-1 * \pi_9 + .1035602725e-1 * \pi_{10} \\
& +.7720092312e-2 * \pi_{11} + .4379025994e-2 * \pi_{12} + .5739445763e-2 * \pi_{13} \\
& + x/7 - y/7 = .567;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res17 := & .3152929348 \pi_1 + .2164325463 \pi_2 + .1486157313 \pi_3 + .1019809602 \pi_4 \\
& +.07007975896 \pi_5 + .04801025907 \pi_6 + .03310873246 \pi_7 + .02251002531 \pi_8 \\
& +.01577445957 \pi_9 + .01035602725 \pi_{10} + .007720092312 \pi_{11} + .004379025994 \pi_{12} \\
& +.005739445763 \pi_{13} + x/7 - y/7 = .567
\end{aligned}$$

> res18 :=

$$\begin{aligned}
& .3473932424 * \pi_1 + .2270486903 * \pi_2 + .1484262314 * \pi_3 + .09698266907e-1 * \pi_4 \\
& +.6343641918e-1 * \pi_5 + .4139634333e-1 * \pi_6 + .2715494309e-1 * \pi_7 \\
& +.1760828281e-1 * \pi_8 + .1171070394e-1 * \pi_9 + .7362976457e-2 * \pi_{10} \\
& +.5179415784e-2 * \pi_{11} + .2842524031e-2 * \pi_{12} + .3457558589e-2 * \pi_{13} \\
& + x/8 - y/8 = .6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res18 := & .3473932424 \pi_1 + .2270486903 \pi_2 + .1484262314 \pi_3 + .09698266907 \pi_4 \\
& +.06343641918 \pi_5 + .04139634333 \pi_6 + .02715494309 \pi_7 + .01760828281 \pi_8 \\
& +.01171070394 \pi_9 + .007362976457 \pi_{10} + .005179415784 \pi_{11} + .002842524031 \pi_{12} \\
& +.003457558589 \pi_{13} + x/8 - y/8 = .6
\end{aligned}$$

> res19 :=

$$\begin{aligned}
& .3773299318 * \pi_1 + .2351576598 * \pi_2 + .1465761120 * \pi_3 + .9133061315e-1 * \pi_4 \\
& +.5695260553e-1 * \pi_5 + .3545082533e-1 * \pi_6 + .2215794761e-1 * \pi_7 \\
& +.1371976746e-1 * \pi_8 + .8677187046e-2 * \pi_9 + .5228561741e-2 * \pi_{10} \\
& +.3479438416e-2 * \pi_{11} + .1847569657e-2 * \pi_{12} + .2091780666e-2 * \pi_{13} \\
& + x/9 - y/9 = .633;
\end{aligned}$$

$$res19 := .3773299318 \pi_1 + .2351576598 \pi_2 + .1465761120 \pi_3 + .09133061315 \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& + .05695260553 \pi_5 + .03545082533 \pi_6 + .02215794761 \pi_7 + .01371976746 \pi_8 \\
& + .008677187046 \pi_9 + .005228561741 \pi_{10} + .003479438416 \pi_{11} + .001847569657 \pi_{12} \\
& + .002091780666 \pi_{13} + x19 - y19 = .633
\end{aligned}$$

> res20 :=

$$\begin{aligned}
& .4060702233 \pi_1 + .2412999456 \pi_2 + .1434034226 \pi_3 + .852026866 \\
& 0e-1 \pi_4 + .5065262929e-1 \pi_5 + .3007127494e-1 \pi_6 + .1791059845 \\
& e-1 \pi_7 + .1058662486e-1 \pi_8 + .6369346674e-2 \pi_9 + .3675907424e \\
& -2 \pi_{10} + .2315654133e-2 \pi_{11} + .1188499868e-2 \pi_{12} + .125318539 \\
& 7e-2 \pi_{13} + x20 - y20 = .667;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res20 := & .4060702233 \pi_1 + .2412999456 \pi_2 + .1434034226 \pi_3 + .08520268660 \pi_4 \\
& + .05065262929 \pi_5 + .03007127494 \pi_6 + .01791059845 \pi_7 + .01058662486 \pi_8 \\
& + .006369346674 \pi_9 + .003675907424 \pi_{10} + .002315654133 \pi_{11} + .001188499868 \pi_{12} \\
& + .001253185397 \pi_{13} + x20 - y20 = .667
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> obj := & (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x \\
& 4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/10 \\
& 00) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11 \\
& +y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * \\
& (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000 \\
&) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
obj := & \frac{43}{250} x2 + \frac{43}{250} y2 + \frac{143}{1000} x3 + \frac{143}{1000} y3 + \frac{57}{500} x4 + \frac{57}{500} y4 + \frac{1}{10} x5 + \frac{1}{10} y5 + \frac{43}{500} x6 \\
& + \frac{43}{500} y6 + \frac{9}{125} x7 + \frac{9}{125} y7 + \frac{57}{1000} x8 + \frac{57}{1000} y8 + \frac{43}{1000} x9 + \frac{43}{1000} y9 + \frac{29}{1000} x10 + \frac{29}{1000} y10 \\
& + \frac{143}{1000} x1 + \frac{143}{1000} y1 + \frac{7}{500} x11 + \frac{7}{500} y11 + \frac{7}{1000} x12 + \frac{7}{1000} y12 + \frac{3}{500} x13 + \frac{3}{500} y13 \\
& + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{250} y14 + \frac{3}{1000} x15 + \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{1000} x16 + \frac{1}{1000} y16 + \frac{1}{1000} x17 + \frac{1}{1000} y17 \\
& + \frac{1}{1000} x18 + \frac{1}{1000} y18 + \frac{1}{1000} x19 + \frac{1}{1000} y19 + \frac{1}{1000} x20 + \frac{1}{1000} y20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> dese := & (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (\\
& x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1 \\
& 000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x1 \\
& 1-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14) \\
& * (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/100 \\
& 0) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dese := & \frac{43}{250} x2 - \frac{43}{250} y2 + \frac{143}{1000} x3 - \frac{143}{1000} y3 + \frac{57}{500} x4 - \frac{57}{500} y4 + \frac{1}{10} x5 - \frac{1}{10} y5 + \frac{43}{500} x6 \\
& - \frac{43}{500} y6 + \frac{9}{125} x7 - \frac{9}{125} y7 + \frac{57}{1000} x8 - \frac{57}{1000} y8 + \frac{43}{1000} x9 - \frac{43}{1000} y9 + \frac{29}{1000} x10 - \frac{29}{1000} y10 \\
& + \frac{143}{1000} x1 - \frac{143}{1000} y1 + \frac{7}{500} x11 - \frac{7}{500} y11 + \frac{7}{1000} x12 - \frac{7}{1000} y12 + \frac{3}{500} x13 - \frac{3}{500} y13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{250}x_{14} - \frac{1}{250}y_{14} + \frac{3}{1000}x_{15} - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{1000}y_{17} \\
& + \frac{1}{1000}x_{18} - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{19} + \frac{1}{1000}x_{20} - \frac{1}{1000}y_{20}
\end{aligned}$$

Sustituimos las primas de Norberg 2 para calcular las variables de holgura

```

> ec1:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res1);
      ec1 := .1168897333 + x1 - y1 = .033
> y1:=.1168897333-0.033;
      y1 := .0838897333
> ec2:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res2);
      ec2 := .1217990038 + x2 - y2 = .067
> y2:=.1217990038-0.067;
      y2 := .0547990038
> ec3:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res3);
      ec3 := .1277353824 + x3 - y3 = .1
> y3:=.1277353824-0.1;
      y3 := .0277353824
> ec4:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res4);
      ec4 := .1352577924 + x4 - y4 = .133
> y4:=.1352577924-0.133;
      y4 := .0022577924
> ec5:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res5);
      ec5 := .1453059030 + x5 - y5 = .167
> x5:=0.167-.1453059030;
      x5 := .0216940970
> ec6:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res6);
      ec6 := .1580554189 + x6 - y6 = .2
> x6:=0.2-.1580554189;

```



```

x6 := .0419445811
> ec7:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res7);
ec7 := .1744599341 + x7 - y7 = .233
> x7:=0.233-.1744599341;
x7 := .0585400659
> ec8:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res8);
ec8 := .1954323395 + x8 - y8 = .267
> x8:=0.267-.1954323395;
x8 := .0715676605
> ec9:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0.
210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res9);
ec9 := .2190512080 + x9 - y9 = .3
> x9:=0.3-.2190512080;
x9 := .0809487920
> ec10:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
.210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res10);
ec10 := .2442083373 + x10 - y10 = .333
> x10:=0.333-.2442083373;
x10 := .0887916627
> ec11:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
.210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res11);
ec11 := .2694970533 + x11 - y11 = .367
> x11:=0.367-.2694970533;
x11 := .0975029467
> ec12:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
.210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res12);
ec12 := .2916215898 + x12 - y12 = .4
> x12:=0.4-.2916215898;
x12 := .1083784102
> ec13:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
.210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res13);
ec13 := .3104314128 + x13 - y13 = .433
> x13:=0.433-.3104314128;
x13 := .1225685872

```

```

> ec14:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
    ]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
    .210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res14);
    ec14 := .3262245020 + x14 - y14 = .467
> x14:=0.467-.3262245020;
    x14 := .1407754980
> ec15:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
    ]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
    .210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res15);
    ec15 := .3384502032 + x15 - y15 = .5
> x15:=0.5-.3384502032;
    x15 := .1615497968
> ec16:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
    ]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
    .210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res16);
    ec16 := .3481699315 + x16 - y16 = .533
> x16:=0.533-.3481699315;
    x16 := .1848300685
> ec17:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
    ]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
    .210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res17);
    ec17 := .3561303160 + x17 - y17 = .567
> x17:=0.567-.3561303160;
    x17 := .2108696840
> ec18:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
    ]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
    .210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res18);
    ec18 := .3623274796 + x18 - y18 = .6
> x18:=0.6-.3623274796;
    x18 := .2376725204
> ec19:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
    ]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
    .210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res19);
    ec19 := .3673767258 + x19 - y19 = .633
> x19:=0.633-.3673767258;
    x19 := .2656232742
> ec20:=subs({pi[1]=0.409,pi[2]=0.381,pi[3]=0.354,pi[4]=0.331,pi[5]
    ]=0.308,pi[6]=0.290,pi[7]=0.267,pi[8]=0.251,pi[9]=0.222,pi[10]=0
    .210,pi[11]=0.170,pi[12]=0.163,pi[13]=0.113},res20);
    ec20 := .3716608858 + x20 - y20 = .667
> x20:=0.667-.3716608858;
    x20 := .2953391142
> objNorb2:=subs({x1=0,y1=.838897333e-1,x2=0,y2=.547990038e-1,x3=0

```

```
,y3=.277353824e-1,x4=0,y4=.22577924e-2,x5=.216940970e-1,y5=0,x6=
.419445811e-1,y6=0,x7=.585400659e-1,y7=0,x8=.715676605e-1,y8=0,x
9=.809487920e-1,y9=0,x10=.887916627e-1,y10=0,x11=.975029467e-1,y
11=0,x12=.1083784102,y12=0,x13=.1225685872,y13=0,x14=.1407754980
,y14=0,x15=.1615497968,y15=0,x16=.1848300685,y16=0,x17=.21086968
40,y17=0,x18=.2376725204,y18=0,x19=.2656232742,y19=0,x20=.295339
1142,y20=0},obj);
```

```
objNorb2 := .05087303756
```

```
> deseNorb2:=subs({x1=0,y1=.838897333e-1,x2=0,y2=.547990038e-1,x3=
0,y3=.277353824e-1,x4=0,y4=.22577924e-2,x5=.216940970e-1,y5=0,x6
=.419445811e-1,y6=0,x7=.585400659e-1,y7=0,x8=.715676605e-1,y8=0,
x9=.809487920e-1,y9=0,x10=.887916627e-1,y10=0,x11=.975029467e-1,
y11=0,x12=.1083784102,y12=0,x13=.1225685872,y13=0,x14=.140775498
0,y14=0,x15=.1615497968,y15=0,x16=.1848300685,y16=0,x17=.2108696
840,y17=0,x18=.2376725204,y18=0,x19=.2656232742,y19=0,x20=.29533
91142,y20=0},dese);
```

```
deseNorb2 := -.0004173794962
```

```
>
```

fun-obj-Norberg3

```
> restart;
```

☐ Cálculo del valor de la función objetivo y de las variables de holgura para el valor de las primas de Norberg 3

```
> with(student):
```

```
> with(linalg):
```

```
Warning, new definition for norm
```

```
Warning, new definition for trace
```

```
> with(simplex):
```

```
Warning, new definition for basis
```

```
Warning, new definition for maximize
```

```
Warning, new definition for minimize
```

```
Warning, new definition for pivot
```

```
> res1 :=
```

```
.6531859187e-5*pi[1]+.1456742924e-4*pi[2]+.2678672868e-4*pi[3]+.  
1062283278e-3*pi[4]+.2071844009e-3*pi[5]+.3321775356e-3*pi[6]+.1  
821545247e-2*pi[7]+.2756299708e-2*pi[8]+.3628447720e-2*pi[9]+.32  
17254127e-1*pi[10]+.3112817416e-1*pi[11]+.3011770860e-1*pi[12]+.  
8976818074*pi[13]+x1-y1 = .33e-1;
```

```
res1 := .6531859187 10-5 π1 + .00001456742924 π2 + .00002678672868 π3  
+ .0001062283278 π4 + .0002071844009 π5 + .0003321775356 π6 + .001821545247 π7  
+ .002756299708 π8 + .003628447720 π9 + .03217254127 π10 + .03112817416 π11  
+ .03011770860 π12 + .8976818074 π13 + x1 - y1 = .033
```

```
> res2 :=
```

```
.1671651785e-3*pi[1]+.3005802924e-3*pi[2]+.4849485032e-3*pi[3]+.  
1129384163e-2*pi[4]+.1882259945e-2*pi[5]+.2746435483e-2*pi[6]+.8  
114875888e-2*pi[7]+.1123458918e-1*pi[8]+.1391587799e-1*pi[9]+.62  
21415456e-1*pi[10]+.5818237883e-1*pi[11]+.5441188170e-1*pi[12]+.  
7852154684*pi[13]+x2-y2 = .67e-1;
```

```
res2 := .0001671651785 π1 + .0003005802924 π2 + .0004849485032 π3 + .001129384163 π4  
+ .001882259945 π5 + .002746435483 π6 + .008114875888 π7 + .01123458918 π8  
+ .01391587799 π9 + .06221415456 π10 + .05818237883 π11 + .05441188170 π12  
+ .7852154684 π13 + x2 - y2 = .067
```

```
> res3 :=
```

```
.1112572432e-2*pi[1]+.1719014309e-2*pi[2]+.2487736095e-2*pi[3]+.  
4438655377e-2*pi[4]+.6541678686e-2*pi[5]+.8780926384e-2*pi[6]+.1  
875963133e-1*pi[7]+.2401798962e-1*pi[8]+.2810566524e-1*pi[9]+.86  
03041142e-1*pi[10]+.7784353532e-1*pi[11]+.7043574229e-1*pi[12]+.  
6697264415*pi[13]+x3-y3 = .1;
```

```
res3 := .001112572432 π1 + .001719014309 π2 + .002487736095 π3 + .004438655377 π4
```

$$\begin{aligned}
& + .006541678686 \pi_5 + .008780926384 \pi_6 + .01875963133 \pi_7 + .02401798962 \pi_8 \\
& + .02810566524 \pi_9 + .08603041142 \pi_{10} + .07784353532 \pi_{11} + .07043574229 \pi_{12} \\
& + .6697264415 \pi_{13} + x^3 - y^3 = .1
\end{aligned}$$

> res4 :=

$$\begin{aligned}
& .4303304538e-2*\pi[1] + .5898015205e-2*\pi[2] + .7759373720e-2*\pi[3] + . \\
& 1160813020e-1*\pi[4] + .1542486501e-1*\pi[5] + .1917227670e-1*\pi[6] + .3 \\
& 293872139e-1*\pi[7] + .3924847676e-1*\pi[8] + .4347581742e-1*\pi[9] + .10 \\
& 21399218*\pi[10] + .8941993488e-1*\pi[11] + .7828403174e-1*\pi[12] + .550 \\
& 3271307*\pi[13] + x^4 - y^4 = .133;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res4 := & .004303304538 \pi_1 + .005898015205 \pi_2 + .007759373720 \pi_3 + .01160813020 \pi_4 \\
& + .01542486501 \pi_5 + .01917227670 \pi_6 + .03293872139 \pi_7 + .03924847676 \pi_8 \\
& + .04347581742 \pi_9 + .1021399218 \pi_{10} + .08941993488 \pi_{11} + .07828403174 \pi_{12} \\
& + .5503271307 \pi_{13} + x^4 - y^4 = .133
\end{aligned}$$

> res5 :=

$$\begin{aligned}
& .1230545987e-1*\pi[1] + .1522217515e-1*\pi[2] + .1834843759e-1*\pi[3] + . \\
& 2399307235e-1*\pi[4] + .2906753901e-1*\pi[5] + .3356918416e-1*\pi[6] + .4 \\
& 883703011e-1*\pi[7] + .5433491316e-1*\pi[8] + .5698642481e-1*\pi[9] + .10 \\
& 87885156*\pi[10] + .9205679945e-1*\pi[11] + .7789842753e-1*\pi[12] + .428 \\
& 5920215*\pi[13] + x^5 - y^5 = .167;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res5 := & .01230545987 \pi_1 + .01522217515 \pi_2 + .01834843759 \pi_3 + .02399307235 \pi_4 \\
& + .02906753901 \pi_5 + .03356918416 \pi_6 + .04883703011 \pi_7 + .05433491316 \pi_8 \\
& + .05698642481 \pi_9 + .1087885156 \pi_{10} + .09205679945 \pi_{11} + .07789842753 \pi_{12} \\
& + .4285920215 \pi_{13} + x^5 - y^5 = .167
\end{aligned}$$

> res6 :=

$$\begin{aligned}
& .2696678031e-1*\pi[1] + .3061827469e-1*\pi[2] + .3418030323e-1*\pi[3] + . \\
& 4026975646e-1*\pi[4] + .4505800428e-1*\pi[5] + .4868241514e-1*\pi[6] + .6 \\
& 235287803e-1*\pi[7] + .6518744453e-1*\pi[8] + .6494554715e-1*\pi[9] + .10 \\
& 54513174*\pi[10] + .8633623600e-1*\pi[11] + .7068613148e-1*\pi[12] + .319 \\
& 2649115*\pi[13] + x^6 - y^6 = .2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res6 := & .02696678031 \pi_1 + .03061827469 \pi_2 + .03418030323 \pi_3 + .04026975646 \pi_4 \\
& + .04505800428 \pi_5 + .04868241514 \pi_6 + .06235287803 \pi_7 + .06518744453 \pi_8 \\
& + .06494554715 \pi_9 + .1054513174 \pi_{10} + .08633623600 \pi_{11} + .07068613148 \pi_{12} \\
& + .3192649115 \pi_{13} + x^6 - y^6 = .2
\end{aligned}$$

> res7 :=

$$\begin{aligned}
& .4953034978e-1*\pi[1] + .5212138158e-1*\pi[2] + .5423585513e-1*\pi[3] + . \\
& 5853089795e-1*\pi[4] + .6094828956e-1*\pi[5] + .6185199423e-1*\pi[6] + .7 \\
& 129369469e-1*\pi[7] + .7028965531e-1*\pi[8] + .6662309072e-1*\pi[9] + .94 \\
& 48174577e-1*\pi[10] + .7484405212e-1*\pi[11] + .5928798314e-1*\pi[12] + . \\
& 2259610097*\pi[13] + x^7 - y^7 = .233;
\end{aligned}$$

$$res7 := .04953034978 \pi_1 + .05212138158 \pi_2 + .05423585513 \pi_3 + .05853089795 \pi_4$$

```

+ .06094828956  $\pi_5$  + .06185199423  $\pi_6$  + .07129369469  $\pi_7$  + .07028965531  $\pi_8$ 
+ .06662309072  $\pi_9$  + .09448174577  $\pi_{10}$  + .07484405212  $\pi_{11}$  + .05928798314  $\pi_{12}$ 
+ .2259610097  $\pi_{13}$  +  $x^7 - y^7 = .233$ 
> res8 :=
.8025163800e-1*pi[1]+.7868348166e-1*pi[2]+.7657530852e-1*pi[3]+.
7639205488e-1*pi[4]+.7433038658e-1*pi[5]+.7097061738e-1*pi[6]+.7
456505499e-1*pi[7]+.6942432770e-1*pi[8]+.6259852076e-1*pi[9]+.78
78273051e-1*pi[10]+.6032181529e-1*pi[11]+.4618678979e-1*pi[12]+.
1509172741*pi[13]+x8-y8 = .267;
res8 := .08025163800  $\pi_1$  + .07868348166  $\pi_2$  + .07657530852  $\pi_3$  + .07639205488  $\pi_4$ 
+ .07433038658  $\pi_5$  + .07097061738  $\pi_6$  + .07456505499  $\pi_7$  + .06942432770  $\pi_8$ 
+ .06259852076  $\pi_9$  + .07878273051  $\pi_{10}$  + .06032181529  $\pi_{11}$  + .04618678979  $\pi_{12}$ 
+ .1509172741  $\pi_{13}$  +  $x^8 - y^8 = .267$ 
> res9 :=
.1151149561*pi[1]+.1059766915*pi[2]+.9707595384e-1*pi[3]+.904681
0684e-1*pi[4]+.8281614559e-1*pi[5]+.7475339505e-1*pi[6]+.7259522
475e-1*pi[7]+.6410475284e-1*pi[8]+.5513883351e-1*pi[9]+.62710571
08e-1*pi[10]+.4645713370e-1*pi[11]+.3441629090e-1*pi[12]+.983719
4409e-1*pi[13]+x9-y9 = .3;
res9 := .1151149561  $\pi_1$  + .1059766915  $\pi_2$  + .09707595384  $\pi_3$  + .09046810684  $\pi_4$ 
+ .08281614559  $\pi_5$  + .07475339505  $\pi_6$  + .07259522475  $\pi_7$  + .06410475284  $\pi_8$ 
+ .05513883351  $\pi_9$  + .06271057108  $\pi_{10}$  + .04645713370  $\pi_{11}$  + .03441629090  $\pi_{12}$ 
+ .09837194409  $\pi_{13}$  +  $x^9 - y^9 = .3$ 
> res10 :=
.1524025022*pi[1]+.1323224645*pi[2]+.1144973515*pi[3]+.100279767
8*pi[4]+.8669769622e-1*pi[5]+.7417303902e-1*pi[6]+.6713340717e-1
*pi[7]+.5634963796e-1*pi[8]+.4628905491e-1*pi[9]+.4810802077e-1*
pi[10]+.3448239578e-1*pi[11]+.2471595316e-1*pi[12]+.6254870865e-
1*pi[13]+x10-y10 = .333;
res10 := .1524025022  $\pi_1$  + .1323224645  $\pi_2$  + .1144973515  $\pi_3$  + .1002797678  $\pi_4$ 
+ .08669769622  $\pi_5$  + .07417303902  $\pi_6$  + .06713340717  $\pi_7$  + .05634963796  $\pi_8$ 
+ .04628905491  $\pi_9$  + .04810802077  $\pi_{10}$  + .03448239578  $\pi_{11}$  + .02471595316  $\pi_{12}$ 
+ .06254870865  $\pi_{13}$  +  $x^{10} - y^{10} = .333$ 
> res11 :=
.1911693146*pi[1]+.1568433290*pi[2]+.1283851842*pi[3]+.105985252
6*pi[4]+.8667711587e-1*pi[5]+.7033694992e-1*pi[6]+.5960083224e-1
*pi[7]+.4757525698e-1*pi[8]+.3731367634e-1*pi[9]+.3566882077e-1*
pi[10]+.2471170308e-1*pi[11]+.1712050608e-1*pi[12]+.3861205803e-
1*pi[13]+x11-y11 = .367;
res11 := .1911693146  $\pi_1$  + .1568433290  $\pi_2$  + .1283851842  $\pi_3$  + .1059852526  $\pi_4$ 

```

$$\begin{aligned}
&+.08667711587 \pi_5 + .07033694992 \pi_6 + .05960083224 \pi_7 + .04757525698 \pi_8 \\
&+.03731367634 \pi_9 + .03566882077 \pi_{10} + .02471170308 \pi_{11} + .01712050608 \pi_{12} \\
&+.03861205803 \pi_{13} + x/1 - y/1 = .367
\end{aligned}$$

```

> res12 :=
.2277532259*pi[1]+.1773891521*pi[2]+.1379445442*pi[3]+.107920517
5*pi[4]+.8385052792e-1*pi[5]+.6476979714e-1*pi[6]+.5174350924e-1
*pi[7]+.3940414622e-1*pi[8]+.2957692065e-1*pi[9]+.2625823649e-1*
pi[10]+.1760142199e-1*pi[11]+.1179858633e-1*pi[12]+.2398941398e-
1*pi[13]+x12-y12 = .4;

```

$$\begin{aligned}
res12 := &.2277532259 \pi_1 + .1773891521 \pi_2 + .1379445442 \pi_3 + .1079205175 \pi_4 \\
&+.08385052792 \pi_5 + .06476979714 \pi_6 + .05174350924 \pi_7 + .03940414622 \pi_8 \\
&+.02957692065 \pi_9 + .02625823649 \pi_{10} + .01760142199 \pi_{11} + .01179858633 \pi_{12} \\
&+.02398941398 \pi_{13} + x/2 - y/2 = .4
\end{aligned}$$

```

> res13 :=
.2625869725*pi[1]+.1946269025*pi[2]+.1440991421*pi[3]+.107151023
3*pi[4]+.7927044961e-1*pi[5]+.5838778667e-1*pi[6]+.4415141911e-1
*pi[7]+.3212370886e-1*pi[8]+.2309689367e-1*pi[9]+.1915545695e-1*
pi[10]+.1242347256e-1*pi[11]+.8057373656e-2*pi[12]+.1486939832e-
1*pi[13]+x13-y13 = .433;

```

$$\begin{aligned}
res13 := &.2625869725 \pi_1 + .1946269025 \pi_2 + .1440991421 \pi_3 + .1071510233 \pi_4 \\
&+.07927044961 \pi_5 + .05838778667 \pi_6 + .04415141911 \pi_7 + .03212370886 \pi_8 \\
&+.02309689367 \pi_9 + .01915545695 \pi_{10} + .01242347256 \pi_{11} + .008057373656 \pi_{12} \\
&+.01486939832 \pi_{13} + x/3 - y/3 = .433
\end{aligned}$$

```

> res14 :=
.2963457673*pi[1]+.2091555903*pi[2]+.1475091806*pi[3]+.104352606
3*pi[4]+.7354454997e-1*pi[5]+.5166279233e-1*pi[6]+.3704043932e-1
*pi[7]+.2574774517e-1*pi[8]+.1772539630e-1*pi[9]+.1377406912e-1*
pi[10]+.8634689781e-2*pi[11]+.5412914934e-2*pi[12]+.9094257982e-
2*pi[13]+x14-y14 = .467;

```

$$\begin{aligned}
res14 := &.2963457673 \pi_1 + .2091555903 \pi_2 + .1475091806 \pi_3 + .1043526063 \pi_4 \\
&+.07354454997 \pi_5 + .05166279233 \pi_6 + .03704043932 \pi_7 + .02574774517 \pi_8 \\
&+.01772539630 \pi_9 + .01377406912 \pi_{10} + .008634689781 \pi_{11} + .005412914934 \pi_{12} \\
&+.009094257982 \pi_{13} + x/4 - y/4 = .467
\end{aligned}$$

```

> res15 :=
.3270070215*pi[1]+.2204744112*pi[2]+.1485721899*pi[3]+.100341083
6*pi[4]+.6757674773e-1*pi[5]+.4539909553e-1*pi[6]+.3099281774e-1
*pi[7]+.2063445185e-1*pi[8]+.1362923453e-1*pi[9]+.9983476746e-2*
pi[10]+.6055284211e-2*pi[11]+.3672715971e-2*pi[12]+.5661469400e-
2*pi[13]+x15-y15 = .5;

```

$$res15 := .3270070215 \pi_1 + .2204744112 \pi_2 + .1485721899 \pi_3 + .1003410836 \pi_4$$

```

+ .06757674773  $\pi_5$  + .04539909553  $\pi_6$  + .03099281774  $\pi_7$  + .02063445185  $\pi_8$ 
+ .01362923453  $\pi_9$  + .009983476746  $\pi_{10}$  + .006055284211  $\pi_{11}$  + .003672715971  $\pi_{12}$ 
+ .005661469400  $\pi_{13}$  + x/5 - y/5 = .5
-
> res16 :=
.3556863575*pi[1]+.2294264816*pi[2]+.1479335071*pi[3]+.955398542
5e-1*pi[4]+.6157245766e-1*pi[5]+.3960808119e-1*pi[6]+.2580232226
e-1*pi[7]+.1647023631e-1*pi[8]+.1044495776e-1*pi[9]+.7236773031e
-2*pi[10]+.4246841055e-2*pi[11]+.249223822e-2*pi[12]+.353990588
0e-2*pi[13]+x/16-y/16 = .533;
res16 := .3556863575  $\pi_1$  + .2294264816  $\pi_2$  + .1479335071  $\pi_3$  + .09553985425  $\pi_4$ 
+ .06157245766  $\pi_5$  + .03960808119  $\pi_6$  + .02580232226  $\pi_7$  + .01647023631  $\pi_8$ 
+ .01044495776  $\pi_9$  + .007236773031  $\pi_{10}$  + .004246841055  $\pi_{11}$  + .00249223822  $\pi_{12}$ 
+ .003539905880  $\pi_{13}$  + x/16 - y/16 = .533
-
> res17 :=
.3833147208*pi[1]+.2365410674*pi[2]+.1459327272*pi[3]+.901357551
4e-1*pi[4]+.5558522947e-1*pi[5]+.3423110680e-1*pi[6]+.2128957416
e-1*pi[7]+.1302485510e-1*pi[8]+.7926248360e-2*pi[9]+.5201404730e
-2*pi[10]+.2950364206e-2*pi[11]+.1673519449e-2*pi[12]+.219342673
3e-2*pi[13]+x/17-y/17 = .567;
res17 := .3833147208  $\pi_1$  + .2365410674  $\pi_2$  + .1459327272  $\pi_3$  + .09013575514  $\pi_4$ 
+ .05558522947  $\pi_5$  + .03423110680  $\pi_6$  + .02128957416  $\pi_7$  + .01302485510  $\pi_8$ 
+ .007926248360  $\pi_9$  + .005201404730  $\pi_{10}$  + .002950364206  $\pi_{11}$  + .001673519449  $\pi_{12}$ 
+ .002193426733  $\pi_{13}$  + x/17 - y/17 = .567
-
> res18 :=
.4084307504*pi[1]+.2417130593*pi[2]+.1430240872*pi[3]+.846992443
3e-1*pi[4]+.5009986888e-1*pi[5]+.2960337413e-1*pi[6]+.1762892151
e-1*pi[7]+.1035842976e-1*pi[8]+.6059924524e-2*pi[9]+.3782014161e
-2*pi[10]+.2075613533e-2*pi[11]+.1139120687e-2*pi[12]+.138559156
9e-2*pi[13]+x/18-y/18 = .6;
res18 := .4084307504  $\pi_1$  + .2417130593  $\pi_2$  + .1430240872  $\pi_3$  + .08469924433  $\pi_4$ 
+ .05009986888  $\pi_5$  + .02960337413  $\pi_6$  + .01762892151  $\pi_7$  + .01035842976  $\pi_8$ 
+ .006059924524  $\pi_9$  + .003782014161  $\pi_{10}$  + .002075613533  $\pi_{11}$  + .001139120687  $\pi_{12}$ 
+ .001385591569  $\pi_{13}$  + x/18 - y/18 = .6
-
> res19 :=
.4320298872*pi[1]+.2454413326*pi[2]+.1394220112*pi[3]+.792459814
1e-1*pi[4]+.4500246677e-1*pi[5]+.2553611002e-1*pi[6]+.1457948418
e-1*pi[7]+.8233522435e-2*pi[8]+.4633151320e-2*pi[9]+.2755889863e
-2*pi[10]+.1463367446e-2*pi[11]+.7770428910e-3*pi[12]+.879752443
1e-3*pi[13]+x/19-y/19 = .633;
res19 := .4320298872  $\pi_1$  + .2454413326  $\pi_2$  + .1394220112  $\pi_3$  + .07924598141  $\pi_4$ 

```


$$\begin{aligned}
&+.04500246677 \pi_5 + .02553611002 \pi_6 + .01457948418 \pi_7 + .008233522435 \pi_8 \\
&+.004633151320 \pi_9 + .002755889863 \pi_{10} + .001463367446 \pi_{11} + .0007770428910 \pi_{12} \\
&+.0008797524431 \pi_{13} + x19 - y19 = .633
\end{aligned}$$

> res20 :=

$$\begin{aligned}
&.4549093390 \pi_1 + .2480045891 \pi_2 + .1351948585 \pi_3 + .737308682 \\
&7e-1 \pi_4 + .4018362610e-1 \pi_5 + .2188742802e-1 \pi_6 + .1197938929 \\
&e-1 \pi_7 + .6498680024e-2 \pi_8 + .3515214245e-2 \pi_9 + .1993748195e \\
&-2 \pi_{10} + .1023283298e-2 \pi_{11} + .5251961977e-3 \pi_{12} + .553780285 \\
&4e-3 \pi_{13} + x20 - y20 = .667;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res20 := &.4549093390 \pi_1 + .2480045891 \pi_2 + .1351948585 \pi_3 + .07373086827 \pi_4 \\
&+.04018362610 \pi_5 + .02188742802 \pi_6 + .01197938929 \pi_7 + .006498680024 \pi_8 \\
&+.003515214245 \pi_9 + .001993748195 \pi_{10} + .001023283298 \pi_{11} + .0005251961977 \pi_{12} \\
&+.0005537802854 \pi_{13} + x20 - y20 = .667
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> obj := &(x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x \\
&4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/10 \\
&00) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11 \\
&+y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * \\
&(4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000 \\
&)+ (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
obj := &\frac{3}{500} x13 + \frac{3}{500} y13 + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{250} y14 + \frac{3}{1000} x15 + \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{1000} x16 + \frac{1}{1000} y16 \\
&+ \frac{1}{1000} x17 + \frac{1}{1000} y17 + \frac{1}{1000} x18 + \frac{1}{1000} y18 + \frac{1}{1000} x19 + \frac{1}{1000} y19 + \frac{1}{1000} x20 + \frac{1}{1000} y20 \\
&+ \frac{7}{500} x11 + \frac{7}{500} y11 + \frac{7}{1000} x12 + \frac{7}{1000} y12 + \frac{143}{1000} x1 + \frac{143}{1000} y1 + \frac{43}{250} x2 + \frac{43}{250} y2 \\
&+ \frac{143}{1000} x3 + \frac{143}{1000} y3 + \frac{57}{500} x4 + \frac{57}{500} y4 + \frac{1}{10} x5 + \frac{1}{10} y5 + \frac{43}{500} x6 + \frac{43}{500} y6 + \frac{9}{125} x7 + \frac{9}{125} y7 \\
&+ \frac{57}{1000} x8 + \frac{57}{1000} y8 + \frac{43}{1000} x9 + \frac{43}{1000} y9 + \frac{29}{1000} x10 + \frac{29}{1000} y10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> dese := &(x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (\\
&x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1 \\
&000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x1 \\
&1-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14) \\
&* (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/100 \\
&0) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dese := &\frac{3}{500} x13 - \frac{3}{500} y13 + \frac{1}{250} x14 - \frac{1}{250} y14 + \frac{3}{1000} x15 - \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{1000} x16 - \frac{1}{1000} y16 \\
&+ \frac{1}{1000} x17 - \frac{1}{1000} y17 + \frac{1}{1000} x18 - \frac{1}{1000} y18 + \frac{1}{1000} x19 - \frac{1}{1000} y19 + \frac{1}{1000} x20 - \frac{1}{1000} y20 \\
&+ \frac{7}{500} x11 - \frac{7}{500} y11 + \frac{7}{1000} x12 - \frac{7}{1000} y12 + \frac{143}{1000} x1 - \frac{143}{1000} y1 + \frac{43}{250} x2 - \frac{43}{250} y2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{143}{1000}x^3 - \frac{143}{1000}y^3 + \frac{57}{500}x^4 - \frac{57}{500}y^4 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{10}y^5 + \frac{43}{500}x^6 - \frac{43}{500}y^6 + \frac{9}{125}x^7 - \frac{9}{125}y^7 \\
& + \frac{57}{1000}x^8 - \frac{57}{1000}y^8 + \frac{43}{1000}x^9 - \frac{43}{1000}y^9 + \frac{29}{1000}x^{10} - \frac{29}{1000}y^{10}
\end{aligned}$$

Sustituimos las primas de Norberg 3 para calcular las variables de holgura

```

> ec1:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res1);

          ec1 := .1055198973 + x1 - y1 = .033
> y1:=.1055198973-0.033;

          y1 := .0725198973
> ec2:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res2);

          ec2 := .1130282577 + x2 - y2 = .067
> y2:=.1130282577-0.067;

          y2 := .0460282577
> ec3:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res3);

          ec3 := .1228390335 + x3 - y3 = .1
> y3:=.1228390335-0.1;

          y3 := .0228390335
> ec4:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res4);

          ec4 := .1358781852 + x4 - y4 = .133
> y4:=.1358781852-0.133;

          y4 := .0028781852
> ec5:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res5);

          ec5 := .1530056076 + x5 - y5 = .167
> x5:=0.167-.1530056076;

          x5 := .0139943924
> ec6:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res6);

          ec6 := .1726126168 + x6 - y6 = .2
> x6:=0.2-.1726126168;

```

```

                                x6 := .0273873832
> ec7:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res7);
                                ec7 := .1936287601 + x7 - y7 = .233
> x7:=0.233-.1936287601;
                                x7 := .0393712399
> ec8:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res8);
                                ec8 := .2147623388 + x8 - y8 = .267
> x8:=0.267-.2147623388;
                                x8 := .0522376612
> ec9:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0.
155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res9);
                                ec9 := .2332248572 + x9 - y9 = .3
> x9:=0.3-.2332248572;
                                x9 := .0667751428
> ec10:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res10);
                                ec10 := .2489138175 + x10 - y10 = .333
> x10:=0.333-.2489138175;
                                x10 := .0840861825
> ec11:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res11);
                                ec11 := .2621055178 + x11 - y11 = .367
> x11:=0.367-.2621055178;
                                x11 := .1048944822
> ec12:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res12);
                                ec12 := .2723490672 + x12 - y12 = .4
> x12:=0.4-.2723490672;
                                x12 := .1276509328
> ec13:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res13);
                                ec13 := .2805250184 + x13 - y13 = .433
> x13:=0.433-.2805250184;
                                x13 := .1524749816

```

```

> ec14:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res14);
      ec14 := .2872489645 + x14 - y14 = .467
> x14:=0.467-.2872489645;
      x14 := .1797510355
> ec15:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res15);
      ec15 := .2925037562 + x15 - y15 = .5
> x15:=0.5-.2925037562;
      x15 := .2074962438
> ec16:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res16);
      ec16 := .2967991174 + x16 - y16 = .533
> x16:=0.533-.2967991174;
      x16 := .2362008826
> ec17:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res17);
      ec17 := .3004535048 + x17 - y17 = .567
> x17:=0.567-.3004535048;
      x17 := .2665464952
> ec18:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res18);
      ec18 := .3034208254 + x18 - y18 = .6
> x18:=0.6-.3034208254;
      x18 := .2965791746
> ec19:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res19);
      ec19 := .3059413628 + x19 - y19 = .633
> x19:=0.633-.3059413628;
      x19 := .3270586372
> ec20:=subs({pi[1]=0.333,pi[2]=0.310,pi[3]=0.291,pi[4]=0.270,pi[5]
]=0.253,pi[6]=0.239,pi[7]=0.215,pi[8]=0.202,pi[9]=0.192,pi[10]=0
.155,pi[11]=0.149,pi[12]=0.143,pi[13]=0.1},res20);
      ec20 := .3081680279 + x20 - y20 = .667
> x20:=0.667-.3081680279;
      x20 := .3588319721
> objNorb3:=subs({x20=.3588319721,x19=.3270586372,x18=

```

```
.2965791746,x17=.2665464952,x16=.2362008826,x15=.2074962438,x14=
.1797510355,x13=.1524749816,x12=.1276509328,x11=.1048944822,x10=
.840861825e-1,x9=.667751428e-1,x8=.522376612e-1,x7=.393712399e-1
,x6=.273873832e-1,x5=.139943924e-1,y4=.28781852e-2,y3=.228390335
e-1,y2=.460282577e-1,y1=.725198973e-1,x1=0,x2=0,x3=0,x4=0,y5=0,y
6=0,y7=0,y8=0,y9=0,y10=0,y11=0,y12=0,y13=0,y14=0,y15=0,y16=0,y17
=0,y18=0,y19=0,y20=0},obj);
```

```
objNorb3 := .04286180033
```

```
> deseNorberg3:=subs({x20=.3588319721,x19=.3270586372,x18=
.2965791746,x17=.2665464952,x16=.2362008826,x15=.2074962438,x14=
.1797510355,x13=.1524749816,x12=.1276509328,x11=.1048944822,x10=
.840861825e-1,x9=.667751428e-1,x8=.522376612e-1,x7=.393712399e-1
,x6=.273873832e-1,x5=.139943924e-1,y4=.28781852e-2,y3=.228390335
e-1,y2=.460282577e-1,y1=.725198973e-1,x1=0,x2=0,x3=0,x4=0,y5=0,y
6=0,y7=0,y8=0,y9=0,y10=0,y11=0,y12=0,y13=0,y14=0,y15=0,y16=0,y17
=0,y18=0,y19=0,y20=0},dese);
```

```
deseNorberg3 := -.000900800746
```

```
>
```

fun-obj-Noru75

```
> restart;
```

▣ Calculo del valor de la función objetivo para los valores de las primas de Noruega 75



```
> with(student):
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> with(simplex):
Warning, new definition for basis
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
Warning, new definition for pivot
> res1 :=
.1169072878e-7*pi[1]+.3126149941e-7*pi[2]+.2074599740e-6*pi[3]+.
7421173438e-6*pi[4]+.4671320067e-5*pi[5]+.1205063178e-4*pi[6]+.8
845618583e-4*pi[7]+.1865341620e-3*pi[8]+.1703009854e-2*pi[9]+.26
45882192e-2*pi[10]+.3231076730e-1*pi[11]+.3126191325e-1*pi[12]+.
9317857227*pi[13]+x1-y1 = .33e-1;
res1 := .1169072878 10-7 π1 + .3126149941 10-7 π2 + .2074599740 10-6 π3
+ .7421173438 10-6 π4 + .4671320067 10-5 π5 + .00001205063178 π6 + .00008845618583 π7
+ .0001865341620 π8 + .001703009854 π9 + .002645882192 π10 + .03231076730 π11
+ .03126191325 π12 + .9317857227 π13 + x1 - y1 = .033
> res2 :=
.1071640373e-5*pi[1]+.2274761398e-5*pi[2]+.8181294539e-5*pi[3]+.
2788609455e-4*pi[4]+.9658806872e-4*pi[5]+.2123977470e-3*pi[6]+.8
249332000e-3*pi[7]+.1552702892e-2*pi[8]+.7227946805e-2*pi[9]+.10
47934934e-1*pi[10]+.6348062024e-1*pi[11]+.5936677152e-1*pi[12]+.
8567192761*pi[13]+x2-y2 = .67e-1;
res2 := .1071640373 10-5 π1 + .2274761398 10-5 π2 + .8181294539 10-5 π3
+ .00002788609455 π4 + .00009658806872 π5 + .0002123977470 π6 + .0008249332000 π7
+ .001552702892 π8 + .007227946805 π9 + .01047934934 π10 + .06348062024 π11
+ .05936677152 π12 + .8567192761 π13 + x2 - y2 = .067
> res3 :=
.1459249314e-4*pi[1]+.2575869361e-4*pi[2]+.6701462035e-4*pi[3]+.
2213164528e-3*pi[4]+.5601107540e-3*pi[5]+.1078338843e-2*pi[6]+.2
978324750e-2*pi[7]+.5071424516e-2*pi[8]+.1630641217e-1*pi[9]+.22
16809710e-1*pi[10]+.9054801594e-1*pi[11]+.8193123208e-1*pi[12]+.
```

```

7790293614*pi[13]+x3-y3 = .1;
res3 := .00001459249314  $\pi_1$  + .00002575869361  $\pi_2$  + .00006701462035  $\pi_3$ 
      + .0002213164528  $\pi_4$  + .0005601107540  $\pi_5$  + .001078338843  $\pi_6$  + .002978324750  $\pi_7$ 
      + .005071424516  $\pi_8$  + .01630641217  $\pi_9$  + .02216809710  $\pi_{10}$  + .09054801594  $\pi_{11}$ 
      + .08193123208  $\pi_{12}$  + .7790293614  $\pi_{13}$  + x3 - y3 = .1
> res4 :=
.9539342003e-4*pi[1]+.1436987271e-3*pi[2]+.2997821057e-3*pi[3]+.
9703595253e-3*pi[4]+.1983226109e-2*pi[5]+.3397204101e-2*pi[6]+.7
428065682e-2*pi[7]+.1153630984e-1*pi[8]+.2867172387e-1*pi[9]+.36
63843766e-1*pi[10]+.1131817826*pi[11]+.9908669957e-1*pi[12]+.696
5673165*pi[13]+x4-y4 = .133;
res4 := .00009539342003  $\pi_1$  + .0001436987271  $\pi_2$  + .0002997821057  $\pi_3$ 
      + .0009703595253  $\pi_4$  + .001983226109  $\pi_5$  + .003397204101  $\pi_6$  + .007428065682  $\pi_7$ 
      + .01153630984  $\pi_8$  + .02867172387  $\pi_9$  + .03663843766  $\pi_{10}$  + .1131817826  $\pi_{11}$ 
      + .09908669957  $\pi_{12}$  + .6965673165  $\pi_{13}$  + x4 - y4 = .133
> res5 :=
.4259152410e-3*pi[1]+.5557137586e-3*pi[2]+.9766461269e-3*pi[3]+.
3125991839e-2*pi[4]+.5410389076e-2*pi[5]+.8324717506e-2*pi[6]+.1
518069966e-1*pi[7]+.2159693150e-1*pi[8]+.4386578615e-1*pi[9]+.52
71207479e-1*pi[10]+.1303958369*pi[11]+.1103409060*pi[12]+.607088
3914*pi[13]+x5-y5 = .167;
res5 := .0004259152410  $\pi_1$  + .0005557137586  $\pi_2$  + .0009766461269  $\pi_3$  + .003125991839  $\pi_4$ 
      + .005410389076  $\pi_5$  + .008324717506  $\pi_6$  + .01518069966  $\pi_7$  + .02159693150  $\pi_8$ 
      + .04386578615  $\pi_9$  + .05271207479  $\pi_{10}$  + .1303958369  $\pi_{11}$  + .1103409060  $\pi_{12}$ 
      + .6070883914  $\pi_{13}$  + x5 - y5 = .167
> res6 :=
.1369755763e-2*pi[1]+.1577037641e-2*pi[2]+.2424558527e-2*pi[3]+.
7733006444e-2*pi[4]+.1175159293e-1*pi[5]+.1645706409e-1*pi[6]+.2
605651427e-1*pi[7]+.3424316883e-1*pi[8]+.5940753201e-1*pi[9]+.67
38970921e-1*pi[10]+.1398655489*pi[11]+.1145122259*pi[12]+.517212
2857*pi[13]+x6-y6 = .2;
res6 := .001369755763  $\pi_1$  + .001577037641  $\pi_2$  + .002424558527  $\pi_3$  + .007733006444  $\pi_4$ 
      + .01175159293  $\pi_5$  + .01645706409  $\pi_6$  + .02605651427  $\pi_7$  + .03424316883  $\pi_8$ 
      + .05940753201  $\pi_9$  + .06738970921  $\pi_{10}$  + .1398655489  $\pi_{11}$  + .1145122259  $\pi_{12}$ 
      + .5172122857  $\pi_{13}$  + x6 - y6 = .2
> res7 :=
.3580304552e-2*pi[1]+.3677652820e-2*pi[2]+.5051753289e-2*pi[3]+.
1615093651e-1*pi[4]+.2198957156e-1*pi[5]+.2825233157e-1*pi[6]+.3
973290457e-1*pi[7]+.4847196179e-1*pi[8]+.7367843964e-1*pi[9]+.79
04055237e-1*pi[10]+.1414132199*pi[11]+.1120209867*pi[12]+.426939

```

```

3847*pi[13]+x7-y7 = .233;
res7 := .003580304552 pi1 + .003677652820 pi2 + .005051753289 pi3 + .01615093651 pi4
      + .02198957156 pi5 + .02825233157 pi6 + .03973290457 pi7 + .04847196179 pi8
      + .07367843964 pi9 + .07904055237 pi10 + .1414132199 pi11 + .1120209867 pi12
      + .4269393847 pi13 + x7 - y7 = .233
> res8 :=
.8108537910e-2*pi[1]+.7473571793e-2*pi[2]+.9283604628e-2*pi[3]+.
2990750987e-1*pi[4]+.3690049727e-1*pi[5]+.4368197230e-1*pi[6]+.5
529096411e-1*pi[7]+.6274998046e-1*pi[8]+.8483558627e-1*pi[9]+.86
07238745e-1*pi[10]+.1349009323*pi[11]+.1032900111*pi[12]+.337504
4448*pi[13]+x8-y8 = .267;
res8 := .008108537910 pi1 + .007473571793 pi2 + .009283604628 pi3 + .02990750987 pi4
      + .03690049727 pi5 + .04368197230 pi6 + .05529096411 pi7 + .06274998046 pi8
      + .08483558627 pi9 + .08607238745 pi10 + .1349009323 pi11 + .1032900111 pi12
      + .3375044448 pi13 + x8 - y8 = .267
> res9 :=
.1560749558e-1*pi[1]+.1304305339e-1*pi[2]+.1485756993e-1*pi[3]+.
4842275228e-1*pi[4]+.5487206542e-1*pi[5]+.6032776168e-1*pi[6]+.6
976998696e-1*pi[7]+.7409449922e-1*pi[8]+.9064615775e-1*pi[9]+.87
25551762e-1*pi[10]+.1221013507*pi[11]+.9045490452e-1*pi[12]+.258
5468847*pi[13]+x9-y9 = .3;
res9 := .01560749558 pi1 + .01304305339 pi2 + .01485756993 pi3 + .04842275228 pi4
      + .05487206542 pi5 + .06032776168 pi6 + .06976998696 pi7 + .07409449922 pi8
      + .09064615775 pi9 + .08725551762 pi10 + .1221013507 pi11 + .09045490452 pi12
      + .2585468847 pi13 + x9 - y9 = .3
> res10 :=
.2678822532e-1*pi[1]+.2041755755e-1*pi[2]+.2150431253e-1*pi[3]+.
7115382574e-1*pi[4]+.7463867407e-1*pi[5]+.7656605175e-1*pi[6]+.8
163577109e-1*pi[7]+.8138579716e-1*pi[8]+.9104336011e-1*pi[9]+.83
26337778e-1*pi[10]+.1052490586*pi[11]+.7543938798e-1*pi[12]+.190
9146002*pi[13]+x10-y10 = .333;
res10 := .02678822532 pi1 + .02041755755 pi2 + .02150431253 pi3 + .07115382574 pi4
      + .07463867407 pi5 + .07656605175 pi6 + .08163577109 pi7 + .08138579716 pi8
      + .09104336011 pi9 + .08326337778 pi10 + .1052490586 pi11 + .07543938798 pi12
      + .1909146002 pi13 + x10 - y10 = .333
> res11 :=
.4228583645e-1*pi[1]+.2946391306e-1*pi[2]+.2881733836e-1*pi[3]+.
9715756666e-1*pi[4]+.9472961137e-1*pi[5]+.9085448362e-1*pi[6]+.8
974188913e-1*pi[7]+.8407469068e-1*pi[8]+.8650995393e-1*pi[9]+.75
15218007e-1*pi[10]+.8638577912e-1*pi[11]+.5984890057e-1*pi[12]+.

```



```

1349778568*pi[13]+x11-y11 = .367;
res11 := .04228583645  $\pi_1$  + .02946391306  $\pi_2$  + .02881733836  $\pi_3$  + .09715756666  $\pi_4$ 
+ .09472961137  $\pi_5$  + .09085448362  $\pi_6$  + .08974188913  $\pi_7$  + .08407469068  $\pi_8$ 
+ .08650995393  $\pi_9$  + .07515218007  $\pi_{10}$  + .08638577912  $\pi_{11}$  + .05984890057  $\pi_{12}$ 
+ .1349778568  $\pi_{13}$  + x11 - y11 = .367
> res12 :=
.6080668643e-1*pi[1]+.3899974135e-1*pi[2]+.3568441297e-1*pi[3]+.
1228499692*pi[4]+.1121338704*pi[5]+.1010980340*pi[6]+.9324770304
e-1*pi[7]+.8245303924e-1*pi[8]+.7875850516e-1*pi[9]+.6516575473e
-1*pi[10]+.6883792720e-1*pi[11]+.4614344286e-1*pi[12]+.938209133
8e-1*pi[13]+x12-y12 = .4;
res12 := .06080668643  $\pi_1$  + .03899974135  $\pi_2$  + .03568441297  $\pi_3$  + .1228499692  $\pi_4$ 
+ .1121338704  $\pi_5$  + .1010980340  $\pi_6$  + .09324770304  $\pi_7$  + .08245303924  $\pi_8$ 
+ .07875850516  $\pi_9$  + .06516575473  $\pi_{10}$  + .06883792720  $\pi_{11}$  + .04614344286  $\pi_{12}$ 
+ .09382091338  $\pi_{13}$  + x12 - y12 = .4
> res13 :=
.8206290693e-1*pi[1]+.4861985578e-1*pi[2]+.4179290929e-1*pi[3]+.
1472572113*pi[4]+.1263403150*pi[5]+.1073920124*pi[6]+.9291558262
e-1*pi[7]+.7771798097e-1*pi[8]+.6928734423e-1*pi[9]+.5466320922e
-1*pi[10]+.5340146946e-1*pi[11]+.3463408327e-1*pi[12]+.639151195
1e-1*pi[13]+x13-y13 = .433;
res13 := .08206290693  $\pi_1$  + .04861985578  $\pi_2$  + .04179290929  $\pi_3$  + .1472572113  $\pi_4$ 
+ .1263403150  $\pi_5$  + .1073920124  $\pi_6$  + .09291558262  $\pi_7$  + .07771798097  $\pi_8$ 
+ .06928734423  $\pi_9$  + .05466320922  $\pi_{10}$  + .05340146946  $\pi_{11}$  + .03463408327  $\pi_{12}$ 
+ .06391511951  $\pi_{13}$  + x13 - y13 = .433
> res14 :=
.1060067090*pi[1]+.5806313242e-1*pi[2]+.4696940056e-1*pi[3]+.169
8628580*pi[4]+.1372062519*pi[5]+.1100576121*pi[6]+.8949965366e-1
*pi[7]+.7084184224e-1*pi[8]+.5910088420e-1*pi[9]+.4444111811e-1*
pi[10]+.4027849508e-1*pi[11]+.2524978660e-1*pi[12]+.4242225628e-
1*pi[13]+x14-y14 = .467;
res14 := .1060067090  $\pi_1$  + .05806313242  $\pi_2$  + .04696940056  $\pi_3$  + .1698628580  $\pi_4$ 
+ .1372062519  $\pi_5$  + .1100576121  $\pi_6$  + .08949965366  $\pi_7$  + .07084184224  $\pi_8$ 
+ .05910088420  $\pi_9$  + .04444111811  $\pi_{10}$  + .04027849508  $\pi_{11}$  + .02524978660  $\pi_{12}$ 
+ .04242225628  $\pi_{13}$  + x14 - y14 = .467
> res15 :=
.1305087280*pi[1]+.6641670211e-1*pi[2]+.5080156554e-1*pi[3]+.188
7715601*pi[4]+.1442235180*pi[5]+.1096056863*pi[6]+.8419674884e-1
*pi[7]+.6328335258e-1*pi[8]+.4969022271e-1*pi[9]+.3569734640e-1*
pi[10]+.3022024310e-1*pi[11]+.1832950399e-1*pi[12]+.2825482179e-

```

```

1*pi[13]+x15-y15 = .5;
res15 := .1305087280  $\pi_1$  + .06641670211  $\pi_2$  + .05080156554  $\pi_3$  + .1887715601  $\pi_4$ 
+ .1442235180  $\pi_5$  + .1096056863  $\pi_6$  + .08419674884  $\pi_7$  + .06328335258  $\pi_8$ 
+ .04969022271  $\pi_9$  + .03569734640  $\pi_{10}$  + .03022024310  $\pi_{11}$  + .01832950399  $\pi_{12}$ 
+ .02825482179  $\pi_{13}$  + x15 - y15 = .5
> res16 :=
.1556855321*pi[1]+.7378351419e-1*pi[2]+.5349566429e-1*pi[3]+.204
5776811*pi[4]+.1481922592*pi[5]+.1069145598*pi[6]+.7778823884e-1
*pi[7]+.5560700524e-1*pi[8]+.4122591717e-1*pi[9]+.2831943989e-1*
pi[10]+.2248001535e-1*pi[11]+.1319221231e-1*pi[12]+.1873796068e-
1*pi[13]+x16-y16 = .533;
res16 := .1556855321  $\pi_1$  + .07378351419  $\pi_2$  + .05349566429  $\pi_3$  + .2045776811  $\pi_4$ 
+ .1481922592  $\pi_5$  + .1069145598  $\pi_6$  + .07778823884  $\pi_7$  + .05560700524  $\pi_8$ 
+ .04122591717  $\pi_9$  + .02831943989  $\pi_{10}$  + .02248001535  $\pi_{11}$  + .01319221231  $\pi_{12}$ 
+ .01873796068  $\pi_{13}$  + x16 - y16 = .533
> res17 :=
.1818916106*pi[1]+.8027481448e-1*pi[2]+.5520239391e-1*pi[3]+.217
7802883*pi[4]+.1496552907*pi[5]+.1025258841*pi[6]+.7070368158e-1
*pi[7]+.4807014821e-1*pi[8]+.3368635113e-1*pi[9]+.2211529115e-1*
pi[10]+.1648625402e-1*pi[11]+.9351407971e-2*pi[12]+.1225658376e-
1*pi[13]+x17-y17 = .567;
res17 := .1818916106  $\pi_1$  + .08027481448  $\pi_2$  + .05520239391  $\pi_3$  + .2177802883  $\pi_4$ 
+ .1496552907  $\pi_5$  + .1025258841  $\pi_6$  + .07070368158  $\pi_7$  + .04807014821  $\pi_8$ 
+ .03368635113  $\pi_9$  + .02211529115  $\pi_{10}$  + .01648625402  $\pi_{11}$  + .009351407971  $\pi_{12}$ 
+ .01225658376  $\pi_{13}$  + x17 - y17 = .567
> res18 :=
.2072848196*pi[1]+.8552354856e-1*pi[2]+.5597183945e-1*pi[3]+.227
8952667*pi[4]+.1490664231*pi[5]+.9727542845e-1*pi[6]+.6381019469
e-1*pi[7]+.4137692184e-1*pi[8]+.2751846221e-1*pi[9]+.1730193132e
-1*pi[10]+.1217087998e-1*pi[11]+.6679520904e-2*pi[12]+.812476320
6e-2*pi[13]+x18-y18 = .6;
res18 := .2072848196  $\pi_1$  + .08552354856  $\pi_2$  + .05597183945  $\pi_3$  + .2278952667  $\pi_4$ 
+ .1490664231  $\pi_5$  + .09727542845  $\pi_6$  + .06381019469  $\pi_7$  + .04137692184  $\pi_8$ 
+ .02751846221  $\pi_9$  + .01730193132  $\pi_{10}$  + .01217087998  $\pi_{11}$  + .006679520904  $\pi_{12}$ 
+ .008124763206  $\pi_{13}$  + x18 - y18 = .6
> res19 :=
.2324339980*pi[1]+.8979536108e-1*pi[2]+.5601946282e-1*pi[3]+.235
6843596*pi[4]+.1469697588*pi[5]+.9148307148e-1*pi[6]+.5717996919
e-1*pi[7]+.3540471743e-1*pi[8]+.2239202367e-1*pi[9]+.1349263015e
-1*pi[10]+.8978908045e-2*pi[11]+.4767768318e-2*pi[12]+.539797108

```

$$5e-2*pi[13]+x19-y19 = .633;$$

$$\begin{aligned} res19 := & .2324339980 \pi_1 + .08979536108 \pi_2 + .05601946282 \pi_3 + .2356843596 \pi_4 \\ & + .1469697588 \pi_5 + .09148307148 \pi_6 + .05717996919 \pi_7 + .03540471743 \pi_8 \\ & + .02239202367 \pi_9 + .01349263015 \pi_{10} + .008978908045 \pi_{11} + .004767768318 \pi_{12} \\ & + .005397971085 \pi_{13} + x19 - y19 = .633 \end{aligned}$$

> res20 :=

$$\begin{aligned} & .2579481395*pi[1]+.9325933924e-1*pi[2]+.5546095846e-1*pi[3]+.241 \\ & 6207567*pi[4]+.1436424963*pi[5]+.8527717255e-1*pi[6]+.5079150138 \\ & e-1*pi[7]+.3002192071e-1*pi[8]+.1806241763e-1*pi[9]+.1042426651e \\ & -1*pi[10]+.6566812816e-2*pi[11]+.3370390710e-2*pi[12]+.355382696 \\ & 3e-2*pi[13]+x20-y20 = .667; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res20 := & .2579481395 \pi_1 + .09325933924 \pi_2 + .05546095846 \pi_3 + .2416207567 \pi_4 \\ & + .1436424963 \pi_5 + .08527717255 \pi_6 + .05079150138 \pi_7 + .03002192071 \pi_8 \\ & + .01806241763 \pi_9 + .01042426651 \pi_{10} + .006566812816 \pi_{11} + .003370390710 \pi_{12} \\ & + .003553826963 \pi_{13} + x20 - y20 = .667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > obj := (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x \\ & 4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/10 \\ & 00) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11 \\ & +y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * \\ & (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000 \\ &) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} obj := & \frac{143}{1000}y1 + \frac{143}{1000}x1 + \frac{43}{250}x2 + \frac{43}{250}y2 + \frac{43}{500}y6 + \frac{43}{500}x6 + \frac{1}{10}y5 + \frac{1}{10}x5 + \frac{57}{500}y4 \\ & + \frac{57}{500}x4 + \frac{143}{1000}y3 + \frac{143}{1000}x3 + \frac{57}{1000}x8 + \frac{57}{1000}y8 + \frac{43}{1000}x9 + \frac{43}{1000}y9 + \frac{29}{1000}x10 \\ & + \frac{29}{1000}y10 + \frac{7}{500}x11 + \frac{7}{500}y11 + \frac{7}{1000}x12 + \frac{7}{1000}y12 + \frac{3}{500}x13 + \frac{3}{500}y13 + \frac{1}{250}x14 \\ & + \frac{1}{250}y14 + \frac{3}{1000}x15 + \frac{3}{1000}y15 + \frac{1}{1000}x16 + \frac{1}{1000}y16 + \frac{9}{125}x7 + \frac{1}{1000}x17 + \frac{1}{1000}y17 \\ & + \frac{1}{1000}x18 + \frac{1}{1000}y18 + \frac{1}{1000}x19 + \frac{1}{1000}y19 + \frac{1}{1000}x20 + \frac{1}{1000}y20 + \frac{9}{125}y7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > dese := (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (\\ & x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1 \\ & 000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x1 \\ & 1-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14) \\ & * (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/100 \\ & 0) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dese := & -\frac{143}{1000}y1 + \frac{143}{1000}x1 + \frac{43}{250}x2 - \frac{43}{250}y2 - \frac{43}{500}y6 + \frac{43}{500}x6 - \frac{1}{10}y5 + \frac{1}{10}x5 - \frac{57}{500}y4 \\ & + \frac{57}{500}x4 - \frac{143}{1000}y3 + \frac{143}{1000}x3 + \frac{57}{1000}x8 - \frac{57}{1000}y8 + \frac{43}{1000}x9 - \frac{43}{1000}y9 + \frac{29}{1000}x10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{29}{1000}y^{10} + \frac{7}{500}x^{11} - \frac{7}{500}y^{11} + \frac{7}{1000}x^{12} - \frac{7}{1000}y^{12} + \frac{3}{500}x^{13} - \frac{3}{500}y^{13} + \frac{1}{250}x^{14} \\
& -\frac{1}{250}y^{14} + \frac{3}{1000}x^{15} - \frac{3}{1000}y^{15} + \frac{1}{1000}x^{16} - \frac{1}{1000}y^{16} + \frac{9}{125}x^7 + \frac{1}{1000}x^{17} - \frac{1}{1000}y^{17} \\
& + \frac{1}{1000}x^{18} - \frac{1}{1000}y^{18} + \frac{1}{1000}x^{19} - \frac{1}{1000}y^{19} + \frac{1}{1000}x^{20} - \frac{1}{1000}y^{20} - \frac{9}{125}y^7
\end{aligned}$$

>

≡ Sustituimos las primas de Noruega 75 para calcular las variables de holgura

```
> ec1:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res1);
```

$$ec1 := .04768370553 + x1 - y1 = .033$$

```
> y1:=.04768370553-0.033;
```

$$y1 := .01468370553$$

```
> ec2:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res2);
```

$$ec2 := .04993305434 + x2 - y2 = .067$$

```
> x2:=0.067-.04993305434;
```

$$x2 := .01706694566$$

```
> ec3:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res3);
```

$$ec3 := .05280713398 + x3 - y3 = .1$$

```
> x3:=0.1-.05280713398;
```

$$x3 := .04719286602$$

```
> ec4:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res4);
```

$$ec4 := .05662246967 + x4 - y4 = .133$$

```
> x4:=0.133-.05662246967;
```

$$x4 := .07637753033$$

```
> ec5:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res5);
```

$$ec5 := .06187477270 + x5 - y5 = .167$$

```
> x5:=0.167-.06187477270;
```

$$x5 := .1051252273$$

```
> ec6:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res6);
```

```

091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res6);
      ec6 := .06858353648 + x6 - y6 = .2
> x6:=0.2-.06858353648;
      x6 := .1314164635
> ec7:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.
091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res7);
      ec7 := .07708546868 + x7 - y7 = .233
> x7:=0.233-.07708546868;
      x7 := .1559145313
> ec8:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.
091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res8);
      ec8 := .08765786588 + x8 - y8 = .267
> x8:=0.267-.08765786588;
      x8 := .1793421341
> ec9:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.
091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res9);
      ec9 := .09926224431 + x9 - y9 = .3
> x9:=0.3-.09926224431;
      x9 := .2007377557
> ec10:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res10);
      ec10 := .1114907379 + x10 - y10 = .333
> x10:=0.333-.1114907379;
      x10 := .2215092621
> ec11:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res11);
      ec11 := .1239209590 + x11 - y11 = .367
> x11:=0.367-.1239209590;
      x11 := .2430790410
> ec12:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res12);
      ec12 := .1351632209 + x12 - y12 = .4
> x12:=0.4-.1351632209;
      x12 := .2648367791
> ec13:=subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0.
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res13);

```

```

ec13 := .1452057244 + x13 - y13 = .433
> x13 := 0.433 - .1452057244;

x13 := .2877942756
> ec14 := subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res14);

ec14 := .1541599786 + x14 - y14 = .467
> x14 := 0.467 - .1541599786;

x14 := .3128400214
> ec15 := subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res15);

ec15 := .1615489790 + x15 - y15 = .5
> x15 := 0.5 - .1615489790;

x15 := .3384510210
> ec16 := subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res16);

ec16 := .1677998016 + x16 - y16 = .533
> x16 := 0.533 - .1677998016;

x16 := .3652001984
> ec17 := subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res17);

ec17 := .1732336785 + x17 - y17 = .567
> x17 := 0.567 - .1732336785;

x17 := .3937663215
> ec18 := subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res18);

ec18 := .1777043661 + x18 - y18 = .6
> x18 := 0.6 - .1777043661;

x18 := .4222956339
> ec19 := subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res19);

ec19 := .1815330998 + x19 - y19 = .633
> x19 := 0.633 - .1815330998;

x19 := .4514669002
> ec20 := subs({pi[1]=0.228,pi[2]=0.213,pi[3]=0.198,pi[4]=0.182,pi[5]
]=0.167,pi[6]=0.152,pi[7]=0.137,pi[8]=0.122,pi[9]=0.106,pi[10]=0
.091,pi[11]=0.076,pi[12]=0.061,pi[13]=0.046},res20);

ec20 := .1849355719 + x20 - y20 = .667

```

```
> x20:=0.667-.1849355719;
```

```
x20:=.4820644281
```

```
> 'objNoruega75'=subs({x1=0,y1=.1468370553e-1,x2=.1706694566e-1,y2=0,x3=.4719286602e-1,y3=0,x4=.7637753033e-1,y4=0,x5=.1051252273,y5=0,x6=.1314164635,y6=0,x7=.1559145313,y7=0,x8=.1793421341,y8=0,x9=.2007377557,y9=0,x10=.2215092621,y10=0,x11=.2430790410,y11=0,x12=.2648367791,y12=0,x13=.2877942756,y13=0,x14=.3128400214,y14=0,x15=.3384510210,y15=0,x16=.3652001984,y16=0,x17=.3937663215,y17=0,x18=.4222956339,y18=0,x19=.4514669002,y19=0,x20=.4820644281,y20=0},obj);
```

```
objNoruega75=.09017431773
```

```
> 'deseNoruega75'=subs({x1=0,y1=.1468370553e-1,x2=.1706694566e-1,y2=0,x3=.4719286602e-1,y3=0,x4=.7637753033e-1,y4=0,x5=.1051252273,y5=0,x6=.1314164635,y6=0,x7=.1559145313,y7=0,x8=.1793421341,y8=0,x9=.2007377557,y9=0,x10=.2215092621,y10=0,x11=.2430790410,y11=0,x12=.2648367791,y12=0,x13=.2877942756,y13=0,x14=.3128400214,y14=0,x15=.3384510210,y15=0,x16=.3652001984,y16=0,x17=.3937663215,y17=0,x18=.4222956339,y18=0,x19=.4514669002,y19=0,x20=.4820644281,y20=0},dese);
```

```
deseNoruega75=.08597477794
```

```
>
```

primas-lineales

> restart;

> with(simplex);

Warning, new definition for maximize

Warning, new definition for minimize

[basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot,

pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize]

> r1:=(117/10^10)*(a-b)+(313/10^10)*(a-b*2)+(2075/10^10)*(a-b*3)+(7421/10^10)*(a-b*4)+(46713/10^10)*(a-b*5)+(120506/10^10)*(a-b*6)+(884562/10^10)*(a-b*7)+(1865342/10^10)*(a-b*8)+(17030098/10^10)*(a-b*9)+(26458822/10^10)*(a-b*10)+(323107673/10^10)*(a-b*11)+(312619132/10^10)*(a-b*12)+(9317857227/10^10)*(a-b*13)+x1-y1=(33/1000);

$$r1 := -\frac{128877724963}{100000000000}b + \frac{100000000001}{100000000000}a + x1 - y1 = \frac{33}{1000}$$

> r2:=(10716/10^10)*(a-b)+(22748/10^10)*(a-b*2)+(81813/10^10)*(a-b*3)+(278861/10^10)*(a-b*4)+(965881/10^10)*(a-b*5)+(2123978/10^10)*(a-b*6)+(8249333/10^10)*(a-b*7)+(15527030/10^10)*(a-b*8)+(72279468/10^10)*(a-b*9)+(104793490/10^10)*(a-b*10)+(634806205/10^10)*(a-b*11)+(593667712/10^10)*(a-b*12)+(8567192761/10^10)*(a-b*13)+x2-y2=(67/1000);

$$r2 := -\frac{127379788743}{100000000000}b + \frac{24999999999}{25000000000}a + x2 - y2 = \frac{67}{1000}$$

> r3:=(145925/10^10)*(a-b)+(257587/10^10)*(a-b*2)+(670146/10^10)*(a-b*3)+(2213165/10^10)*(a-b*4)+(19832262/10^10)*(a-b*5)+(33972046/10^10)*(a-b*6)+(29783247/10^10)*(a-b*7)+(50714245/10^10)*(a-b*8)+(163064122/10^10)*(a-b*9)+(221680971/10^10)*(a-b*10)+(905480159/10^10)*(a-b*11)+(819312321/10^10)*(a-b*12)+(7790293614/10^10)*(a-b*13)+x3-y3=(1/10);

$$r3 := -\frac{125678947863}{100000000000}b + \frac{1003741981}{100000000000}a + x3 - y3 = \frac{1}{10}$$

> r4:=(95393435/10^10)*(a-b)+(3698731/10^10)*(a-b*2)+(2997822/10^10)*(a-b*3)+(9703596/10^10)*(a-b*4)+(19832262/10^10)*(a-b*5)+(33972046/10^10)*(a-b*6)+(74280665/10^10)*(a-b*7)+(115363103/10^10)*(a-b*8)+(286717247/10^10)*(a-b*9)+(366384388/10^10)*(a-b*10)+(1131817818/10^10)*(a-b*11)+(990867002/10^10)*(a-b*12)+(6965673131/10^10)*(a-b*13)+x4-y4=(133/1000);

$$r4 := -\frac{3075872791}{2500000000}b + \frac{5048350623}{5000000000}a + x4 - y4 = \frac{133}{1000}$$

> r5:=(4259152/10^10)*(a-b)+(5557137/10^10)*(a-b*2)+(9766461/10^10)*(a-b*3)+(31259918/10^10)*(a-b*4)+(54103891/10^10)*(a-b*5)+(83247175/10^10)*(a-b*6)+(151806997/10^10)*(a-b*7)+(215969315/10^10)*(a-b*8)+

$(438657861/10^{10}) * (a-b*9) + (527120748/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(1303958369/10^{10}) * (a-b*11) + (1103409060/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(6070883914/10^{10}) * (a-b*13) + x5 - y5 = (167/1000);$

$$r5 := -\frac{955641507}{80000000}b + \frac{4999999999}{5000000000}a + x5 - y5 = \frac{167}{1000}$$

$> r6 := (13697558/10^{10}) * (a-b) + (15770376/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(24245585/10^{10}) * (a-b*3) + (77330064/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(117515929/10^{10}) * (a-b*5) + (164570641/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(260565142/10^{10}) * (a-b*7) + (342431688/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(594075320/10^{10}) * (a-b*9) + (673897092/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(1398655489/10^{10}) * (a-b*11) + (1145122259/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(5172122857/10^{10}) * (a-b*13) + x6 - y6 = (2/10);$

$$r6 := -\frac{57507815869}{50000000000}b + a - y6 + x6 = \frac{1}{5}$$

$> r7 := (35803045/10^{10}) * (a-b) + (36776528/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(50517533/10^{10}) * (a-b*3) + (161509365/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(219895715/10^{10}) * (a-b*5) + (282523315/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(397329045/10^{10}) * (a-b*7) + (484719618/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(736784396/10^{10}) * (a-b*9) + (790405523/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(1414132199/10^{10}) * (a-b*11) + (1120209867/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(4269393847/10^{10}) * (a-b*13) + x7 - y7 = (233/1000);$

$$r7 := -y7 + x7 - \frac{54697916141}{50000000000}b + \frac{2499999999}{25000000000}a = \frac{233}{1000}$$

$> r8 := (81085379/10^{10}) * (a-b) + (74735718/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(92836046/10^{10}) * (a-b*3) + (299075098/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(369004973/10^{10}) * (a-b*5) + (436819723/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(552909641/10^{10}) * (a-b*7) + (627499804/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(848355863/10^{10}) * (a-b*9) + (860723874/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(1349009323/10^{10}) * (a-b*11) + (1032900111/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(3375044448/10^{10}) * (a-b*13) + x8 - y8 = (267/1000);$

$$r8 := x8 - y8 - \frac{102413597683}{100000000000}b + \frac{100000000001}{100000000000}a = \frac{267}{1000}$$

$> r9 := (156074956/10^{10}) * (a-b) + (130430534/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(148575699/10^{10}) * (a-b*3) + (484227523/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(548720654/10^{10}) * (a-b*5) + (603277617/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(697699869/10^{10}) * (a-b*7) + (740944992/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(906461577/10^{10}) * (a-b*9) + (872555176/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(1221013507/10^{10}) * (a-b*11) + (904549045/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(2585468847/10^{10}) * (a-b*13) + x9 - y9 = (3/10);$

$$r9 := x9 - y9 - \frac{18950967857}{20000000000}b + \frac{2499999999}{25000000000}a = \frac{3}{10}$$

$> r10 := (267882252/10^{10}) * (a-b) + (204175574/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(215043123/10^{10}) * (a-b*3) + (711538251/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(746386738/10^{10}) * (a-b*5) + (765660511/10^{10}) * (a-b*6) +$

$(816357704/10^{10}) * (a-b*7) + (813857969/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(910433600/10^{10}) * (a-b*9) + (832633777/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(1052490592/10^{10}) * (a-b*11) + (754393886/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(1909146020/10^{10}) * (a-b*13) + x10 - y10 = (333/1000) ;$

$$r10 := x10 - y10 - \frac{86688041783}{10000000000} b + \frac{9999999997}{10000000000} a = \frac{333}{1000}$$

$> r11 := (422858364/10^{10}) * (a-b) + (294639130/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(288173383/10^{10}) * (a-b*3) + (971575666/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(947296113/10^{10}) * (a-b*5) + (908544836/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(897418891/10^{10}) * (a-b*7) + (840746907/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(865099539/10^{10}) * (a-b*9) + (751521800/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(863857791/10^{10}) * (a-b*11) + (598489005/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(1349778568/10^{10}) * (a-b*13) + x11 - y11 = (367/1000) ;$

$$r11 := -\frac{78491155507}{10000000000} b + \frac{9999999993}{10000000000} a - y11 + x11 = \frac{367}{1000}$$

$> r12 := (608066864/10^{10}) * (a-b) + (389997413/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(356844129/10^{10}) * (a-b*3) + (1228499692/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(1121338704/10^{10}) * (a-b*5) + (1010980340/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(932477030/10^{10}) * (a-b*7) + (824530392/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(787585051/10^{10}) * (a-b*9) + (651657547/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(688379272/10^{10}) * (a-b*11) + (461434428/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(938209134/10^{10}) * (a-b*13) + x12 - y12 = (4/10) ;$

$$r12 := x12 - \frac{1421593911}{2000000000} b + \frac{2499999999}{2500000000} a - y12 = \frac{2}{5}$$

$> r13 := (820629069/10^{10}) * (a-b) + (486198556/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(417929093/10^{10}) * (a-b*3) + (1472572116/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(1263403145/10^{10}) * (a-b*5) + (1073920130/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(929155828/10^{10}) * (a-b*7) + (777179808/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(692873441/10^{10}) * (a-b*9) + (8546632091/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(534014694/10^{10}) * (a-b*11) + (346340832/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(639151192/10^{10}) * (a-b*13) + x13 - y13 = (433/1000) ;$

$$r13 := -\frac{72230283341}{50000000000} b + \frac{3599999999}{20000000000} a - y13 + x13 = \frac{433}{1000}$$

$> r14 := (1060067090/10^{10}) * (a-b) + (580631324/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(469694005/10^{10}) * (a-b*3) + (1698628580/10^{10}) * (a-b*4) +$
 $(1372062519/10^{10}) * (a-b*5) + (1100576121/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(894996536/10^{10}) * (a-b*7) + (708418422/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(591008842/10^{10}) * (a-b*9) + (444411181/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(402784951/10^{10}) * (a-b*11) + (252497866/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(424222563/10^{10}) * (a-b*13) + x14 - y14 = (467/1000) ;$

$$r14 := x14 - \frac{29279856041}{50000000000} b + a - y14 = \frac{467}{1000}$$

$> r15 := (1305087280/10^{10}) * (a-b) + (664167021/10^{10}) * (a-b*2) +$
 $(508015655/10^{10}) * (a-b*3) + (1887715601/10^{10}) * (a-b*4) +$

$(1442235180/10^{10}) * (a-b*5) + (1096056863/10^{10}) * (a-b*6) +$
 $(841967488/10^{10}) * (a-b*7) + (632833525/10^{10}) * (a-b*8) +$
 $(496902227/10^{10}) * (a-b*9) + (356973464/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(302202431/10^{10}) * (a-b*11) + (183295040/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(282548218/10^{10}) * (a-b*13) + x15 - y15 = (5/10) ;$

$$r15 := -\frac{53691037123}{10000000000}b + \frac{9999999993}{10000000000}a - y15 + x15 = \frac{1}{2}$$

$> r16 := (1556855321/10^{10}) * (a-b) + (737835142/10^{10}) * (a-b*2) + (5349566$
 $43/10^{10}) * (a-b*3) + (2045776811/10^{10}) * (a-b*4) + (1481922592/10^{10}) * (a-b*5) +$
 $(1069145598/10^{10}) * (a-b*6) + (777882388/10^{10}) * (a-b*7) + (55$
 $6070052/10^{10}) * (a-b*8) + (412259171/10^{10}) * (a-b*9) + (283194399/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(224800153/10^{10}) * (a-b*11) + (131922123/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(187379606/10^{10}) * (a-b*13) + x16 - y16 = (533/1000) ;$

$$r16 := -\frac{1549150157}{312500000}b + \frac{9999999999}{10000000000}a + x16 - y16 = \frac{533}{1000}$$

$> r17 := (1818916106/10^{10}) * (a-b) + (802748145/10^{10}) * (a-b*2) + (5520239$
 $39/10^{10}) * (a-b*3) + (2177802883/10^{10}) * (a-b*4) + (1496552907/10^{10}) * (a-b*5) +$
 $(1025258841/10^{10}) * (a-b*6) + (707036815/10^{10}) * (a-b*7) + (48$
 $0701482/10^{10}) * (a-b*8) + (336863511/10^{10}) * (a-b*9) + (221152911/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(164862540/10^{10}) * (a-b*11) + (93514079/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(122565837/10^{10}) * (a-b*13) + x17 - y17 = (567/1000) ;$

$$r17 := x17 - \frac{9198639273}{2000000000}b + \frac{2499999999}{2500000000}a - y17 = \frac{567}{1000}$$

$> r18 := (2072848196/10^{10}) * (a-b) + (855235485/10^{10}) * (a-b*2) + (5597183$
 $94/10^{10}) * (a-b*3) + (2278952667/10^{10}) * (a-b*4) + (1490664231/10^{10}) * (a-b*5) +$
 $(972754284/10^{10}) * (a-b*6) + (638101947/10^{10}) * (a-b*7) + (413$
 $769218/10^{10}) * (a-b*8) + (275184622/10^{10}) * (a-b*9) + (173019313/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(121708799/10^{10}) * (a-b*11) + (66795209/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(81247632/10^{10}) * (a-b*13) + x18 - y18 = (6/10) ;$

$$r18 := -y18 + x18 - \frac{43048412489}{10000000000}b + \frac{9999999997}{10000000000}a = \frac{3}{5}$$

$> r19 := (2324339982/10^{10}) * (a-b) + (897953610/10^{10}) * (a-b*2) + (5601946$
 $29/10^{10}) * (a-b*3) + (2356843586/10^{10}) * (a-b*4) + (1469697589/10^{10}) * (a-b*5) +$
 $(914830717/10^{10}) * (a-b*6) + (571799693/10^{10}) * (a-b*7) + (354$
 $047175/10^{10}) * (a-b*8) + (223920235/10^{10}) * (a-b*9) + (134926302/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(89789082/10^{10}) * (a-b*11) + (47677683/10^{10}) * (a-b*12) +$
 $(53979712/10^{10}) * (a-b*13) + x19 - y19 = (633/1000) ;$

$$r19 := -\frac{2026337321}{500000000}b + x19 - y19 + \frac{1999999999}{2000000000}a = \frac{633}{1000}$$

$> r20 := (2579481402/10^{10}) * (a-b) + (932593391/10^{10}) * (a-b*2) + (5546095$
 $86/10^{10}) * (a-b*3) + (2416207558/10^{10}) * (a-b*4) + (1469697589/10^{10}) * (a-b*5) +$
 $(852771724/10^{10}) * (a-b*6) + (507915016/10^{10}) * (a-b*7) + (300$
 $219205/10^{10}) * (a-b*8) + (180624175/10^{10}) * (a-b*9) + (104242665/10^{10}) * (a-b*10) +$
 $(65668130/10^{10}) * (a-b*11) + (33703904/10^{10}) * (a-b*12) +$

$$35538270/10^{10}) * (a - b * 13) + x_{20} - y_{20} = (667/1000) ;$$

$$r_{20} := -\frac{9613110557}{2500000000} b - y_{20} + x_{20} + \frac{2006654523}{2000000000} a = \frac{667}{1000}$$

$$\begin{aligned} > \text{obj} := (x_1 + y_1) * (143/1000) + (x_2 + y_2) * (172/1000) + (x_3 + y_3) * (143/1000) + (x_4 + y_4) * (114/1000) \\ &+ (x_5 + y_5) * (1/10) + (x_6 + y_6) * (86/1000) + (x_7 + y_7) * (72/1000) + (x_8 + y_8) * (57/1000) \\ &+ (x_9 + y_9) * (43/1000) + (x_{10} + y_{10}) * (29/1000) + (x_{11} + y_{11}) * (14/1000) + (x_{12} + y_{12}) * (7/1000) \\ &+ (x_{13} + y_{13}) * (6/1000) + (x_{14} + y_{14}) * (4/1000) + (x_{15} + y_{15}) * (3/1000) + (x_{16} + y_{16}) * (1/1000) + (x_{17} + y_{17}) * (1/1000) \\ &+ (x_{18} + y_{18}) * (1/1000) + (x_{19} + y_{19}) * (1/1000) + (x_{20} + y_{20}) * (1/1000) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{obj} := & \frac{43}{1000} x_9 + \frac{43}{1000} y_9 + \frac{57}{1000} x_8 + \frac{29}{1000} x_{10} + \frac{29}{1000} y_{10} + \frac{7}{1000} x_{12} + \frac{9}{125} y_7 + \frac{9}{125} x_7 \\ & + \frac{57}{1000} y_8 + \frac{1}{250} x_{14} + \frac{1}{1000} y_{18} + \frac{1}{1000} x_{18} + \frac{1}{1000} x_{17} + \frac{1}{1000} x_{19} + \frac{1}{1000} y_{20} + \frac{1}{1000} x_{20} \\ & + \frac{1}{1000} y_{19} + \frac{43}{250} x_2 + \frac{43}{250} y_2 + \frac{143}{1000} x_1 + \frac{143}{1000} y_1 + \frac{43}{500} y_6 + \frac{1}{10} x_5 + \frac{1}{10} y_5 + \frac{57}{500} x_4 \\ & + \frac{57}{500} y_4 + \frac{143}{1000} x_3 + \frac{143}{1000} y_3 + \frac{43}{500} x_6 + \frac{7}{500} y_{11} + \frac{7}{500} x_{11} + \frac{7}{1000} y_{12} + \frac{3}{500} y_{13} + \frac{3}{500} x_{13} \\ & + \frac{1}{250} y_{14} + \frac{3}{1000} y_{15} + \frac{3}{1000} x_{15} + \frac{1}{1000} x_{16} + \frac{1}{1000} y_{16} + \frac{1}{1000} y_{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{dese} := (x_1 - y_1) * (143/1000) + (x_2 - y_2) * (172/1000) + (x_3 - y_3) * (143/1000) + (x_4 - y_4) * (114/1000) \\ &+ (x_5 - y_5) * (1/10) + (x_6 - y_6) * (86/1000) + (x_7 - y_7) * (72/1000) + (x_8 - y_8) * (57/1000) + (x_9 - y_9) * (43/1000) \\ &+ (x_{10} - y_{10}) * (29/1000) + (x_{11} - y_{11}) * (14/1000) + (x_{12} - y_{12}) * (7/1000) + (x_{13} - y_{13}) * (6/1000) + (x_{14} - y_{14}) * (4/1000) \\ &+ (x_{15} - y_{15}) * (3/1000) + (x_{16} - y_{16}) * (1/1000) + (x_{17} - y_{17}) * (1/1000) + (x_{18} - y_{18}) * (1/1000) + (x_{19} - y_{19}) * (1/1000) + (x_{20} - y_{20}) * (1/1000) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dese} := & \frac{43}{1000} x_9 - \frac{43}{1000} y_9 + \frac{57}{1000} x_8 - \frac{29}{1000} x_{10} - \frac{29}{1000} y_{10} + \frac{7}{1000} x_{12} - \frac{9}{125} y_7 + \frac{9}{125} x_7 \\ & - \frac{57}{1000} y_8 + \frac{1}{250} x_{14} - \frac{1}{1000} y_{18} + \frac{1}{1000} x_{18} + \frac{1}{1000} x_{17} + \frac{1}{1000} x_{19} - \frac{1}{1000} y_{20} + \frac{1}{1000} x_{20} \\ & - \frac{1}{1000} y_{19} + \frac{43}{250} x_2 - \frac{43}{250} y_2 + \frac{143}{1000} x_1 - \frac{143}{1000} y_1 - \frac{43}{500} y_6 + \frac{1}{10} x_5 - \frac{1}{10} y_5 + \frac{57}{500} x_4 \\ & - \frac{57}{500} y_4 + \frac{143}{1000} x_3 - \frac{143}{1000} y_3 + \frac{43}{500} x_6 - \frac{7}{500} y_{11} + \frac{7}{500} x_{11} - \frac{7}{1000} y_{12} - \frac{3}{500} y_{13} + \frac{3}{500} x_{13} \\ & - \frac{1}{250} y_{14} - \frac{3}{1000} y_{15} + \frac{3}{1000} x_{15} + \frac{1}{1000} x_{16} - \frac{1}{1000} y_{16} - \frac{1}{1000} y_{17} \end{aligned}$$

$$> r_{21} := \pi_1 > \pi_2 ;$$

$$r_{21} := \pi_2 \leq \pi_1$$

$$> r_{22} := \pi_2 > \pi_3 ;$$

$$r_{22} := \pi_3 \leq \pi_2$$

$$> r_{23} := \pi_3 > \pi_4 ;$$

$$r_{23} := \pi_4 \leq \pi_3$$

```

> r24:=pi4>=pi5;
r24 := pi5 ≤ pi4

> r25:=pi5>=pi6;
r25 := pi6 ≤ pi5

> r26:=pi6>=pi7;
r26 := pi7 ≤ pi6

> r27:=pi7>=pi8;
r27 := pi8 ≤ pi7

> r28:=pi8>=pi9;
r28 := pi9 ≤ pi8

> r29:=pi9>=pi10;
r29 := pi10 ≤ pi9

> r30:=pi10>=pi11;
r30 := pi11 ≤ pi10

> r31:=pi11>=pi12;
r31 := pi12 ≤ pi11

> r32:=pi12>=pi13;
r32 := pi13 ≤ pi12

>
> r33:=(x1-y1)*(143/1000)+(x2-y2)*(172/1000)+(x3-y3)*(143/1000)+(x
4-y4)*(114/1000)+(x5-y5)*(1/10)+(x6-y6)*(86/1000)+(x7-y7)*(72/10
00)+(x8-y8)*(57/1000)+(x9-y9)*(43/1000)+(x10-y10)*(29/1000)+(x11
-y11)*(14/1000)+(x12-y12)*(7/1000)+(x13-y13)*(6/1000)+(x14-y14)*
(4/1000)+(x15-y15)*(3/1000)+(x16-y16)*(1/1000)+(x17-y17)*(1/1000
)+(x18-y18)*(1/1000)+(x19-y19)*(1/1000)+(x20-y20)*(1/1000)=0;
r33 :=  $\frac{43}{1000}x_9 - \frac{43}{1000}y_9 + \frac{57}{1000}x_8 + \frac{29}{1000}x_{10} - \frac{29}{1000}y_{10} + \frac{7}{1000}x_{12} - \frac{9}{125}y_7 + \frac{9}{125}x_7$ 
 $- \frac{57}{1000}y_8 + \frac{1}{250}x_{14} - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{18} + \frac{1}{1000}x_{17} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}x_{20}$ 
 $- \frac{1}{1000}y_{19} + \frac{43}{250}x_2 - \frac{43}{250}y_2 + \frac{143}{1000}x_1 - \frac{143}{1000}y_1 - \frac{43}{500}y_6 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}y_5 + \frac{57}{500}x_4$ 
 $- \frac{57}{500}y_4 + \frac{143}{1000}x_3 - \frac{143}{1000}y_3 + \frac{43}{500}x_6 - \frac{7}{500}y_{11} + \frac{7}{500}x_{11} - \frac{7}{1000}y_{12} - \frac{3}{500}y_{13} + \frac{3}{500}x_{13}$ 
 $- \frac{1}{250}y_{14} - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{3}{1000}x_{15} + \frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{16} - \frac{1}{1000}y_{17} = 0$ 

> soleg:=minimize(obj,{r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,
r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r33},NONNEGATIVE);
soleg := {y9 = 0, x12 = 0, y7 = 0, y8 = 0, x14 = 0, x2 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y5 = 0, y4 = 0, x11 = 0,
x13 = 0, x15 = 0, x16 = 0, x3 =  $\frac{466281555343119024053111}{111883656597043752541276000}$ 

```

$$\begin{aligned}
x6 &= \frac{77590520746258942251693}{2151608780712379856563000}, y14 = \frac{1063857996355413470974863}{13985457074630469067659500}, \\
y1 &= \frac{8468986755925421805802427}{223767313194087505082552000}, x8 = \frac{4124590343105287751562421}{223767313194087505082552000}, \\
y2 &= \frac{194491590390713155871329}{13985457074630469067659500}, y18 = \frac{10569698616937525272199039}{223767313194087505082552000}, \\
y12 &= \frac{660010125247189872273407}{11188365659704375254127600}, x4 = \frac{1550798353869561419992843}{111883656597043752541276000}, \\
a &= \frac{26189934130949018750000}{27970914149260938135319}, y16 = \frac{15757822592465586259657913}{223767313194087505082552000}, \\
y11 &= \frac{9447230446419101330882803}{223767313194087505082552000}, y13 = \frac{63161109152545092309366101}{223767313194087505082552000}, \\
y17 &= \frac{1691107058305530668446887}{27970914149260938135319000}, y20 = \frac{3180836615244917119541809}{223767313194087505082552000}, \\
y15 &= \frac{16953625054420446499897883}{223767313194087505082552000}, x7 = \frac{1752198207633580594022671}{55941828298521876270638000}, x17 = 0.
\end{aligned}$$

$$x19 = 0, x20 = 0, y3 = 0, b = \frac{1878390593029305000000}{27970914149260938135319},$$

$$y10 = \frac{4737755920450336586471887}{223767313194087505082552000}, y19 = \frac{536516638295797851375233}{17212870245699038852504000},$$

$$x5 = \frac{3678235001719615247284057}{111883656597043752541276000}, x18 = 0, x10 = 0, x9 = 0 \}$$

> solequ:=evalf(soleq) ;

solequ := {y9 = 0, x12 = 0, y7 = 0, y8 = 0, x14 = 0, x2 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y5 = 0, y4 = 0,
x11 = 0, x13 = 0, x15 = 0, x16 = 0, x17 = 0, x19 = 0, x20 = 0, y3 = 0, x18 = 0, x10 = 0, x9 = 0,
b = .06715513776, y10 = .02117268985, y19 = .03116950460, x5 = .03287553440,
x7 = .03132179017, y18 = .04723522156, y12 = .05899075391, x4 = .01386081221,
a = .9363274290, y16 = .07042057380, y11 = .04221899218, y13 = .2822624460,
y17 = .06045948478, y20 = .01421492965, y15 = .07576452884, y2 = .01390670247,
x6 = .03606163046, y14 = .07606887574, y1 = .03784729161, x3 = .004167557350,
x8 = .01843249706 }

> 'obj'=subs(solequ,obj) ;

$$obj = .02374153635$$

> 'dese'=subs(solequ,dese) ;

$$dese = -.208 \cdot 10^{-11}$$

> p1:=a-b;

$$p1 := a - b$$

> 'pi1'=subs(solequ,p1) ;

$$\pi1 = .8691722912$$



BIBLIOTECAS

> p2:=a-b*2;	$p2 := a - 2 b$
> 'pi2'=subs(solequ,p2);	$\pi2 = .8020171535$
> p3:=a-b*3;	$p3 := a - 3 b$
> 'pi3'=subs(solequ,p3);	$\pi3 = .7348620157$
> p4:=a-b*4;	$p4 := a - 4 b$
> 'pi4'=subs(solequ,p4);	$\pi4 = .6677068780$
> p5:=a-b*5;	$p5 := a - 5 b$
> 'pi5'=subs(solequ,p5);	$\pi5 = .6005517402$
> p6:=a-b*6;	$p6 := a - 6 b$
> 'pi6'=subs(solequ,p6);	$\pi6 = .5333966024$
> p7:=a-b*7;	$p7 := a - 7 b$
> 'pi7'=subs(solequ,p7);	$\pi7 = .4662414647$
> p8:=a-b*8;	$p8 := a - 8 b$
> 'pi8'=subs(solequ,p8);	$\pi8 = .3990863269$
> p9:=a-b*9;	$p9 := a - 9 b$
> 'pi9'=subs(solequ,p9);	$\pi9 = .3319311892$
> p10:=a-b*10;	$p10 := a - 10 b$
> 'pi10'=subs(solequ,p10);	$\pi10 = .2647760514$
> p11:=a-b*11;	$p11 := a - 11 b$
> 'pi11'=subs(solequ,p11);	$\pi11 = .1976209136$
> p12:=a-b*12;	$p12 := a - 12 b$

```

> 'pi12'=subs(solequ,p12);
                                      $\pi_{12} = .1304657759$ 
> p13:=a-b*13;
                                      $p_{13} := a - 13 b$ 
> 'pi13'=subs(solequ,p13);
                                      $\pi_{13} = .0633106381$ 
>

```


primas-lineales-España

```
> restart;
```

```
> with(simplex):
```

```
Warning, new definition for maximize
```

```
Warning, new definition for minimize
```

```
> res1 :=
```

```
(0/10^10)*(a-b)+(0/10^10)*(a-b*2)+(0/10^10)*(a-b*3)+(0/10^10)*(a-b*4)+(0/10^10)*(a-b*5)+(2/10^10)*(a-b*6)+(209/10^10)*(a-b*7)+(27/10^10)*(a-b*8)+(2709/10^10)*(a-b*9)+(374570/10^10)*(a-b*10)+(49873324/10^10)*(a-b*11)+(9949748955/10^10)*(a-b*12)+x1-y1 = (5/1000);
```

$$res1 := \frac{2499999999}{25000000000}a - \frac{29987341849}{25000000000}b + x1 - y1 = \frac{1}{200}$$

```
> res2:=(0/10^10)*(a-b)+(0/10^10)*(a-b*2)+(0/10^10)*(a-b*3)+(20/10^10)*(a-b*4)+(23/10^10)*(a-b*5)+(194/10^10)*(a-b*6)+(5762/10^10)*(a-b*7)+(7131/10^10)*(a-b*8)+(73208/10^10)*(a-b*9)+(3362695/10^10)*(a-b*10)+(148829255/10^10)*(a-b*11)+(9847721711/10^10)*(a-b*12)+x2-y2 = (15/1000);
```

$$res2 := \frac{9999999999}{100000000000}a - \frac{1198441669}{1000000000}b + x2 - y2 = \frac{3}{200}$$

```
> res3 :=
```

```
(0/10^10)*(a-b)+(0/10^10)*(a-b*2)+(4/10^10)*(a-b*3)+(160/10^10)*(a-b*4)+(198/10^10)*(a-b*5)+(1533/10^10)*(a-b*6)+(27265/10^10)*(a-b*7)+(37698/10^10)*(a-b*8)+(339063/10^10)*(a-b*9)+(9314663/10^10)*(a-b*10)+(246660877/10^10)*(a-b*11)+(9743618538/10^10)*(a-b*12)+x3-y3 = (25/1000);
```

$$res3 := \frac{9999999999}{100000000000}a - \frac{119733393579}{100000000000}b + x3 - y3 = \frac{1}{40}$$

```
> res4 :=
```

```
(0/10^10)*(a-b)+(1/10^10)*(a-b*2)+(22/10^10)*(a-b*3)+(612/10^10)*(a-b*4)+(818/10^10)*(a-b*5)+(6026/10^10)*(a-b*6)+(76800/10^10)*(a-b*7)+(116369/10^10)*(a-b*8)+(930483/10^10)*(a-b*9)+(18199940/10^10)*(a-b*10)+(343280952/10^10)*(a-b*11)+(9637387972/10^10)*(a-b*12)+x4-y4 = (35/1000);
```

$$res4 := -\frac{119616631197}{100000000000}b + x4 - y4 + \frac{1999999999}{20000000000}a = \frac{7}{200}$$

```
> res5 :=
```

```
(0/10^10)*(a-b)+(7/10^10)*(a-b*2)+(81/10^10)*(a-b*3)+(1670/10^10)*(a-b*4)+(2404/10^10)*(a-b*5)+(16898/10^10)*(a-b*6)+(168249/10^10)*(a-b*7)+(274925/10^10)*(a-b*8)+(1977199/10^10)*(a-b*9)+(29982202/10^10)*(a-b*10)+(438598458/10^10)*(a-b*11)+(9528977903/10^10)
```

)*(a-b*12)+x5-y5 = (45/1000);

$$res5 := -\frac{119493432173}{10000000000}b + x5 - y5 + \frac{2499999999}{2500000000}a = \frac{9}{200}$$

> res6 :=

(0/10^10)*(a-b)+(25/10^10)*(a-b*2)+(223/10^10)*(a-b*3)+(3723/10^10)*(a-b*4)+(5756/10^10)*(a-b*5)+(38777/10^10)*(a-b*6)+(317816/10^10)*(a-b*7)+(552502/10^10)*(a-b*8)+(3607981/10^10)*(a-b*9)+(44618950/10^10)*(a-b*10)+(532518492/10^10)*(a-b*11)+(9418335749/10^10)*(a-b*12)+x6-y6 = (55/1000);

$$res6 := -\frac{11936331551}{10000000000}b - y6 + x6 + \frac{4999999997}{5000000000}a = \frac{11}{200}$$

> res7 :=

(3/10^10)*(a-b*1)+(70/10^10)*(a-b*2)+(523/10^10)*(a-b*3)+(7276/10^10)*(a-b*4)+(12037/10^10)*(a-b*5)+(77975/10^10)*(a-b*6)+(544601/10^10)*(a-b*7)+(995602/10^10)*(a-b*8)+(5950159/10^10)*(a-b*9)+(62061109/10^10)*(a-b*10)+(624942154/10^10)*(a-b*11)+(9305408489/10^10)*(a-b*12)+x7-y7 = (65/1000);

$$res7 := -\frac{119225763957}{10000000000}b + \frac{4999999999}{5000000000}a - y7 + x7 = \frac{13}{200}$$

> res8 :=

(9/10^10)*(a-b*1)+(168/10^10)*(a-b*2)+(1090/10^10)*(a-b*3)+(12949/10^10)*(a-b*4)+(22849/10^10)*(a-b*5)+(142761/10^10)*(a-b*6)+(871123/10^10)*(a-b*7)+(1658002/10^10)*(a-b*8)+(9129036/10^10)*(a-b*9)+(82252623/10^10)*(a-b*10)+(715766480/10^10)*(a-b*11)+(9190142904/10^10)*(a-b*12)+x8-y8 = (75/1000);

$$res8 := -\frac{119080221781}{10000000000}b - y8 + x8 + \frac{4999999997}{5000000000}a = \frac{3}{40}$$

> res9 :=

(24/10^10)*(a-b*1)+(363/10^10)*(a-b*2)+(2079/10^10)*(a-b*3)+(21503/10^10)*(a-b*4)+(40333/10^10)*(a-b*5)+(243735/10^10)*(a-b*6)+(1323875/10^10)*(a-b*7)+(2600657/10^10)*(a-b*8)+(13267314/10^10)*(a-b*9)+(105130008/10^10)*(a-b*10)+(804884323/10^10)*(a-b*11)+(9072485779/10^10)*(a-b*12)+x9-y9 = (85/1000);

$$res9 := -\frac{59463046131}{5000000000}b - y9 + x9 + \frac{9999999993}{10000000000}a = \frac{17}{200}$$

> res10 :=

(56/10^10)*(a-b)+(721/10^10)*(a-b*2)+(3702/10^10)*(a-b*3)+(33867/10^10)*(a-b*4)+(67289/10^10)*(a-b*5)+(394220/10^10)*(a-b*6)+(1933856/10^10)*(a-b*7)+(3891486/10^10)*(a-b*8)+(18484415/10^10)*(a-b*9)+(130621929/10^10)*(a-b*10)+(892184338/10^10)*(a-b*11)+(8952384110/10^10)*(a-b*12)+x10-y10 = (95/1000);

$$res10 := -\frac{5938136739}{5000000000}b - y10 + x10 + \frac{9999999989}{10000000000}a = \frac{19}{200}$$

> res11 :=

$(121/10^{10}) * (a-b) + (1341/10^{10}) * (a-b*2) + (6259/10^{10}) * (a-b*3) + (51172/10^{10}) * (a-b*4) + (107319/10^{10}) * (a-b*5) + (610731/10^{10}) * (a-b*6) + (2737080/10^{10}) * (a-b*7) + (5605133/10^{10}) * (a-b*8) + (24895773/10^{10}) * (a-b*9) + (158648717/10^{10}) * (a-b*10) + (977550924/10^{10}) * (a-b*11) + (8829785421/10^{10}) * (a-b*12) + x11 - y11 = (105/1000);$

$$res11 := -\frac{14823682777}{1250000000}b + \frac{9999999991}{10000000000}a - y11 + x11 = \frac{21}{200}$$

> res12 :=

$(241/10^{10}) * (a-b) + (2363/10^{10}) * (a-b*2) + (10135/10^{10}) * (a-b*3) + (74795/10^{10}) * (a-b*4) + (164965/10^{10}) * (a-b*5) + (913450/10^{10}) * (a-b*6) + (3775069/10^{10}) * (a-b*7) + (7822659/10^{10}) * (a-b*8) + (32612097/10^{10}) * (a-b*9) + (189121956/10^{10}) * (a-b*10) + (1060864169/10^{10}) * (a-b*11) + (8704638090/10^{10}) * (a-b*12) + x12 - y12 = (23/200);$

$$res12 := -\frac{29601384551}{2500000000}b - y12 + \frac{9999999989}{10000000000}a + x12 = \frac{23}{200}$$

> res13 :=

$(457/10^{10}) * (a-b) + (3981/10^{10}) * (a-b*2) + (15823/10^{10}) * (a-b*3) + (106416/10^{10}) * (a-b*4) + (245877/10^{10}) * (a-b*5) + (1326770/10^{10}) * (a-b*6) + (5095259/10^{10}) * (a-b*7) + (10631005/10^{10}) * (a-b*8) + (41738461/10^{10}) * (a-b*9) + (221943927/10^{10}) * (a-b*10) + (1141999921/10^{10}) * (a-b*11) + (8576892101/10^{10}) * (a-b*12) + x13 - y13 = 25/200;$

$$res13 := -\frac{29552544043}{2500000000}b + \frac{4999999999}{5000000000}a - y13 + x13 = \frac{1}{8}$$

> res14 :=

$(828/10^{10}) * (a-b) + (6458/10^{10}) * (a-b*2) + (23980/10^{10}) * (a-b*3) + (148092/10^{10}) * (a-b*4) + (357056/10^{10}) * (a-b*5) + (1879880/10^{10}) * (a-b*6) + (6751446/10^{10}) * (a-b*7) + (14122610/10^{10}) * (a-b*8) + (52373506/10^{10}) * (a-b*9) + (257007248/10^{10}) * (a-b*10) + (1220829806/10^{10}) * (a-b*11) + (8446499088/10^{10}) * (a-b*12) + x14 - y14 = 27/200;$

$$res14 := -\frac{11800253457}{1000000000}b + \frac{4999999999}{5000000000}a - y14 + x14 = \frac{27}{200}$$

> res15 :=

$(1442/10^{10}) * (a-b) + (10145/10^{10}) * (a-b*2) + (35461/10^{10}) * (a-b*3) + (202340/10^{10}) * (a-b*4) + (507065/10^{10}) * (a-b*5) + (2607369/10^{10}) * (a-b*6) + (8804092/10^{10}) * (a-b*7) + (18394730/10^{10}) * (a-b*8) + (64608480/10^{10}) * (a-b*9) + (294194364/10^{10}) * (a-b*10) + (1297221399/10^{10}) * (a-b*11) + (8313413113/10^{10}) * (a-b*12) + x15 - y15 = 29/200;$

$$res15 := -\frac{117781716203}{10000000000}b + a - y15 + x15 = \frac{29}{200}$$

> res16 :=

$(2430/10^{10}) * (a-b) + (15498/10^{10}) * (a-b) + (51317/10^{10}) * (a-b*3) + (272239/10^{10}) * (a-b*4) + (706250/10^{10}) * (a-b*5) + (3549808/10^{10}) * (a-b*$

6)+(11320554/10^10)*(a-b*7)+(23548679/10^10)*(a-b*8)+(78526194/10^10)*(a-b*9)+(333377122/10^10)*(a-b*10)+(1371038323/10^10)*(a-b*11)+(8177591579/10^10)*(a-b*12)+x16-y16 = 31/200;

$$res16 := -\frac{11754675171}{10000000000}b + \frac{9999999993}{10000000000}a + x16 - y16 = \frac{31}{200}$$

> res17 :=

(3977/10^10)*(a-b)+(23111/10^10)*(a-b*2)+(72903/10^10)*(a-b*3)+(361549/10^10)*(a-b*4)+(967066/10^10)*(a-b*5)+(4754411/10^10)*(a-b*6)+(14375266/10^10)*(a-b*7)+(29689007/10^10)*(a-b*8)+(94200002/10^10)*(a-b*9)+(374416306/10^10)*(a-b*10)+(1442140540/10^10)*(a-b*11)+(8038995856/10^10)*(a-b*12)+x17-y17 = 33/200;

$$res17 := -\frac{29324168777}{25000000000}b + \frac{4999999997}{50000000000}a - y17 + x17 = \frac{33}{200}$$

> res18 :=

(6345/10^10)*(a-b)+(33740/10^10)*(a-b*2)+(101931/10^10)*(a-b*3)+(474854/10^10)*(a-b*4)+(1304371/10^10)*(a-b*5)+(6275619/10^10)*(a-b*6)+(18049754/10^10)*(a-b*7)+(36922469/10^10)*(a-b*8)+(111692671/10^10)*(a-b*9)+(417161335/10^10)*(a-b*10)+(1510384646/10^10)*(a-b*11)+(7897592260/10^10)*(a-b*12)+x18-y18 = 35/200;

$$res18 := -\frac{14628796031}{12500000000}b + x18 - y18 + \frac{1999999999}{20000000000}a = \frac{7}{40}$$

> res19 :=

(9893/10^10)*(a-b)+(48339/10^10)*(a-b*2)+(140541/10^10)*(a-b*3)+(617713/10^10)*(a-b*4)+(1735763/10^10)*(a-b*5)+(8175727/10^10)*(a-b*6)+(22432626/10^10)*(a-b*7)+(45357036/10^10)*(a-b*8)+(131055291/10^10)*(a-b*9)+(461449914/10^10)*(a-b*10)+(1575624277/10^10)*(a-b*11)+(7753352877/10^10)*(a-b*12)+x19-y19 = 37/200;

$$res19 := -\frac{116746715223}{100000000000}b + x19 - y19 + \frac{9999999997}{100000000000}a = \frac{37}{200}$$

> res20 :=

(15112/10^10)*(a-b)+(68103/10^10)*(a-b*2)+(191386/10^10)*(a-b*3)+(796841/10^10)*(a-b*4)+(2281927/10^10)*(a-b*5)+(10525411/10^10)*(a-b*6)+(27619278/10^10)*(a-b*7)+(55100490/10^10)*(a-b*8)+(152326003/10^10)*(a-b*9)+(507107677/10^10)*(a-b*10)+(1637710711/10^10)*(a-b*11)+(7606257057/10^10)*(a-b*12)+x20-y20 = 39/200;

$$res20 := -y20 + x20 - \frac{116444527109}{100000000000}b + \frac{2499999999}{25000000000}a = \frac{39}{200}$$

> obj := (x1+y1)*(703/10000)+(x2+y2)*(1261/10000)+(x3+y3)*(1354/10000)+(x4+y4)*(1262/10000)+(x5+y5)*(1101/10000)+(x6+y6)*(922/10000)+(x7+y7)*(752/10000)+(x8+y8)*(602/10000)+(x9+y9)*(476/10000)+(x10+y10)*(371/10000)+(x11+y11)*(288/10000)+(x12+y12)*(221/10000)+(x13+y13)*(169/10000)+(x14+y14)*(128/10000)+(x15+y15)*(97/10000)+

$$(x_{16}+y_{16}) * (73/10000) + (x_{17}+y_{17}) * (41/10000) + (x_{18}+y_{18}) * (31/10000) + (x_{19}+y_{19}) * (23/10000) + (x_{20}+y_{20}) * (68/10000) ;$$

$$\begin{aligned} obj := & \frac{17}{2500}y_{20} + \frac{17}{2500}x_{20} + \frac{23}{10000}x_{19} + \frac{31}{10000}x_{18} + \frac{31}{10000}y_{18} + \frac{23}{10000}y_{19} + \frac{703}{10000}y_1 \\ & + \frac{703}{10000}x_1 + \frac{301}{5000}y_8 + \frac{301}{5000}x_8 + \frac{119}{2500}y_9 + \frac{119}{2500}x_9 + \frac{371}{10000}y_{10} + \frac{371}{10000}x_{10} + \frac{221}{10000}y_{12} \\ & + \frac{631}{5000}x_4 + \frac{631}{5000}y_4 + \frac{1101}{10000}x_5 + \frac{1101}{10000}y_5 + \frac{461}{5000}y_6 + \frac{461}{5000}x_6 + \frac{1261}{10000}x_2 + \frac{1261}{10000}y_2 \\ & + \frac{677}{5000}x_3 + \frac{677}{5000}y_3 + \frac{18}{625}y_{11} + \frac{18}{625}x_{11} + \frac{221}{10000}x_{12} + \frac{8}{625}y_{14} + \frac{8}{625}x_{14} + \frac{169}{10000}y_{13} \\ & + \frac{169}{10000}x_{13} + \frac{97}{10000}y_{15} + \frac{97}{10000}x_{15} + \frac{73}{10000}x_{16} + \frac{73}{10000}y_{16} + \frac{41}{10000}y_{17} + \frac{41}{10000}x_{17} \\ & + \frac{47}{625}y_7 + \frac{47}{625}x_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > dese := & (x_1 - y_1) * (703/10000) + (x_2 - y_2) * (1261/10000) + (x_3 - y_3) * (1354/10000) \\ & + (x_4 - y_4) * (1262/10000) + (x_5 - y_5) * (1101/10000) + (x_6 - y_6) * (922/10000) \\ & + (x_7 - y_7) * (752/10000) + (x_8 - y_8) * (602/10000) + (x_9 - y_9) * (476/10000) + (x_{10} - y_{10}) * (371/10000) \\ & + (x_{11} - y_{11}) * (288/10000) + (x_{12} - y_{12}) * (221/10000) + (x_{13} - y_{13}) * (169/10000) \\ & + (x_{14} - y_{14}) * (128/10000) + (x_{15} - y_{15}) * (97/10000) + (x_{16} - y_{16}) * (73/10000) \\ & + (x_{17} - y_{17}) * (41/10000) + (x_{18} - y_{18}) * (31/10000) + (x_{19} - y_{19}) * (23/10000) + (x_{20} - y_{20}) * (68/10000) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dese := & -\frac{17}{2500}y_{20} + \frac{17}{2500}x_{20} + \frac{23}{10000}x_{19} + \frac{31}{10000}x_{18} - \frac{31}{10000}y_{18} - \frac{23}{10000}y_{19} - \frac{703}{10000}y_1 \\ & + \frac{703}{10000}x_1 - \frac{301}{5000}y_8 + \frac{301}{5000}x_8 - \frac{119}{2500}y_9 + \frac{119}{2500}x_9 - \frac{371}{10000}y_{10} + \frac{371}{10000}x_{10} - \frac{221}{10000}y_{12} \\ & + \frac{631}{5000}x_4 - \frac{631}{5000}y_4 + \frac{1101}{10000}x_5 - \frac{1101}{10000}y_5 - \frac{461}{5000}y_6 + \frac{461}{5000}x_6 + \frac{1261}{10000}x_2 - \frac{1261}{10000}y_2 \\ & + \frac{677}{5000}x_3 - \frac{677}{5000}y_3 - \frac{18}{625}y_{11} + \frac{18}{625}x_{11} + \frac{221}{10000}x_{12} - \frac{8}{625}y_{14} + \frac{8}{625}x_{14} - \frac{169}{10000}y_{13} \\ & + \frac{169}{10000}x_{13} - \frac{97}{10000}y_{15} + \frac{97}{10000}x_{15} + \frac{73}{10000}x_{16} - \frac{73}{10000}y_{16} - \frac{41}{10000}y_{17} + \frac{41}{10000}x_{17} \\ & - \frac{47}{625}y_7 + \frac{47}{625}x_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > res32 := & (x_1 - y_1) * (703/10000) + (x_2 - y_2) * (1261/10000) + (x_3 - y_3) * (1354/10000) \\ & + (x_4 - y_4) * (1262/10000) + (x_5 - y_5) * (1101/10000) + (x_6 - y_6) * (922/10000) \\ & + (x_7 - y_7) * (752/10000) + (x_8 - y_8) * (602/10000) + (x_9 - y_9) * (476/10000) + (x_{10} - y_{10}) * (371/10000) \\ & + (x_{11} - y_{11}) * (288/10000) + (x_{12} - y_{12}) * (221/10000) + (x_{13} - y_{13}) * (169/10000) \\ & + (x_{14} - y_{14}) * (128/10000) + (x_{15} - y_{15}) * (97/10000) + (x_{16} - y_{16}) * (73/10000) \\ & + (x_{17} - y_{17}) * (41/10000) + (x_{18} - y_{18}) * (31/10000) + (x_{19} - y_{19}) * (23/10000) + (x_{20} - y_{20}) * (68/10000) = 0 ; \end{aligned}$$

```

res32 := - $\frac{17}{2500}y_{20} + \frac{17}{2500}x_{20} + \frac{23}{10000}x_{19} + \frac{31}{10000}x_{18} - \frac{31}{10000}y_{18} - \frac{23}{10000}y_{19}$ 
- $\frac{703}{10000}y_1 + \frac{703}{10000}x_1 - \frac{301}{5000}y_8 + \frac{301}{5000}x_8 - \frac{119}{2500}y_9 + \frac{119}{2500}x_9 - \frac{371}{10000}y_{10} + \frac{371}{10000}x_{10}$ 
- $\frac{221}{10000}y_{12} + \frac{631}{5000}x_4 - \frac{631}{5000}y_4 + \frac{1101}{10000}x_5 - \frac{1101}{10000}y_5 - \frac{461}{5000}y_6 + \frac{461}{5000}x_6 + \frac{1261}{10000}x_2$ 
- $\frac{1261}{10000}y_2 + \frac{677}{5000}x_3 - \frac{677}{5000}y_3 - \frac{18}{625}y_{11} + \frac{18}{625}x_{11} + \frac{221}{10000}x_{12} - \frac{8}{625}y_{14} + \frac{8}{625}x_{14}$ 
- $\frac{169}{10000}y_{13} + \frac{169}{10000}x_{13} - \frac{97}{10000}y_{15} + \frac{97}{10000}x_{15} + \frac{73}{10000}x_{16} - \frac{73}{10000}y_{16} - \frac{41}{10000}y_{17}$ 
+ $\frac{41}{10000}x_{17} - \frac{47}{625}y_7 + \frac{47}{625}x_7 = 0$ 
>
>
>
> sol6:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9
, res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res32},NONNEGATIVE);

sol6 := {x1 = 0, y15 =  $\frac{4002081767604953401523}{260496034727411669235260}$ , y20 =  $\frac{45410160776525315849921}{781488104182235007705780}$ ,
x9 =  $\frac{2087962776204370437159}{520992069454823338470520}$ , y14 =  $\frac{78523279123978418734571}{7814881041822350077057800}$ ,
y18 =  $\frac{895601247315486465253}{23898718782331345801400}$ , y13 =  $\frac{14708729468366044157821}{2604960347274116692352600}$ ,
x11 =  $\frac{1718952643699000940093}{2604960347274116692352600}$ , y19 =  $\frac{46057302888983549207543}{976860130227793759632225}$ ,
y16 =  $\frac{11284603437622292111007}{520992069454823338470520}$ , y12 =  $\frac{16384811634924093480343}{7814881041822350077057800}$ , x2 = 0, x3 = 0,
y11 = 0, y9 = 0, y10 = 0, y8 = 0, a =  $\frac{325466330161952900000000}{39074405209111750385289}$ ,
x5 =  $\frac{3279219882495550793684}{976860130227793759632225}$ , b =  $\frac{27101000005072150000000}{39074405209111750385289}$ ,
x10 =  $\frac{20925255688383997237669}{7814881041822350077057800}$ , x8 =  $\frac{18355953309765406671833}{3907440520911175038528900}$ ,
y2 =  $\frac{6644937599473879915}{2867846253879761496168}$ , x16 = 0, x17 = 0, y7 = 0, x15 = 0,
x4 =  $\frac{1857661269005648426198}{976860130227793759632225}$ , y1 =  $\frac{39235472996218159906051}{7814881041822350077057800}$ , y6 = 0, y3 = 0, y5 = 0,
x12 = 0, x14 = 0, x13 = 0, x6 =  $\frac{11285582934793896317819}{2604960347274116692352600}$ 

```

$$x7 = \frac{4681230051785641822103}{976860130227793759632225}, y17 = \frac{75555589165615334956757}{2604960347274116692352600}, y4 = 0, x20 = 0,$$

$x19 = 0, x18 = 0\}$

> solu6:=evalf(sol6);

solu6 := {*x1* = 0, *b* = .6935742172, *x2* = 0, *x3* = 0, *y11* = 0, *y9* = 0, *y10* = 0, *y8* = 0, *x16* = 0, *x17* = 0, *y7* = 0, *x15* = 0, *y6* = 0, *y3* = 0, *y5* = 0, *x12* = 0, *x14* = 0, *x13* = 0, *y4* = 0, *x20* = 0, *x19* = 0, *x18* = 0, *y14* = .01004791739, *y20* = .05810729624, *x9* = .004007667100, *y15* = .01536331166, *y17* = .02900450644, *x7* = .004792119063, *x6* = .004332343464, *y1* = .005020610395, *x4* = .001901665562, *y2* = .002317048060, *x8* = .004697692316, *x10* = .002677616662, *a* = 8.329399473, *x5* = .003356898067, *y12* = .002096616896, *y13* = .005646431234, *x11* = .0006598767023, *y19* = .04714830861, *y16* = .02165983726, *y18* = .03747486447}

> for i from 1 to 12 do subs(sol6,a-b*i) od;

7.635825256

6.942251039

6.248676821

5.555102604

4.861528387

4.167954170

3.474379953

2.780805735

2.087231518

1.393657301

.700083084

.006508867

> 'obj6'=subs(sol6,obj);

obj6 = .003922608300

> sol7:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res20,res32,a-6*b=0.0532},NONNEGATIVE);

sol7 := {*x1* = 0, *x17* = .1127111390, *a* = .05415412761, *y4* = .01725196874,

y3 = .02725011199, *x12* = .06272877234, *x15* = .09271885218, *x20* = .1426975881,

x10 = .04273445252, *x9* = .03273705023, *y2* = .03724835046, *x6* = .002744003006,

x13 = .07272566562, *x14* = .08272236367, *x16* = .1027151158, *b* = .0001590212680,

y5 = .007253927874, *y1* = .04724667753, *x8* = .02273950121, *x18* = .1227069042,

x19 = .1327023935, *x11* = .05273169711, *x7* = .01274181562, *x2* = 0, *x3* = 0, *y11* = 0, *y9* = 0,

y10 = 0, *y8* = 0, *y7* = 0, *y6* = 0, *y20* = 0, *y18* = 0, *y19* = 0, *y12* = 0, *x4* = 0, *x5* = 0, *y14* = 0,

y13 = 0, *y15* = 0, *y16* = 0, *y17* = 0}

> for i from 1 to 12 do subs(sol7,a-b*i) od;

.05399510634

.05383608507

.05367706381

.05351804254

.05335902127

.05320000000

.05304097873

.05288195747

.05272293620

.05256391493

.05240489366

.05224587239

```
> 'obj7'=subs(sol7,obj);
```

obj7 = .02936795901

```
>
```


pro-lin-Borgam

> restart;

> with(simplex):

Warning, new definition for maximize

Warning, new definition for minimize

> res1 :=

$(523/10^{10}) \cdot \pi_1 + (2757/10^{10}) \cdot \pi_2 + (7974/10^{10}) \cdot \pi_3 + (62715/10^{10}) \cdot \pi_4 + (190556/10^{10}) \cdot \pi_5 + (1173512/10^{10}) \cdot \pi_6 + (3157986/10^{10}) \cdot \pi_7 + (21603792/10^{10}) \cdot \pi_8 + (50005225/10^{10}) \cdot \pi_9 + (71315119/10^{10}) \cdot \pi_{10} + (801348952/10^{10}) \cdot \pi_{11} + (759705270/10^{10}) \cdot \pi_{12} + (8291425613/10^{10}) \cdot \pi_{13} + x_1 - y_1 = 33/1000;$

$$\begin{aligned} \text{res1} := & \frac{523}{10000000000} \pi_1 + \frac{2757}{10000000000} \pi_2 + \frac{3987}{5000000000} \pi_3 + \frac{12543}{2000000000} \pi_4 \\ & + \frac{47639}{2500000000} \pi_5 + \frac{146689}{1250000000} \pi_6 + \frac{1578993}{5000000000} \pi_7 + \frac{1350237}{625000000} \pi_8 + \frac{2000209}{400000000} \pi_9 \\ & + \frac{71315119}{10000000000} \pi_{10} + \frac{100168619}{1250000000} \pi_{11} + \frac{75970527}{1000000000} \pi_{12} + \frac{8291425613}{10000000000} \pi_{13} + x_1 - y_1 = \frac{33}{1000} \end{aligned}$$

> res2 :=

$(25000/10^{10}) \cdot \pi_1 + (70737/10^{10}) \cdot \pi_2 + (176933/10^{10}) \cdot \pi_3 + (852180/10^{10}) \cdot \pi_4 + (2186705/10^{10}) \cdot \pi_5 + (7208703/10^{10}) \cdot \pi_6 + (17490727/10^{10}) \cdot \pi_7 + (60472378/10^{10}) \cdot \pi_8 + (136395540/10^{10}) \cdot \pi_9 + (183694780/10^{10}) \cdot \pi_{10} + (1079576491/10^{10}) \cdot \pi_{11} + (979947526/10^{10}) \cdot \pi_{12} + (7531902297/10^{10}) \cdot \pi_{13} + x_2 - y_2 = 67/1000;$

$$\begin{aligned} \text{res2} := & \frac{1}{400000} \pi_1 + \frac{70737}{10000000000} \pi_2 + \frac{176933}{10000000000} \pi_3 + \frac{42609}{500000000} \pi_4 + \frac{437341}{2000000000} \pi_5 \\ & + \frac{7208703}{10000000000} \pi_6 + \frac{17490727}{10000000000} \pi_7 + \frac{30236189}{5000000000} \pi_8 + \frac{6819777}{500000000} \pi_9 + \frac{9184739}{500000000} \pi_{10} \\ & + \frac{1079576491}{10000000000} \pi_{11} + \frac{489973763}{5000000000} \pi_{12} + \frac{7531902297}{10000000000} \pi_{13} + x_2 - y_2 = \frac{67}{1000} \end{aligned}$$

> res3 :=

$(239630/10^{10}) \cdot \pi_1 + (493242/10^{10}) \cdot \pi_2 + (1068530/10^{10}) \cdot \pi_3 + (4235236/10^{10}) \cdot \pi_4 + (9283151/10^{10}) \cdot \pi_5 + (22638140/10^{10}) \cdot \pi_6 + (48508189/10^{10}) \cdot \pi_7 + (120521353/10^{10}) \cdot \pi_8 + (249934598/10^{10}) \cdot \pi_9 + (318295880/10^{10}) \cdot \pi_{10} + (1308053564/10^{10}) \cdot \pi_{11} + (1142749910/10^{10}) \cdot \pi_{12} + (6773978572/10^{10}) \cdot \pi_{13} + x_3 - y_3 = 1/10;$

$$\begin{aligned} \text{res3} := & \frac{23963}{10000000000} \pi_1 + \frac{246621}{5000000000} \pi_2 + \frac{106853}{10000000000} \pi_3 + \frac{1058809}{2500000000} \pi_4 \\ & + \frac{9283151}{10000000000} \pi_5 + \frac{1131907}{5000000000} \pi_6 + \frac{48508189}{10000000000} \pi_7 + \frac{120521353}{10000000000} \pi_8 + \frac{124967299}{5000000000} \pi_9 \\ & + \frac{7957397}{2500000000} \pi_{10} + \frac{327013391}{2500000000} \pi_{11} + \frac{114274991}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1693494643}{2500000000} \pi_{13} + x_3 - y_3 = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

> res4 :=

(1217103/10^10)*pi[1]+(2017022/10^10)*pi[2]+(3839650/10^10)*pi[3]
]+(13771717/10^10)*pi[4]+(26290969/10^10)*pi[5]+(52977943/10^10)
 *pi[6]+(100802822/10^10)*pi[7]+(204145418/10^10)*pi[8]+(38415754
 5/10^10)*pi[9]+(463265597/10^10)*pi[10]+(1486311682/10^10)*pi[11]
]+(1252194856/10^10)*pi[12]+(6009007672/10^10)*pi[13]+x4-y4 =
 133/1000;

$$\begin{aligned} \text{res4} := & \frac{1217103}{10000000000} \pi_1 + \frac{1008511}{5000000000} \pi_2 + \frac{76793}{2000000000} \pi_3 + \frac{13771717}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{26290969}{10000000000} \pi_5 + \frac{52977943}{10000000000} \pi_6 + \frac{50401411}{5000000000} \pi_7 + \frac{102072709}{5000000000} \pi_8 + \frac{76831509}{2000000000} \pi_9 \\ & + \frac{463265597}{10000000000} \pi_{10} + \frac{743155841}{5000000000} \pi_{11} + \frac{156524357}{1250000000} \pi_{12} + \frac{751125959}{1250000000} \pi_{13} + x4 - y4 = \frac{133}{1000} \end{aligned}$$

> res5 :=

(4403875/10^10)*pi[1]+(6145425/10^10)*pi[2]+(10413253/10^10)*pi[3]
]+(35246923/10^10)*pi[4]+(59517106/10^10)*pi[5]+(104151218/10^10)
 0)*pi[6]+(177702738/10^10)*pi[7]+(311044340/10^10)*pi[8]+(531305
 590/10^10)*pi[9]+(607205764/10^10)*pi[10]+(1611034383/10^10)*pi[11]
]+(1309323257/10^10)*pi[12]+(5232506122/10^10)*pi[13]+x5-y5 =
 167/1000;

$$\begin{aligned} \text{res5} := & \frac{35231}{800000000} \pi_1 + \frac{245817}{4000000000} \pi_2 + \frac{10413253}{10000000000} \pi_3 + \frac{35246923}{10000000000} \pi_4 + \frac{29758553}{5000000000} \pi_5 \\ & + \frac{52075609}{5000000000} \pi_6 + \frac{88851369}{5000000000} \pi_7 + \frac{15552217}{5000000000} \pi_8 + \frac{53130559}{10000000000} \pi_9 + \frac{151801441}{25000000000} \pi_{10} \\ & + \frac{1611034383}{10000000000} \pi_{11} + \frac{1309323257}{10000000000} \pi_{12} + \frac{2616253061}{50000000000} \pi_{13} + x5 - y5 = \frac{167}{1000} \end{aligned}$$

> res6 :=

(11917752/10^10)*pi[1]+(14482321/10^10)*pi[2]+(22226444/10^10)*p
 i[3]+(72802112/10^10)*pi[4]+(110837330/10^10)*pi[5]+(174276033/1
 0^10)*pi[6]+(271046836/10^10)*pi[7]+(426705727/10^10)*pi[8]+(668
 987213/10^10)*pi[9]+(727827680/10^10)*pi[10]+(1673616835/10^10)*
 pi[11]+(1315012153/10^10)*pi[12]+(4510261566/10^10)*pi[13]+x6-y6
 = 2/10;

$$\begin{aligned} \text{res6} := & \frac{1489719}{12500000000} \pi_1 + \frac{14482321}{10000000000} \pi_2 + \frac{5556611}{25000000000} \pi_3 + \frac{1137533}{156250000} \pi_4 + \frac{11083733}{10000000000} \pi_5 \\ & + \frac{174276033}{10000000000} \pi_6 + \frac{67761709}{25000000000} \pi_7 + \frac{426705727}{100000000000} \pi_8 + \frac{668987213}{100000000000} \pi_9 + \frac{4548923}{62500000} \pi_{10} \\ & + \frac{334723367}{20000000000} \pi_{11} + \frac{1315012153}{100000000000} \pi_{12} + \frac{2255130783}{50000000000} \pi_{13} + x6 - y6 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

> res7 :=

(26940816/10^10)*pi[1]+(29026900/10^10)*pi[2]+(40794041/10^10)*p
 i[3]+(131127644/10^10)*pi[4]+(182159617/10^10)*pi[5]+(262076176/

$10^{10} \cdot \pi_6 + (375731638/10^{10}) \cdot \pi_7 + (543821097/10^{10}) \cdot \pi_8 + (789484301/10^{10}) \cdot \pi_9 + (820127553/10^{10}) \cdot \pi_{10} + (1682536752/10^{10}) \cdot \pi_{11} + (1279348568/10^{10}) \cdot \pi_{12} + (3836824898/10^{10}) \cdot \pi_{13} + x^7 - y^7$
 $7 = 233/1000;$

$$\begin{aligned}
 res7 := & \frac{1683801}{625000000} \pi_1 + \frac{290269}{1000000000} \pi_2 + \frac{40794041}{10000000000} \pi_3 + \frac{32781911}{2500000000} \pi_4 + \frac{182159617}{10000000000} \pi_5 \\
 & + \frac{16379761}{625000000} \pi_6 + \frac{187865819}{5000000000} \pi_7 + \frac{543821097}{10000000000} \pi_8 + \frac{789484301}{10000000000} \pi_9 + \frac{820127553}{10000000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{105158547}{625000000} \pi_{11} + \frac{159918571}{1250000000} \pi_{12} + \frac{1918412449}{5000000000} \pi_{13} + x^7 - y^7 = \frac{233}{1000}
 \end{aligned}$$

> res8 :=

$(54124624/10^{10}) \cdot \pi_1 + (52193987/10^{10}) \cdot \pi_2 + (67600380/10^{10}) \cdot \pi_3 + (215231212/10^{10}) \cdot \pi_4 + (274718100/10^{10}) \cdot \pi_5 + (365297527/10^{10}) \cdot \pi_6 + (486209141/10^{10}) \cdot \pi_7 + (655542721/10^{10}) \cdot \pi_8 + (886624183/10^{10}) \cdot \pi_9 + (880888957/10^{10}) \cdot \pi_{10} + (1644059218/10^{10}) \cdot \pi_{11} + (1209589613/10^{10}) \cdot \pi_{12} + (3207920334/10^{10}) \cdot \pi_{13} + x^8 - y^8$
 $8 = 267/1000;$

$$\begin{aligned}
 res8 := & \frac{3382789}{625000000} \pi_1 + \frac{52193987}{10000000000} \pi_2 + \frac{3380019}{500000000} \pi_3 + \frac{53807803}{2500000000} \pi_4 + \frac{2747181}{1000000000} \pi_5 \\
 & + \frac{365297527}{10000000000} \pi_6 + \frac{486209141}{10000000000} \pi_7 + \frac{655542721}{10000000000} \pi_8 + \frac{886624183}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{880888957}{10000000000} \pi_{10} + \frac{822029609}{5000000000} \pi_{11} + \frac{1209589613}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1603960167}{5000000000} \pi_{13} + x^8 - y^8 = \frac{267}{1000}
 \end{aligned}$$

> res9 :=

$(95595332/10^{10}) \cdot \pi_1 + (83551609/10^{10}) \cdot \pi_2 + (100664090/10^{10}) \cdot \pi_3 + (319767493/10^{10}) \cdot \pi_4 + (378718105/10^{10}) \cdot \pi_5 + (470646996/10^{10}) \cdot \pi_6 + (587197218/10^{10}) \cdot \pi_7 + (747294801/10^{10}) \cdot \pi_8 + (950289471/10^{10}) \cdot \pi_9 + (906637400/10^{10}) \cdot \pi_{10} + (1571036124/10^{10}) \cdot \pi_{11} + (1120288434/10^{10}) \cdot \pi_{12} + (2668312924/10^{10}) \cdot \pi_{13} + x^9 - y^9$
 $9 = 3/10;$

$$\begin{aligned}
 res9 := & \frac{23898833}{2500000000} \pi_1 + \frac{83551609}{10000000000} \pi_2 + \frac{10066409}{1000000000} \pi_3 + \frac{319767493}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{75743621}{2000000000} \pi_5 + \frac{117661749}{2500000000} \pi_6 + \frac{293598609}{5000000000} \pi_7 + \frac{747294801}{10000000000} \pi_8 + \frac{950289471}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{4533187}{50000000} \pi_{10} + \frac{392759031}{2500000000} \pi_{11} + \frac{560144217}{5000000000} \pi_{12} + \frac{667078231}{2500000000} \pi_{13} + x^9 - y^9 = \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

> res10 :=

$(155041171/10^{10}) \cdot \pi_1 + (123681228/10^{10}) \cdot \pi_2 + (139377193/10^{10}) \cdot \pi_3 + (444072281/10^{10}) \cdot \pi_4 + (490820530/10^{10}) \cdot \pi_5 + (573796694/10^{10}) \cdot \pi_6 + (675025032/10^{10}) \cdot \pi_7 + (817753557/10^{10}) \cdot \pi_8 + (983490982/10^{10}) \cdot \pi_9 + (903194621/10^{10}) \cdot \pi_{10} + (1473850834/10^{10}) \cdot \pi_{11} + (1019202810/10^{10}) \cdot \pi_{12} + (2200693064/10^{10}) \cdot \pi_{13} + x^{10} - y^{10}$

$$10-y10 = 333/1000;$$

$$\begin{aligned} res10 := & \frac{155041171}{10000000000} \pi_1 + \frac{30920307}{2500000000} \pi_2 + \frac{139377193}{10000000000} \pi_3 + \frac{444072281}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{49082053}{10000000000} \pi_5 + \frac{286898347}{50000000000} \pi_6 + \frac{84378129}{12500000000} \pi_7 + \frac{817753557}{10000000000} \pi_8 + \frac{491745491}{50000000000} \pi_9 \\ & + \frac{903194621}{10000000000} \pi_{10} + \frac{736925417}{50000000000} \pi_{11} + \frac{101920281}{10000000000} \pi_{12} + \frac{275086633}{12500000000} \pi_{13} + x10 - y10 = \\ & \frac{333}{1000} \end{aligned}$$

> res11 :=

$$\begin{aligned} & (237325167/10^{10}) * \pi_1 + (173323974/10^{10}) * \pi_2 + (183169703/10^{10}) * \pi_3 + (588028096/10^{10}) * \pi_4 + (608182318/10^{10}) * \pi_5 + (6712033 \\ & 96/10^{10}) * \pi_6 + (746942297/10^{10}) * \pi_7 + (866232493/10^{10}) * \pi_8 + (988759011/10^{10}) * \pi_9 + (874935878/10^{10}) * \pi_{10} + (1359048013/10^{10}) * \pi_{11} + (910936640/10^{10}) * \pi_{12} + (1791913012/10^{10}) * \pi_{13} + x1 \\ & 1 - y11 = 367/1000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res11 := & \frac{237325167}{10000000000} \pi_1 + \frac{86661987}{50000000000} \pi_2 + \frac{183169703}{100000000000} \pi_3 + \frac{9187939}{156250000} \pi_4 \\ & + \frac{304091159}{50000000000} \pi_5 + \frac{167800849}{25000000000} \pi_6 + \frac{746942297}{100000000000} \pi_7 + \frac{866232493}{100000000000} \pi_8 + \frac{988759011}{100000000000} \pi_9 \\ & + \frac{437467939}{50000000000} \pi_{10} + \frac{1359048013}{100000000000} \pi_{11} + \frac{2846677}{31250000} \pi_{12} + \frac{447978253}{25000000000} \pi_{13} + x11 - y11 = \frac{367}{1000} \end{aligned}$$

> res12 :=

$$\begin{aligned} & (338584264/10^{10}) * \pi_1 + (228011090/10^{10}) * \pi_2 + (227244227/10^{10}) * \pi_3 + (737552844/10^{10}) * \pi_4 + (717954972/10^{10}) * \pi_5 + (7524699 \\ & 95/10^{10}) * \pi_6 + (796591299/10^{10}) * \pi_7 + (890671865/10^{10}) * \pi_8 + (970524979/10^{10}) * \pi_9 + (829899011/10^{10}) * \pi_{10} + (1241961396/10^{10}) * \pi_{11} + (807843593/10^{10}) * \pi_{12} + (1460690461/10^{10}) * \pi_{13} + x1 \\ & 2 - y12 = 4/10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res12 := & \frac{42323033}{12500000000} \pi_1 + \frac{22801109}{10000000000} \pi_2 + \frac{227244227}{100000000000} \pi_3 + \frac{184388211}{25000000000} \pi_4 \\ & + \frac{179488743}{25000000000} \pi_5 + \frac{150493999}{20000000000} \pi_6 + \frac{796591299}{100000000000} \pi_7 + \frac{178134373}{20000000000} \pi_8 + \frac{970524979}{100000000000} \pi_9 \\ & + \frac{829899011}{100000000000} \pi_{10} + \frac{310490349}{25000000000} \pi_{11} + \frac{807843593}{100000000000} \pi_{12} + \frac{1460690461}{100000000000} \pi_{13} + x12 - y12 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

> res13 :=

$$\begin{aligned} & (460706046/10^{10}) * \pi_1 + (287153864/10^{10}) * \pi_2 + (270721824/10^{10}) * \pi_3 + (891040149/10^{10}) * \pi_4 + (818879553/10^{10}) * \pi_5 + (8179472 \\ & 90/10^{10}) * \pi_6 + (826441849/10^{10}) * \pi_7 + (895376032/10^{10}) * \pi_8 + (934738557/10^{10}) * \pi_9 + (773558938/10^{10}) * \pi_{10} + (1125743068/10^{10}) * \pi_{11} + (710701553/10^{10}) * \pi_{12} + (1186991281/10^{10}) * \pi_{13} + x1 \\ & 3 - y13 = 433/1000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 res13 := & \frac{230353023}{5000000000} \pi_1 + \frac{35894233}{1250000000} \pi_2 + \frac{8460057}{312500000} \pi_3 + \frac{891040149}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{818879553}{10000000000} \pi_5 + \frac{81794729}{10000000000} \pi_6 + \frac{826441849}{10000000000} \pi_7 + \frac{27980501}{312500000} \pi_8 + \frac{934738557}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{386779469}{5000000000} \pi_{10} + \frac{281435767}{2500000000} \pi_{11} + \frac{710701553}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1186991281}{10000000000} \pi_{13} + x13 - y13 = \\
 & \frac{433}{1000}
 \end{aligned}$$

> res14 :=
 (607054841/10^10)*pi[1]+(350544378/10^10)*pi[2]+(312948234/10^10)
)*pi[3]+(1047844472/10^10)*pi[4]+(910062832/10^10)*pi[5]+(867887
 144/10^10)*pi[6]+(838202019/10^10)*pi[7]+(883255116/10^10)*pi[8]
 +(885135604/10^10)*pi[9]+(709146869/10^10)*pi[10]+(1011579715/10
 ^10)*pi[11]+(619293640/10^10)*pi[12]+(957045133/10^10)*pi[13]+x1
 4-y14 = 467/1000;

$$\begin{aligned}
 res14 := & \frac{607054841}{10000000000} \pi_1 + \frac{175272189}{5000000000} \pi_2 + \frac{156474117}{5000000000} \pi_3 + \frac{130980559}{1250000000} \pi_4 \\
 & + \frac{56878927}{625000000} \pi_5 + \frac{108485893}{1250000000} \pi_6 + \frac{838202019}{10000000000} \pi_7 + \frac{220813779}{2500000000} \pi_8 + \frac{221283901}{2500000000} \pi_9 \\
 & + \frac{709146869}{10000000000} \pi_{10} + \frac{202315943}{2000000000} \pi_{11} + \frac{15482341}{2500000000} \pi_{12} + \frac{957045133}{10000000000} \pi_{13} + x14 - y14 = \\
 & \frac{467}{1000}
 \end{aligned}$$

> res15 :=
 (766989599/10^10)*pi[1]+(412389702/10^10)*pi[2]+(349977767/10^10
)*pi[3]+(1194281534/10^10)*pi[4]+(984109990/10^10)*pi[5]+(899780
 647/10^10)*pi[6]+(833813223/10^10)*pi[7]+(858895091/10^10)*pi[8]
 +(829483856/10^10)*pi[9]+(644654426/10^10)*pi[10]+(908989133/10^
 10)*pi[11]+(540087640/10^10)*pi[12]+(776547395/10^10)*pi[13]+x15
 -y15 = 5/10;

$$\begin{aligned}
 res15 := & \frac{766989599}{10000000000} \pi_1 + \frac{206194851}{5000000000} \pi_2 + \frac{349977767}{10000000000} \pi_3 + \frac{597140767}{5000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{98410999}{10000000000} \pi_5 + \frac{899780647}{10000000000} \pi_6 + \frac{833813223}{10000000000} \pi_7 + \frac{858895091}{10000000000} \pi_8 + \frac{51842741}{6250000000} \pi_9 \\
 & + \frac{322327213}{5000000000} \pi_{10} + \frac{908989133}{10000000000} \pi_{11} + \frac{13502191}{2500000000} \pi_{12} + \frac{155309479}{2000000000} \pi_{13} + x15 - y15 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

> res16 :=
 (942060479/10^10)*pi[1]+(472752930/10^10)*pi[2]+(382134914/10^10
)*pi[3]+(1331677206/10^10)*pi[4]+(1043143053/10^10)*pi[5]+(91673
 4310/10^10)*pi[6]+(816874991/10^10)*pi[7]+(825778270/10^10)*pi[8
]+(770349873/10^10)*pi[9]+(581251996/10^10)*pi[10]+(815902690/10
 ^10)*pi[11]+(470419491/10^10)*pi[12]+(630919796/10^10)*pi[13]+x1

$$6-y16 = 533/1000;$$

$$\begin{aligned} res16 := & \frac{942060479}{10000000000} \pi_1 + \frac{47275293}{10000000000} \pi_2 + \frac{191067457}{5000000000} \pi_3 + \frac{665838603}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1043143053}{10000000000} \pi_5 + \frac{91673431}{10000000000} \pi_6 + \frac{816874991}{10000000000} \pi_7 + \frac{82577827}{10000000000} \pi_8 + \frac{770349873}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{145312999}{25000000000} \pi_{10} + \frac{81590269}{10000000000} \pi_{11} + \frac{470419491}{10000000000} \pi_{12} + \frac{157729949}{25000000000} \pi_{13} + x16 - y16 = \\ & \frac{533}{1000} \end{aligned}$$

> res17 :=

$$\begin{aligned} & (1135430957/10^{10}) * \pi_1 + (531863282/10^{10}) * \pi_2 + (409612503/10^{10}) * \pi_3 + (1461343195/10^{10}) * \pi_4 \\ & + (1088471374/10^{10}) * \pi_5 + (920630109/10^{10}) * \pi_6 + (789475674/10^{10}) * \pi_7 + (785847194/10^{10}) * \pi_8 \\ & + (708897985/10^{10}) * \pi_9 + (519198167/10^{10}) * \pi_{10} + (730374609/10^{10}) * \pi_{11} \\ & + (408168183/10^{10}) * \pi_{12} + (510686767/10^{10}) * \pi_{13} + x17 - y17 = 567/1000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res17 := & \frac{1135430957}{10000000000} \pi_1 + \frac{265931641}{5000000000} \pi_2 + \frac{409612503}{10000000000} \pi_3 + \frac{292268639}{2000000000} \pi_4 \\ & + \frac{544235687}{5000000000} \pi_5 + \frac{920630109}{10000000000} \pi_6 + \frac{394737837}{5000000000} \pi_7 + \frac{392923597}{5000000000} \pi_8 + \frac{141779597}{2000000000} \pi_9 \\ & + \frac{519198167}{10000000000} \pi_{10} + \frac{730374609}{10000000000} \pi_{11} + \frac{408168183}{10000000000} \pi_{12} + \frac{510686767}{10000000000} \pi_{13} + x17 - y17 = \\ & \frac{567}{1000} \end{aligned}$$

> res18 :=

$$\begin{aligned} & (1332964309/10^{10}) * \pi_1 + (585124044/10^{10}) * \pi_2 + (430632634/10^{10}) * \pi_3 \\ & + (1574238022/10^{10}) * \pi_4 + (1118332726/10^{10}) * \pi_5 + (913477819/10^{10}) * \pi_6 \\ & + (756063833/10^{10}) * \pi_7 + (744116694/10^{10}) * \pi_8 + (650891988/10^{10}) * \pi_9 \\ & + (463385229/10^{10}) * \pi_{10} + (657188667/10^{10}) * \pi_{11} + (356216469/10^{10}) * \pi_{12} \\ & + (417367569/10^{10}) * \pi_{13} + x18 - y18 = 6/10; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res18 := & \frac{1332964309}{10000000000} \pi_1 + \frac{146281011}{2500000000} \pi_2 + \frac{215316317}{5000000000} \pi_3 + \frac{787119011}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{559166363}{5000000000} \pi_5 + \frac{913477819}{10000000000} \pi_6 + \frac{756063833}{10000000000} \pi_7 + \frac{372058347}{5000000000} \pi_8 + \frac{162722997}{2500000000} \pi_9 \\ & + \frac{463385229}{10000000000} \pi_{10} + \frac{657188667}{10000000000} \pi_{11} + \frac{356216469}{10000000000} \pi_{12} + \frac{417367569}{10000000000} \pi_{13} + x18 - y18 = \\ & \frac{3}{5} \end{aligned}$$

> res19 :=

$$(1537626675/10^{10}) * \pi_1 + (633581949/10^{10}) * \pi_2 + (446219483/10^{10})$$

$0) * \pi[3] + (1673757130/10^{10}) * \pi[4] + (1135596741/10^{10}) * \pi[5] + (897763213/10^{10}) * \pi[6] + (718342995/10^{10}) * \pi[7] + (701488112/10^{10}) * \pi[8] + (595884698/10^{10}) * \pi[9] + (412525398/10^{10}) * \pi[10] + (593033482/10^{10}) * \pi[11] + (311681391/10^{10}) * \pi[12] + (342498732/10^{10}) * \pi[13] + x19 - y19 = 633/1000;$

$$\begin{aligned}
 res19 := & \frac{61505067}{400000000} \pi_1 + \frac{633581949}{1000000000} \pi_2 + \frac{446219483}{1000000000} \pi_3 + \frac{167375713}{1000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{1135596741}{1000000000} \pi_5 + \frac{897763213}{1000000000} \pi_6 + \frac{143668599}{2000000000} \pi_7 + \frac{43843007}{625000000} \pi_8 + \frac{297942349}{5000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{206262699}{5000000000} \pi_{10} + \frac{296516741}{5000000000} \pi_{11} + \frac{311681391}{10000000000} \pi_{12} + \frac{85624683}{2500000000} \pi_{13} + x19 - y19 = \\
 & \frac{633}{1000}
 \end{aligned}$$

> res20 :=

$(1753513684/10^{10}) * \pi[1] + (678023818/10^{10}) * \pi[2] + (456950261/10^{10}) * \pi[3] + (1762300940/10^{10}) * \pi[4] + (1141829875/10^{10}) * \pi[5] + (874763716/10^{10}) * \pi[6] + (677026670/10^{10}) * \pi[7] + (658176036/10^{10}) * \pi[8] + (543185077/10^{10}) * \pi[9] + (365470148/10^{10}) * \pi[10] + (535476742/10^{10}) * \pi[11] + (272548384/10^{10}) * \pi[12] + (280734644/10^{10}) * \pi[13] + x20 - y20 = 667/1000;$

$$\begin{aligned}
 res20 := & \frac{438378421}{2500000000} \pi_1 + \frac{339011909}{5000000000} \pi_2 + \frac{456950261}{10000000000} \pi_3 + \frac{88115047}{5000000000} \pi_4 + \frac{9134639}{800000000} \pi_5 \\
 & + \frac{218690929}{2500000000} \pi_6 + \frac{67702667}{1000000000} \pi_7 + \frac{164544009}{2500000000} \pi_8 + \frac{543185077}{10000000000} \pi_9 + \frac{91367537}{2500000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{267738371}{5000000000} \pi_{11} + \frac{8517137}{312500000} \pi_{12} + \frac{70183661}{25000000000} \pi_{13} + x20 - y20 = \frac{667}{1000}
 \end{aligned}$$

> obj := (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/1000) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11+y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000);

$$\begin{aligned}
 obj := & \frac{43}{250} x2 + \frac{57}{500} y4 + \frac{143}{1000} x3 + \frac{143}{1000} y3 + \frac{43}{250} y2 + \frac{9}{125} x7 + \frac{9}{125} y7 + \frac{43}{500} y6 + \frac{43}{500} x6 \\
 & + \frac{1}{10} x5 + \frac{1}{10} y5 + \frac{57}{500} x4 + \frac{57}{1000} x8 + \frac{57}{1000} y8 + \frac{43}{1000} x9 + \frac{43}{1000} y9 + \frac{3}{500} x13 + \frac{3}{500} y13 \\
 & + \frac{7}{1000} x12 + \frac{7}{1000} y12 + \frac{7}{500} x11 + \frac{143}{1000} y1 + \frac{7}{500} y11 + \frac{29}{1000} y10 + \frac{29}{1000} x10 + \frac{1}{1000} y16 \\
 & + \frac{1}{1000} x16 + \frac{3}{1000} x15 + \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{250} y14 + \frac{1}{1000} x17 + \frac{1}{1000} y17 + \frac{1}{1000} x18
 \end{aligned}$$

```

+  $\frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{19} + \frac{1}{1000}y_{19} + \frac{1}{1000}x_{20} + \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{143}{1000}x_1$ 
> dese := (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (
x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1
000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x1
1-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14)
* (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/100
0) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000) ;

dese :=  $\frac{43}{250}x^2 - \frac{57}{500}y^4 + \frac{143}{1000}x^3 - \frac{143}{1000}y^3 - \frac{43}{250}y^2 + \frac{9}{125}x^7 - \frac{9}{125}y^7 - \frac{43}{500}y^6 + \frac{43}{500}x^6$ 
+  $\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{10}y^5 + \frac{57}{500}x^4 + \frac{57}{1000}x^8 - \frac{57}{1000}y^8 + \frac{43}{1000}x^9 - \frac{43}{1000}y^9 + \frac{3}{500}x^{13} - \frac{3}{500}y^{13}$ 
+  $\frac{7}{1000}x^{12} - \frac{7}{1000}y^{12} + \frac{7}{500}x^{11} - \frac{143}{1000}y^1 - \frac{7}{500}y^{11} - \frac{29}{1000}y^{10} + \frac{29}{1000}x^{10} - \frac{1}{1000}y^{16}$ 
+  $\frac{1}{1000}x^{16} + \frac{3}{1000}x^{15} - \frac{3}{1000}y^{15} + \frac{1}{250}x^{14} - \frac{1}{250}y^{14} + \frac{1}{1000}x^{17} - \frac{1}{1000}y^{17} + \frac{1}{1000}x^{18}$ 
-  $\frac{1}{1000}y^{18} + \frac{1}{1000}x^{19} - \frac{1}{1000}y^{19} + \frac{1}{1000}x^{20} - \frac{1}{1000}y^{20} + \frac{143}{1000}x^1$ 
> res21:=pi[1]>=pi[2] ;
res21 :=  $\pi_2 \leq \pi_1$ 
> res22:=pi[2]>=pi[3] ;
res22 :=  $\pi_3 \leq \pi_2$ 
> res23:=pi[3]>=pi[4] ;
res23 :=  $\pi_4 \leq \pi_3$ 
> res24:=pi[4]>=pi[5] ;
res24 :=  $\pi_5 \leq \pi_4$ 
> res25:=pi[5]>=pi[6] ;
res25 :=  $\pi_6 \leq \pi_5$ 
> res26:=pi[6]>=pi[7] ;
res26 :=  $\pi_7 \leq \pi_6$ 
> res27:=pi[7]>=pi[8] ;
res27 :=  $\pi_8 \leq \pi_7$ 
> res28:=pi[8]>=pi[9] ;
res28 :=  $\pi_9 \leq \pi_8$ 
> res29:=pi[9]>=pi[10] ;
res29 :=  $\pi_{10} \leq \pi_9$ 
> res30:=pi[10]>=pi[11] ;
res30 :=  $\pi_{11} \leq \pi_{10}$ 
> res31:=pi[11]>=pi[12] ;
res31 :=  $\pi_{12} \leq \pi_{11}$ 

```


> res32:=pi[12]>=pi[13];

$$res32 := \pi_{13} \leq \pi_{12}$$

> res33:=dese=0;

$$\begin{aligned} res33 := & \frac{43}{250}x^2 - \frac{57}{500}y^4 + \frac{143}{1000}x^3 - \frac{143}{1000}y^3 - \frac{43}{250}y^2 + \frac{9}{125}x^7 - \frac{9}{125}y^7 - \frac{43}{500}y^6 + \frac{43}{500}x^6 \\ & + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{10}y^5 + \frac{57}{500}x^4 + \frac{57}{1000}x^8 - \frac{57}{1000}y^8 + \frac{43}{1000}x^9 - \frac{43}{1000}y^9 + \frac{3}{500}x^{13} - \frac{3}{500}y^{13} \\ & + \frac{7}{1000}x^{12} - \frac{7}{1000}y^{12} + \frac{7}{500}x^{11} - \frac{143}{1000}y^1 - \frac{7}{500}y^{11} - \frac{29}{1000}y^{10} + \frac{29}{1000}x^{10} - \frac{1}{1000}y^{16} \\ & + \frac{1}{1000}x^{16} + \frac{3}{1000}x^{15} - \frac{3}{1000}y^{15} + \frac{1}{250}x^{14} - \frac{1}{250}y^{14} + \frac{1}{1000}x^{17} - \frac{1}{1000}y^{17} + \frac{1}{1000}x^{18} \\ & - \frac{1}{1000}y^{18} + \frac{1}{1000}x^{19} - \frac{1}{1000}y^{19} + \frac{1}{1000}x^{20} - \frac{1}{1000}y^{20} + \frac{143}{1000}x^1 = 0 \end{aligned}$$

>

> solB:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9
res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,res33,pi[10]=152/1000,pi[1]<=5*pi[13],pi[1]>=101/100*
pi[2],pi[2]>=101/100*pi[3],pi[3]>=101/100*pi[4],pi[4]>=101/100*pi
i[5],pi[5]>=101/100*pi[6],pi[6]>=101/100*pi[7],pi[7]>=101/100*pi
[8],pi[8]>=101/100*pi[9],pi[9]>=101/100*pi[10],pi[10]>=101/100*p
i[11],pi[11]>=101/100*pi[12],pi[12]>=101/100*pi[13]},NONNEGATIVE
);

$$solB := \{ \pi_{10} = \frac{19}{125}, x^{14} = \frac{1566430332035134121466317531818826759707441}{13785311871075339737159389551223750000000000} \}$$

$$x^{11} = \frac{2866789120637244609226490046612969996053421}{379096076454571842771883212658653125000000000}$$

$$x^6 = \frac{488368306541439835061362309674339843046661}{151638430581828737108753285063461250000000000}, x^1 = 0, y^{20} = 0, y^{18} = 0,$$

$$x^5 = \frac{133976630701463544921246159452206282011669}{68926559355376698685796947756118750000000000}$$

$$x^{10} = \frac{402834073362596149709870282447676716620861}{60655372232731494843501314025384500000000000}, y^8 = 0, y^{15} = 0, y^7 = 0, y^{12} = 0,$$

$$y^{11} = 0, y^{14} = 0, y^{16} = 0, x^3 = 0, y^5 = 0, y^6 = 0, y^9 = 0, x^2 = 0, y^{19} = 0, y^{17} = 0,$$

$$\pi_7 = \frac{5647908165065090640000000000000000}{121310744465462989687002628050769}, \pi_6 = \frac{5704387246715741546400000000000000}{121310744465462989687002628050769}$$

$$\pi_8 = \frac{5591988282242664000000000000000000}{121310744465462989687002628050769}, \pi_1 = \frac{59953683259605125831405154746400}{121310744465462989687002628050769}$$

$$\pi_{12} = \frac{60553220092201177089719206293864}{606553722327314948435013140253845}, \pi_9 = \frac{5536622061626400000000000000000000}{121310744465462989687002628050769}$$

$$\begin{aligned} \pi_5 &= \frac{57614311191828989618640000000000}{121310744465462989687002628050769}, \\ y_2 &= \frac{66514643742151200551871790182760985465219}{1613174793423709969242056224079375000000000}, \\ x_{15} &= \frac{2470225600376803973238730860754624351801867}{18954803822728592138594160632932656250000000}, \\ \pi_{13} &= \frac{11990736651921025166281030949280}{121310744465462989687002628050769}, \\ x_{16} &= \frac{1412301049770635810148082298474041609241769}{9477401911364296069297080316466328125000000}, \\ x_9 &= \frac{554585257779409845625403877226038622488751}{9477401911364296069297080316466328125000000}, \\ y_3 &= \frac{10311953225861444017857237122356308479859}{592337619460268504331067519779145507812500}, \\ x_{17} &= \frac{25811605009351169099147142584491302132379969}{151638430581828737108753285063461250000000000}, \\ x_{20} &= \frac{183501180142864506753912647060326562184141}{7581921529091436855437664253173062500000000}, \\ \pi_3 &= \frac{58772358846784752309974664000000}{121310744465462989687002628050769}, \\ x_{13} &= \frac{7477339542681774811667963789068524331562297}{758192152909143685543766425317306250000000000}, \\ y_1 &= \frac{953891447803772441645713013462775320744231}{13785311871075339737159389551223750000000000}, y_{10} = 0, y_{13} = 0, y_{14} = 0, \\ \pi_{11} &= \frac{1528968807328079721515409958920066}{15163843058182873710875328506346125}, \\ \pi_4 &= \frac{58190454303747279514826400000000}{121310744465462989687002628050769}, \\ x_7 &= \frac{1282446938230672978170968623322621220111737}{30327686116365747421750657012692250000000000}, \\ x_{12} &= \frac{1187758109180154576183731760479353103412213}{13785311871075339737159389551223750000000000}, \\ \pi_2 &= \frac{59360082435252599833074410640000}{121310744465462989687002628050769}, \\ x_4 &= \frac{408572275134233871947957521227595346691621}{151638430581828737108753285063461250000000000}, \\ x_8 &= \frac{32829222452691760371549157961834201503511}{645269917369483987696822489631750000000000} \end{aligned}$$

```

x18 =  $\frac{29188550229558427646057782225457347600381659}{151638430581828737108753285063461250000000000}$ ,
x19 =  $\frac{3278853076250433482367298159952322768391941}{151638430581828737108753285063461250000000000}$ 
> soluB:=evalf(solB);
soluB := {  $\pi_7 = .4655736134$ ,  $x_6 = .03220610400$ ,  $x_{10} = .06641358523$ ,  $x_5 = .01943759154$ ,
 $x_{11} = .07562170380$ ,  $\pi_{10} = .1520000000$ ,  $x_{14} = .1136303877$ ,  $x_{12} = .08616113442$ ,
 $\pi_4 = .4796809595$ ,  $x_7 = .04228634302$ ,  $x_{19} = .2162283706$ ,  $x_{18} = .1924878154$ ,
 $x_9 = .05851659167$ ,  $y_2 = .04123213679$ ,  $\pi_9 = .4563999740$ ,  $\pi_5 = .4749316431$ ,
 $x_8 = .05087672859$ ,  $\pi_2 = .4893225468$ ,  $\pi_{11} = .1008299019$ ,  $\pi_6 = .4702293496$ ,
 $x_{17} = .1702180965$ ,  $\pi_{12} = .09983158600$ ,  $x_{20} = .2420246364$ ,  $\pi_3 = .4844777691$ ,
 $y_3 = .01740891155$ ,  $\pi_{13} = .09884315445$ ,  $x_{16} = .1490177438$ ,  $x_{15} = .1303218764$ ,
 $\pi_8 = .4609639737$ ,  $\pi_1 = .4942157723$ ,  $x_{13} = .09862064008$ ,  $y_1 = .06919621817$ ,
 $x_4 = .002694384752$ ,  $x_1 = 0$ ,  $y_{20} = 0$ ,  $y_{18} = 0$ ,  $y_8 = 0$ ,  $y_{15} = 0$ ,  $y_7 = 0$ ,  $y_{12} = 0$ ,  $y_{11} = 0$ ,
 $y_{14} = 0$ ,  $y_{16} = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $y_5 = 0$ ,  $y_6 = 0$ ,  $y_9 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $y_{19} = 0$ ,  $y_{17} = 0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $y_{13} = 0$ ,
 $y_4 = 0$  }
> 'obj'=subs(soluB,obj);
obj = .03895292215
>

```

pro-lin-España

Programa lineal de España 94

```
> restart;
> with(simplex):
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize
> res1 :=
(0/10^10)*pi[1]+(0/10^10)*pi[2]+(0/10^10)*pi[3]+(0/10^10)*pi[4]+
(0/10^10)*pi[5]+(2/10^10)*pi[6]+(209/10^10)*pi[7]+(227/10^10)*pi
[8]+(2709/10^10)*pi[9]+(374570/10^10)*pi[10]+(49873324/10^10)*pi
[11]+(9949748955/10^10)*pi[12]+x1-y1 = (5/1000);

res1 := 
$$\frac{1}{5000000000} \pi_6 + \frac{209}{10000000000} \pi_7 + \frac{227}{10000000000} \pi_8 + \frac{2709}{10000000000} \pi_9$$


$$+ \frac{37457}{10000000000} \pi_{10} + \frac{12468331}{25000000000} \pi_{11} + \frac{1989949791}{20000000000} \pi_{12} + x1 - y1 = \frac{1}{200}$$

> res2:=(0/10^10)*pi[1]+(0/10^10)*pi[2]+(0/10^10)*pi[3]+(20/10^10)
*pi[4]+(23/10^10)*pi[5]+(194/10^10)*pi[6]+(5762/10^10)*pi[7]+(71
31/10^10)*pi[8]+(73208/10^10)*pi[9]+(3362695/10^10)*pi[10]+(1488
29255/10^10)*pi[11]+(9847721711/10^10)*pi[12]+x2-y2 = (15/1000);

res2 := 
$$\frac{1}{5000000000} \pi_4 + \frac{23}{10000000000} \pi_5 + \frac{97}{5000000000} \pi_6 + \frac{2881}{5000000000} \pi_7$$


$$+ \frac{7131}{10000000000} \pi_8 + \frac{9151}{12500000000} \pi_9 + \frac{672539}{20000000000} \pi_{10} + \frac{29765851}{20000000000} \pi_{11} + \frac{9847721711}{10000000000} \pi_{12}$$


$$+ x2 - y2 = \frac{3}{200}$$

> res3 :=
(0/10^10)*pi[1]+(0/10^10)*pi[2]+(4/10^10)*pi[3]+(160/10^10)*pi[4
]+(198/10^10)*pi[5]+(1533/10^10)*pi[6]+(27265/10^10)*pi[7]+(3769
8/10^10)*pi[8]+(339063/10^10)*pi[9]+(9314663/10^10)*pi[10]+(2466
60877/10^10)*pi[11]+(9743618538/10^10)*pi[12]+x3-y3 = (25/1000);

res3 := 
$$\frac{1}{25000000000} \pi_3 + \frac{1}{62500000} \pi_4 + \frac{99}{50000000000} \pi_5 + \frac{1533}{10000000000} \pi_6 + \frac{5453}{20000000000} \pi_7$$


$$+ \frac{18849}{50000000000} \pi_8 + \frac{339063}{100000000000} \pi_9 + \frac{9314663}{100000000000} \pi_{10} + \frac{246660877}{100000000000} \pi_{11}$$


$$+ \frac{4871809269}{50000000000} \pi_{12} + x3 - y3 = \frac{1}{40}$$

> res4 :=
(0/10^10)*pi[1]+(1/10^10)*pi[2]+(22/10^10)*pi[3]+(612/10^10)*pi[
```

4]+(818/10^10)*pi[5]+(6026/10^10)*pi[6]+(76800/10^10)*pi[7]+(116369/10^10)*pi[8]+(930483/10^10)*pi[9]+(18199940/10^10)*pi[10]+(343280952/10^10)*pi[11]+(9637387972/10^10)*pi[12]+x4-y4 =
(35/1000);

$$\begin{aligned} \text{res4} := & \frac{1}{10000000000} \pi_2 + \frac{11}{5000000000} \pi_3 + \frac{153}{2500000000} \pi_4 + \frac{409}{5000000000} \pi_5 \\ & + \frac{3013}{5000000000} \pi_6 + \frac{3}{390625} \pi_7 + \frac{116369}{10000000000} \pi_8 + \frac{930483}{10000000000} \pi_9 + \frac{909997}{500000000} \pi_{10} \\ & + \frac{42910119}{1250000000} \pi_{11} + \frac{2409346993}{2500000000} \pi_{12} + x4 - y4 = \frac{7}{200} \end{aligned}$$

> res5 :=

(0/10^10)*pi[1]+(7/10^10)*pi[2]+(81/10^10)*pi[3]+(1670/10^10)*pi[4]+(2404/10^10)*pi[5]+(16898/10^10)*pi[6]+(168249/10^10)*pi[7]+(274925/10^10)*pi[8]+(1977199/10^10)*pi[9]+(29982202/10^10)*pi[10]+(438598458/10^10)*pi[11]+(9528977903/10^10)*pi[12]+x5-y5 =
(45/1000);

$$\begin{aligned} \text{res5} := & \frac{7}{10000000000} \pi_2 + \frac{81}{10000000000} \pi_3 + \frac{167}{1000000000} \pi_4 + \frac{601}{2500000000} \pi_5 \\ & + \frac{8449}{5000000000} \pi_6 + \frac{168249}{10000000000} \pi_7 + \frac{10997}{400000000} \pi_8 + \frac{1977199}{10000000000} \pi_9 + \frac{14991101}{5000000000} \pi_{10} \\ & + \frac{219299229}{5000000000} \pi_{11} + \frac{9528977903}{10000000000} \pi_{12} + x5 - y5 = \frac{9}{200} \end{aligned}$$

> res6 :=

(0/10^10)*pi[1]+(25/10^10)*pi[2]+(223/10^10)*pi[3]+(3723/10^10)*pi[4]+(5756/10^10)*pi[5]+(38777/10^10)*pi[6]+(317816/10^10)*pi[7]+(552502/10^10)*pi[8]+(3607981/10^10)*pi[9]+(44618950/10^10)*pi[10]+(532518492/10^10)*pi[11]+(9418335749/10^10)*pi[12]+x6-y6 =
(55/1000);

$$\begin{aligned} \text{res6} := & \frac{1}{4000000000} \pi_2 + \frac{223}{10000000000} \pi_3 + \frac{3723}{10000000000} \pi_4 + \frac{1439}{2500000000} \pi_5 \\ & + \frac{38777}{10000000000} \pi_6 + \frac{39727}{1250000000} \pi_7 + \frac{276251}{5000000000} \pi_8 + \frac{3607981}{10000000000} \pi_9 + \frac{892379}{200000000} \pi_{10} \\ & + \frac{133129623}{2500000000} \pi_{11} + \frac{9418335749}{10000000000} \pi_{12} + x6 - y6 = \frac{11}{200} \end{aligned}$$

> res7 :=

(3/10^10)*pi[1]+(70/10^10)*pi[2]+(523/10^10)*pi[3]+(7276/10^10)*pi[4]+(12037/10^10)*pi[5]+(77975/10^10)*pi[6]+(544601/10^10)*pi[7]+(995602/10^10)*pi[8]+(5950159/10^10)*pi[9]+(62061109/10^10)*pi[10]+(624942154/10^10)*pi[11]+(9305408489/10^10)*pi[12]+x7-y7 =
(65/1000);

$$\text{res7} := \frac{3}{10000000000} \pi_1 + \frac{7}{10000000000} \pi_2 + \frac{523}{10000000000} \pi_3 + \frac{1819}{2500000000} \pi_4$$

$$+ \frac{12037}{10000000000} \pi_5 + \frac{3119}{400000000} \pi_6 + \frac{544601}{10000000000} \pi_7 + \frac{497801}{5000000000} \pi_8 + \frac{5950159}{10000000000} \pi_9$$

$$+ \frac{62061109}{10000000000} \pi_{10} + \frac{312471077}{5000000000} \pi_{11} + \frac{9305408489}{10000000000} \pi_{12} + x^7 - y^7 = \frac{13}{200}$$

> res8 :=

$$(9/10^{10}) * \pi_1 + (168/10^{10}) * \pi_2 + (1090/10^{10}) * \pi_3 + (12949/10^{10}) * \pi_4 + (22849/10^{10}) * \pi_5 + (142761/10^{10}) * \pi_6 + (871123/10^{10}) * \pi_7 + (1658002/10^{10}) * \pi_8 + (9129036/10^{10}) * \pi_9 + (82252623/10^{10}) * \pi_{10} + (715766480/10^{10}) * \pi_{11} + (9190142904/10^{10}) * \pi_{12} + x^8 - y^8 = (75/1000);$$

$$res8 := \frac{9}{10000000000} \pi_1 + \frac{21}{1250000000} \pi_2 + \frac{109}{10000000000} \pi_3 + \frac{12949}{10000000000} \pi_4$$

$$+ \frac{22849}{10000000000} \pi_5 + \frac{142761}{10000000000} \pi_6 + \frac{871123}{10000000000} \pi_7 + \frac{829001}{5000000000} \pi_8 + \frac{2282259}{2500000000} \pi_9$$

$$+ \frac{82252623}{10000000000} \pi_{10} + \frac{8947081}{1250000000} \pi_{11} + \frac{1148767863}{12500000000} \pi_{12} + x^8 - y^8 = \frac{3}{40}$$

> res9 :=

$$(24/10^{10}) * \pi_1 + (363/10^{10}) * \pi_2 + (2079/10^{10}) * \pi_3 + (21503/10^{10}) * \pi_4 + (40333/10^{10}) * \pi_5 + (243735/10^{10}) * \pi_6 + (1323875/10^{10}) * \pi_7 + (2600657/10^{10}) * \pi_8 + (13267314/10^{10}) * \pi_9 + (105130008/10^{10}) * \pi_{10} + (804884323/10^{10}) * \pi_{11} + (9072485779/10^{10}) * \pi_{12} + x^9 - y^9 = (85/1000);$$

$$res9 := \frac{3}{1250000000} \pi_1 + \frac{363}{10000000000} \pi_2 + \frac{2079}{10000000000} \pi_3 + \frac{21503}{10000000000} \pi_4$$

$$+ \frac{40333}{10000000000} \pi_5 + \frac{48747}{2000000000} \pi_6 + \frac{10591}{80000000} \pi_7 + \frac{2600657}{10000000000} \pi_8 + \frac{6633657}{5000000000} \pi_9$$

$$+ \frac{13141251}{1250000000} \pi_{10} + \frac{804884323}{10000000000} \pi_{11} + \frac{9072485779}{10000000000} \pi_{12} + x^9 - y^9 = \frac{17}{200}$$

> res10 :=

$$(56/10^{10}) * \pi_1 + (721/10^{10}) * \pi_2 + (3702/10^{10}) * \pi_3 + (33867/10^{10}) * \pi_4 + (67289/10^{10}) * \pi_5 + (394220/10^{10}) * \pi_6 + (1933856/10^{10}) * \pi_7 + (3891486/10^{10}) * \pi_8 + (18484415/10^{10}) * \pi_9 + (130621929/10^{10}) * \pi_{10} + (892184338/10^{10}) * \pi_{11} + (8952384110/10^{10}) * \pi_{12} + x^{10} - y^{10} = (95/1000);$$

$$res10 := \frac{7}{12500000000} \pi_1 + \frac{721}{10000000000} \pi_2 + \frac{1851}{5000000000} \pi_3 + \frac{33867}{10000000000} \pi_4$$

$$+ \frac{67289}{10000000000} \pi_5 + \frac{19711}{500000000} \pi_6 + \frac{60433}{312500000} \pi_7 + \frac{1945743}{5000000000} \pi_8 + \frac{3696883}{2000000000} \pi_9$$

$$+ \frac{130621929}{10000000000} \pi_{10} + \frac{446092169}{5000000000} \pi_{11} + \frac{895238411}{10000000000} \pi_{12} + x^{10} - y^{10} = \frac{19}{200}$$

> res11 :=

$$(121/10^{10}) * \pi_1 + (1341/10^{10}) * \pi_2 + (6259/10^{10}) * \pi_3 + (51172/10^{10}) * \pi_4 + (13417/10^{10}) * \pi_5 + (13417/10^{10}) * \pi_6 + (13417/10^{10}) * \pi_7 + (13417/10^{10}) * \pi_8 + (13417/10^{10}) * \pi_9 + (13417/10^{10}) * \pi_{10} + (13417/10^{10}) * \pi_{11} + (13417/10^{10}) * \pi_{12} + x^{11} - y^{11} = (101/1000);$$

$0^{10}) * \pi[4] + (107319/10^{10}) * \pi[5] + (610731/10^{10}) * \pi[6] + (2737080/10^{10}) * \pi[7] + (5605133/10^{10}) * \pi[8] + (24895773/10^{10}) * \pi[9] + (158648717/10^{10}) * \pi[10] + (977550924/10^{10}) * \pi[11] + (8829785421/10^{10}) * \pi[12] + x11 - y11 = (105/1000);$

$$\begin{aligned}
 res11 := & \frac{121}{10000000000} \pi_1 + \frac{1341}{10000000000} \pi_2 + \frac{6259}{10000000000} \pi_3 + \frac{12793}{2500000000} \pi_4 \\
 & + \frac{107319}{10000000000} \pi_5 + \frac{610731}{10000000000} \pi_6 + \frac{68427}{2500000000} \pi_7 + \frac{5605133}{10000000000} \pi_8 + \frac{24895773}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{158648717}{10000000000} \pi_{10} + \frac{244387731}{2500000000} \pi_{11} + \frac{8829785421}{10000000000} \pi_{12} + x11 - y11 = \frac{21}{200}
 \end{aligned}$$

> res12 :=
 $(241/10^{10}) * \pi[1] + (2363/10^{10}) * \pi[2] + (10135/10^{10}) * \pi[3] + (74795/10^{10}) * \pi[4] + (164965/10^{10}) * \pi[5] + (913450/10^{10}) * \pi[6] + (3775069/10^{10}) * \pi[7] + (7822659/10^{10}) * \pi[8] + (32612097/10^{10}) * \pi[9] + (189121956/10^{10}) * \pi[10] + (1060864169/10^{10}) * \pi[11] + (8704638090/10^{10}) * \pi[12] + x12 - y12 = (23/200);$

$$\begin{aligned}
 res12 := & \frac{241}{10000000000} \pi_1 + \frac{2363}{10000000000} \pi_2 + \frac{2027}{20000000000} \pi_3 + \frac{14959}{20000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{32993}{20000000000} \pi_5 + \frac{18269}{20000000000} \pi_6 + \frac{3775069}{100000000000} \pi_7 + \frac{7822659}{100000000000} \pi_8 + \frac{32612097}{100000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{47280489}{25000000000} \pi_{10} + \frac{1060864169}{100000000000} \pi_{11} + \frac{870463809}{100000000000} \pi_{12} + x12 - y12 = \frac{23}{200}
 \end{aligned}$$

> res13 :=
 $(457/10^{10}) * \pi[1] + (3981/10^{10}) * \pi[2] + (15823/10^{10}) * \pi[3] + (106416/10^{10}) * \pi[4] + (245877/10^{10}) * \pi[5] + (1326770/10^{10}) * \pi[6] + (5095259/10^{10}) * \pi[7] + (10631005/10^{10}) * \pi[8] + (41738461/10^{10}) * \pi[9] + (221943927/10^{10}) * \pi[10] + (1141999921/10^{10}) * \pi[11] + (8576892101/10^{10}) * \pi[12] + x13 - y13 = 25/200;$

$$\begin{aligned}
 res13 := & \frac{457}{10000000000} \pi_1 + \frac{3981}{10000000000} \pi_2 + \frac{15823}{10000000000} \pi_3 + \frac{6651}{6250000000} \pi_4 \\
 & + \frac{245877}{10000000000} \pi_5 + \frac{132677}{10000000000} \pi_6 + \frac{5095259}{100000000000} \pi_7 + \frac{2126201}{20000000000} \pi_8 + \frac{41738461}{100000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{221943927}{100000000000} \pi_{10} + \frac{1141999921}{100000000000} \pi_{11} + \frac{8576892101}{100000000000} \pi_{12} + x13 - y13 = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

> res14 :=
 $(828/10^{10}) * \pi[1] + (6458/10^{10}) * \pi[2] + (23980/10^{10}) * \pi[3] + (148092/10^{10}) * \pi[4] + (357056/10^{10}) * \pi[5] + (1879880/10^{10}) * \pi[6] + (6751446/10^{10}) * \pi[7] + (14122610/10^{10}) * \pi[8] + (52373506/10^{10}) * \pi[9] + (257007248/10^{10}) * \pi[10] + (1220829806/10^{10}) * \pi[11] + (8446499088/10^{10}) * \pi[12] + x14 - y14 = 27/200;$

$$\begin{aligned} res14 := & \frac{207}{2500000000} \pi_1 + \frac{3229}{5000000000} \pi_2 + \frac{1199}{5000000000} \pi_3 + \frac{37023}{2500000000} \pi_4 + \frac{5579}{156250000} \pi_5 \\ & + \frac{46997}{2500000000} \pi_6 + \frac{3375723}{5000000000} \pi_7 + \frac{1412261}{10000000000} \pi_8 + \frac{26186753}{5000000000} \pi_9 + \frac{16062953}{625000000} \pi_{10} \\ & + \frac{610414903}{5000000000} \pi_{11} + \frac{527906193}{625000000} \pi_{12} + x14 - y14 = \frac{27}{200} \end{aligned}$$

```
> res15 :=
(1442/10^10)*pi[1]+(10145/10^10)*pi[2]+(35461/10^10)*pi[3]+(2023
40/10^10)*pi[4]+(507065/10^10)*pi[5]+(2607369/10^10)*pi[6]+(8804
092/10^10)*pi[7]+(18394730/10^10)*pi[8]+(64608480/10^10)*pi[9]+(
294194364/10^10)*pi[10]+(1297221399/10^10)*pi[11]+(8313413113/10
^10)*pi[12]+x15-y15 = 29/200;
```

$$\begin{aligned} res15 := & \frac{721}{5000000000} \pi_1 + \frac{2029}{20000000000} \pi_2 + \frac{35461}{10000000000} \pi_3 + \frac{10117}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{101413}{20000000000} \pi_5 + \frac{2607369}{10000000000} \pi_6 + \frac{2201023}{25000000000} \pi_7 + \frac{1839473}{10000000000} \pi_8 + \frac{403803}{625000000} \pi_9 \\ & + \frac{73548591}{25000000000} \pi_{10} + \frac{1297221399}{100000000000} \pi_{11} + \frac{8313413113}{100000000000} \pi_{12} + x15 - y15 = \frac{29}{200} \end{aligned}$$

```
> res16 :=
(2430/10^10)*pi[1]+(15498/10^10)*pi[2]+(51317/10^10)*pi[3]+(2722
39/10^10)*pi[4]+(706250/10^10)*pi[5]+(3549808/10^10)*pi[6]+(1132
0554/10^10)*pi[7]+(23548679/10^10)*pi[8]+(78526194/10^10)*pi[9]+
(333377122/10^10)*pi[10]+(1371038323/10^10)*pi[11]+(8177591579/1
0^10)*pi[12]+x16-y16 = 31/200;
```

$$\begin{aligned} res16 := & \frac{243}{10000000000} \pi_1 + \frac{7749}{50000000000} \pi_2 + \frac{51317}{100000000000} \pi_3 + \frac{272239}{100000000000} \pi_4 + \frac{113}{1600000} \pi_5 \\ & + \frac{221863}{625000000} \pi_6 + \frac{5660277}{50000000000} \pi_7 + \frac{23548679}{100000000000} \pi_8 + \frac{39263097}{50000000000} \pi_9 + \frac{166688561}{50000000000} \pi_{10} \\ & + \frac{1371038323}{100000000000} \pi_{11} + \frac{8177591579}{100000000000} \pi_{12} + x16 - y16 = \frac{31}{200} \end{aligned}$$

```
> res17 :=
(3977/10^10)*pi[1]+(23111/10^10)*pi[2]+(72903/10^10)*pi[3]+(3615
49/10^10)*pi[4]+(967066/10^10)*pi[5]+(4754411/10^10)*pi[6]+(1437
5266/10^10)*pi[7]+(29689007/10^10)*pi[8]+(94200002/10^10)*pi[9]+
(374416306/10^10)*pi[10]+(1442140540/10^10)*pi[11]+(8038995856/1
0^10)*pi[12]+x17-y17 = 33/200;
```

$$\begin{aligned} res17 := & \frac{3977}{100000000000} \pi_1 + \frac{23111}{100000000000} \pi_2 + \frac{72903}{100000000000} \pi_3 + \frac{361549}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{483533}{50000000000} \pi_5 + \frac{4754411}{100000000000} \pi_6 + \frac{7187633}{50000000000} \pi_7 + \frac{29689007}{100000000000} \pi_8 + \frac{47100001}{50000000000} \pi_9 \end{aligned}$$

$$+ \frac{187208153}{5000000000} \pi_{10} + \frac{72107027}{5000000000} \pi_{11} + \frac{502437241}{6250000000} \pi_{12} + x17 - y17 = \frac{33}{200}$$

> res18 :=

$$(6345/10^{10}) * \pi_1 + (33740/10^{10}) * \pi_2 + (101931/10^{10}) * \pi_3 + (474854/10^{10}) * \pi_4 + (1304371/10^{10}) * \pi_5 + (6275619/10^{10}) * \pi_6 + (18049754/10^{10}) * \pi_7 + (36922469/10^{10}) * \pi_8 + (111692671/10^{10}) * \pi_9 + (417161335/10^{10}) * \pi_{10} + (1510384646/10^{10}) * \pi_{11} + (7897592260/10^{10}) * \pi_{12} + x18 - y18 = 35/200;$$

$$\begin{aligned} \text{res18} := & \frac{1269}{20000000000} \pi_1 + \frac{1687}{5000000000} \pi_2 + \frac{101931}{100000000000} \pi_3 + \frac{237427}{50000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1304371}{100000000000} \pi_5 + \frac{6275619}{100000000000} \pi_6 + \frac{9024877}{50000000000} \pi_7 + \frac{36922469}{100000000000} \pi_8 + \frac{111692671}{100000000000} \pi_9 \\ & + \frac{83432267}{20000000000} \pi_{10} + \frac{755192323}{50000000000} \pi_{11} + \frac{394879613}{5000000000} \pi_{12} + x18 - y18 = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

> res19 :=

$$(9893/10^{10}) * \pi_1 + (48339/10^{10}) * \pi_2 + (140541/10^{10}) * \pi_3 + (617713/10^{10}) * \pi_4 + (1735763/10^{10}) * \pi_5 + (8175727/10^{10}) * \pi_6 + (22432626/10^{10}) * \pi_7 + (45357036/10^{10}) * \pi_8 + (131055291/10^{10}) * \pi_9 + (461449914/10^{10}) * \pi_{10} + (1575624277/10^{10}) * \pi_{11} + (7753352877/10^{10}) * \pi_{12} + x19 - y19 = 37/200;$$

$$\begin{aligned} \text{res19} := & \frac{9893}{100000000000} \pi_1 + \frac{48339}{100000000000} \pi_2 + \frac{140541}{100000000000} \pi_3 + \frac{617713}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1735763}{100000000000} \pi_5 + \frac{8175727}{100000000000} \pi_6 + \frac{11216313}{50000000000} \pi_7 + \frac{11339259}{25000000000} \pi_8 + \frac{131055291}{100000000000} \pi_9 \\ & + \frac{230724957}{50000000000} \pi_{10} + \frac{1575624277}{100000000000} \pi_{11} + \frac{7753352877}{100000000000} \pi_{12} + x19 - y19 = \frac{37}{200} \end{aligned}$$

> res20 :=

$$(15112/10^{10}) * \pi_1 + (68103/10^{10}) * \pi_2 + (191386/10^{10}) * \pi_3 + (796841/10^{10}) * \pi_4 + (2281927/10^{10}) * \pi_5 + (10525411/10^{10}) * \pi_6 + (27619278/10^{10}) * \pi_7 + (55100490/10^{10}) * \pi_8 + (152326003/10^{10}) * \pi_9 + (507107677/10^{10}) * \pi_{10} + (1637710711/10^{10}) * \pi_{11} + (7606257057/10^{10}) * \pi_{12} + x20 - y20 = 39/200;$$

$$\begin{aligned} \text{res20} := & \frac{1889}{12500000000} \pi_1 + \frac{68103}{100000000000} \pi_2 + \frac{95693}{50000000000} \pi_3 + \frac{796841}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{2281927}{100000000000} \pi_5 + \frac{10525411}{100000000000} \pi_6 + \frac{13809639}{50000000000} \pi_7 + \frac{5510049}{10000000000} \pi_8 + \frac{152326003}{100000000000} \pi_9 \\ & + \frac{507107677}{100000000000} \pi_{10} + \frac{1637710711}{100000000000} \pi_{11} + \frac{7606257057}{100000000000} \pi_{12} + x20 - y20 = \frac{39}{200} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{obj} := & (x1+y1) * (703/10000) + (x2+y2) * (1261/10000) + (x3+y3) * (1354/10000) \\ & + (x4+y4) * (1262/10000) + (x5+y5) * (1101/10000) + (x6+y6) * (922/10000) \\ & + (x7+y7) * (752/10000) + (x8+y8) * (602/10000) + (x9+y9) * (476/10000) + (x1 \end{aligned}$$

$$0+y_{10}) * (371/10000) + (x_{11}+y_{11}) * (288/10000) + (x_{12}+y_{12}) * (221/10000) + (x_{13}+y_{13}) * (169/10000) + (x_{14}+y_{14}) * (128/10000) + (x_{15}+y_{15}) * (97/10000) + (x_{16}+y_{16}) * (73/10000) + (x_{17}+y_{17}) * (41/10000) + (x_{18}+y_{18}) * (31/10000) + (x_{19}+y_{19}) * (23/10000) + (x_{20}+y_{20}) * (68/10000) ;$$

$$\begin{aligned} obj := & \frac{17}{2500}x_{20} + \frac{17}{2500}y_{20} + \frac{8}{625}y_{14} + \frac{8}{625}x_{14} + \frac{31}{10000}y_{18} + \frac{703}{10000}y_1 + \frac{1261}{10000}x_2 \\ & + \frac{1261}{10000}y_2 + \frac{703}{10000}x_1 + \frac{301}{5000}x_8 + \frac{301}{5000}y_8 + \frac{119}{2500}x_9 + \frac{119}{2500}y_9 + \frac{371}{10000}x_{10} + \frac{371}{10000}y_{10} \\ & + \frac{18}{625}x_{11} + \frac{18}{625}y_{11} + \frac{23}{10000}y_{19} + \frac{23}{10000}x_{19} + \frac{41}{10000}y_{17} + \frac{41}{10000}x_{17} + \frac{97}{10000}y_{15} \\ & + \frac{221}{10000}x_{12} + \frac{221}{10000}y_{12} + \frac{169}{10000}x_{13} + \frac{169}{10000}y_{13} + \frac{97}{10000}x_{15} + \frac{677}{5000}x_3 + \frac{677}{5000}y_3 \\ & + \frac{631}{5000}x_4 + \frac{631}{5000}y_4 + \frac{1101}{10000}x_5 + \frac{1101}{10000}y_5 + \frac{461}{5000}x_6 + \frac{461}{5000}y_6 + \frac{47}{625}x_7 + \frac{47}{625}y_7 \\ & + \frac{31}{10000}x_{18} + \frac{73}{10000}y_{16} + \frac{73}{10000}x_{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > dese := (x_1 - y_1) * (703/10000) + (x_2 - y_2) * (1261/10000) + (x_3 - y_3) * (1354/10000) \\ & + (x_4 - y_4) * (1262/10000) + (x_5 - y_5) * (1101/10000) + (x_6 - y_6) * (922/10000) \\ & + (x_7 - y_7) * (752/10000) + (x_8 - y_8) * (602/10000) + (x_9 - y_9) * (476/10000) + (x_{10} - y_{10}) * (371/10000) \\ & + (x_{11} - y_{11}) * (288/10000) + (x_{12} - y_{12}) * (221/10000) + (x_{13} - y_{13}) * (169/10000) \\ & + (x_{14} - y_{14}) * (128/10000) + (x_{15} - y_{15}) * (97/10000) + (x_{16} - y_{16}) * (73/10000) \\ & + (x_{17} - y_{17}) * (41/10000) + (x_{18} - y_{18}) * (31/10000) + (x_{19} - y_{19}) * (23/10000) + (x_{20} - y_{20}) * (68/10000) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dese := & \frac{17}{2500}x_{20} - \frac{17}{2500}y_{20} - \frac{8}{625}y_{14} + \frac{8}{625}x_{14} - \frac{31}{10000}y_{18} - \frac{703}{10000}y_1 + \frac{1261}{10000}x_2 \\ & - \frac{1261}{10000}y_2 + \frac{703}{10000}x_1 + \frac{301}{5000}x_8 - \frac{301}{5000}y_8 + \frac{119}{2500}x_9 - \frac{119}{2500}y_9 + \frac{371}{10000}x_{10} - \frac{371}{10000}y_{10} \\ & + \frac{18}{625}x_{11} - \frac{18}{625}y_{11} - \frac{23}{10000}y_{19} + \frac{23}{10000}x_{19} - \frac{41}{10000}y_{17} + \frac{41}{10000}x_{17} - \frac{97}{10000}y_{15} \\ & + \frac{221}{10000}x_{12} - \frac{221}{10000}y_{12} + \frac{169}{10000}x_{13} - \frac{169}{10000}y_{13} + \frac{97}{10000}x_{15} + \frac{677}{5000}x_3 - \frac{677}{5000}y_3 \\ & + \frac{631}{5000}x_4 - \frac{631}{5000}y_4 + \frac{1101}{10000}x_5 - \frac{1101}{10000}y_5 + \frac{461}{5000}x_6 - \frac{461}{5000}y_6 + \frac{47}{625}x_7 - \frac{47}{625}y_7 \\ & + \frac{31}{10000}x_{18} - \frac{73}{10000}y_{16} + \frac{73}{10000}x_{16} \end{aligned}$$

$$> res21 := \pi_1[1] \geq \pi_1[2] ;$$

$$res21 := \pi_2 \leq \pi_1$$

$$> res22 := \pi_1[2] \geq \pi_1[3] ;$$

$$res22 := \pi_3 \leq \pi_2$$

$$> res23 := \pi_1[3] \geq \pi_1[4] ;$$

```

                                res23 :=  $\pi_4 \leq \pi_3$ 
> res24:=pi[4]>=pi[5];
                                res24 :=  $\pi_5 \leq \pi_4$ 
> res25:=pi[5]>=pi[6];
                                res25 :=  $\pi_6 \leq \pi_5$ 
> res26:=pi[6]>=pi[7];
                                res26 :=  $\pi_7 \leq \pi_6$ 
> res27:=pi[7]>=pi[8];
                                res27 :=  $\pi_8 \leq \pi_7$ 
> res28:=pi[8]>=pi[9];
                                res28 :=  $\pi_9 \leq \pi_8$ 
> res29:=pi[9]>=pi[10];
                                res29 :=  $\pi_{10} \leq \pi_9$ 
> res30:=pi[10]>=pi[11];
                                res30 :=  $\pi_{11} \leq \pi_{10}$ 
> res31:=pi[11]>=pi[12];
                                res31 :=  $\pi_{12} \leq \pi_{11}$ 
> res32:=(x1-y1)*(703/10000)+(x2-y2)*(1261/10000)+(x3-y3)*(1354/10
000)+(x4-y4)*(1262/10000)+(x5-y5)*(1101/10000)+(x6-y6)*(922/1000
0)+(x7-y7)*(752/10000)+(x8-y8)*(602/10000)+(x9-y9)*(476/10000)+(
x10-y10)*(371/10000)+(x11-y11)*(288/10000)+(x12-y12)*(221/10000)
+(x13-y13)*(169/10000)+(x14-y14)*(128/10000)+(x15-y15)*(97/10000
)+(x16-y16)*(73/10000)+(x17-y17)*(41/10000)+(x18-y18)*(31/10000)
+(x19-y19)*(23/10000)+(x20-y20)*(68/10000)=0;
res32 :=  $\frac{17}{2500}x_{20} - \frac{17}{2500}y_{20} - \frac{8}{625}y_{14} + \frac{8}{625}x_{14} - \frac{31}{10000}y_{18} - \frac{703}{10000}y_1 + \frac{1261}{10000}x_2$ 
-  $\frac{1261}{10000}y_2 + \frac{703}{10000}x_1 + \frac{301}{5000}x_8 - \frac{301}{5000}y_8 + \frac{119}{2500}x_9 - \frac{119}{2500}y_9 + \frac{371}{10000}x_{10} - \frac{371}{10000}y_{10}$ 
+  $\frac{18}{625}x_{11} - \frac{18}{625}y_{11} - \frac{23}{10000}y_{19} + \frac{23}{10000}x_{19} - \frac{41}{10000}y_{17} + \frac{41}{10000}x_{17} - \frac{97}{10000}y_{15}$ 
+  $\frac{221}{10000}x_{12} - \frac{221}{10000}y_{12} + \frac{169}{10000}x_{13} - \frac{169}{10000}y_{13} + \frac{97}{10000}x_{15} + \frac{677}{5000}x_3 - \frac{677}{5000}y_3$ 
+  $\frac{631}{5000}x_4 - \frac{631}{5000}y_4 + \frac{1101}{10000}x_5 - \frac{1101}{10000}y_5 + \frac{461}{5000}x_6 - \frac{461}{5000}y_6 + \frac{47}{625}x_7 - \frac{47}{625}y_7$ 
+  $\frac{31}{10000}x_{18} - \frac{73}{10000}y_{16} + \frac{73}{10000}x_{16} = 0$ 
>
> sol:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,
res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res2
0,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,re
s31,res32},NONNEGATIVE);

```

$$\begin{aligned}
sol := \{ & \pi_9 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, y_{20} = \frac{5859316136598027152703}{344125809823152957906100}, \\
& \pi_3 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, \pi_{12} = \frac{79463674523900000000}{30971322884083766211549}, \\
& \pi_7 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, y_l = \frac{2026413543709459363117}{1032377429469458873718300}, \\
& \pi_4 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, x_9 = \frac{7888499769399115618877}{6194264576816753242309800}, \\
& y_{18} = \frac{357217373459381815025}{30971322884083766211549}, y_2 = \frac{5516643928146994244459}{6194264576816753242309800}, \\
& y_{19} = \frac{29227153466406484498471}{2064754858938917747436600}, x_{19} = 0, y_{11} = 0, y_{10} = 0, y_9 = 0, y_8 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, \\
& x_{14} = 0, x_{20} = 0, y_3 = 0, x_3 = 0, x_{15} = 0, x_{13} = 0, x_{12} = 0, x_{17} = 0, y_5 = 0, y_4 = 0, y_7 = 0, \\
& y_6 = 0, \pi_{11} = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, y_{16} = \frac{43563534228208909750037}{6194264576816753242309800}, \\
& \pi_{10} = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, \pi_2 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, x_{16} = 0, x_{18} = 0, \\
& \pi_6 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, \pi_8 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, \\
& x_7 = \frac{5125986406423030641803}{3097132288408376621154900}, x_4 = \frac{1090889137127069871011}{1548566144204188310577450}, \\
& y_{13} = \frac{1296260527581163212569}{619426457681675324230980}, x_{10} = \frac{1183410267110067200323}{1548566144204188310577450}, \\
& x_{11} = \frac{75114775057491744107}{2064754858938917747436600}, \pi_5 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183}, \\
& x_5 = \frac{3772888081344547842827}{3097132288408376621154900}, x_6 = \frac{2379540673942825816093}{1548566144204188310577450}, \\
& y_{12} = \frac{472030431729730488281}{516188714734729436859150}, y_{15} = \frac{1594409796459160672151}{309713228840837662115490}, \\
& y_{14} = \frac{7231860142377186040117}{2064754858938917747436600}, x_8 = \frac{3239456120685933778411}{2064754858938917747436600}, \\
& y_{17} = \frac{56742542798170216847149}{6194264576816753242309800}, \pi_1 = \frac{9060154559865350000000}{10323774294694588737183} \} \\
\end{aligned}$$

> solu:=evalf(sol) ;

$$\begin{aligned}
solu := \{ & \pi_9 = .8776009918, y_{18} = .01153381064, x_{19} = 0, y_{11} = 0, y_{10} = 0, y_9 = 0, y_8 = 0, \\
& x_1 = 0, x_2 = 0, x_{14} = 0, x_{20} = 0, y_{19} = .01415526562, y_3 = 0, x_9 = .001273516762, \\
& y_2 = .0008906051493, \pi_4 = .8776009918, y_l = .001962861145, \pi_7 = .8776009918, x_3 = 0, \\
& \pi_{12} = .002565717804, \pi_3 = .8776009918, y_{20} = .01702666865, x_{15} = 0, x_{13} = 0, x_{12} = 0, \\
\end{aligned}$$

$x_{17} = 0, y_5 = 0, y_4 = 0, y_7 = 0, y_6 = 0, \pi_{11} = .8776009918, y_{16} = .007032882385,$
 $\pi_1 = .8776009918, y_{17} = .009160497117, y_{12} = .0009144532189, x_6 = .001536609000,$
 $x_8 = .001568930136, x_{11} = .00003637951243, x_4 = .0007044511087, y_{14} = .003502527242,$
 $y_{15} = .005148019678, x_5 = .001218187578, \pi_5 = .8776009918, x_{10} = .0007641974297,$
 $y_{13} = .002092678657, x_7 = .001655075059, \pi_8 = .8776009918, x_{16} = 0, \pi_2 = .8776009918,$
 $x_{18} = 0, \pi_{10} = .8776009918, \pi_6 = .8776009918 \}$

> 'obj' = subs (solu, obj) ;

$obj = .001347259246$

> 'dese' = subs (solu, dese) ;

$dese = -.1 \cdot 10^{-13}$

>

■ Añadimos la restricción de que la prima en la clase inicial sea la siniestralidad media

> sol2 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6, res7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, res17, res18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26, res27, res28, res29, res30, res31, res32, pi [6] = (532/10000) }, NONNEGATIVE) ;

$sol2 := \{ \pi_{12} = \frac{1533438645743884952971}{36901710468256495148750}, \pi_3 = \frac{120300767585134580394312829}{36901710468256495148750},$

$x_{10} = \frac{29318132230810383528223020277921}{738034209365129902975000000000000}, \pi_1 = \frac{120300767585134580394312829}{36901710468256495148750},$

$\pi_{10} = \frac{133}{2500}, y_{17} = \frac{10811981283787763724187278166109}{369017104682564951487500000000000},$

$x_5 = \frac{342993811909445067980036614313}{147606841873025980595000000000000}, x_{19} = 0, y_{11} = 0, y_{10} = 0, y_9 = 0, y_8 = 0, x_1 = 0,$

$x_2 = 0, x_4 = 0, x_{20} = 0, y_{13} = 0, y_{12} = 0, y_{15} = 0, y_{14} = 0,$

$x_{13} = \frac{7471052240818140580092887007113}{184508552341282475743750000000000},$

$x_{14} = \frac{6119390058534228956092353178009}{184508552341282475743750000000000},$

$y_{18} = \frac{10347435691338355576082902939947}{147606841873025980595000000000000},$

$x_{11} = \frac{6329909200453282627747841863189}{147606841873025980595000000000000},$

$x_{12} = \frac{32031372275733862367912811926993}{738034209365129902975000000000000}, y_4 = \frac{530200728778040690712891224433}{738034209365129902975000000000000},$

$\pi_5 = \frac{133}{2500}, \pi_8 = \frac{133}{2500}, x_3 = 0, \pi_7 = \frac{133}{2500}, \pi_{11} = \frac{133}{2500}, \pi_9 = \frac{133}{2500}, y_{16} = 0, x_{17} = 0, y_5 = 0,$

```


$$\pi_4 = \frac{120300767585134580394312829}{36901710468256495148750}, x_9 = \frac{5100017017754963854400089847393}{14760684187302598059500000000000}, y_7 = 0,$$


$$y_2 = \frac{9866974768489199836999426095779}{369017104682564951487500000000000}, x_6 = \frac{4233887813380476326766045801463}{369017104682564951487500000000000},$$


$$y_1 = \frac{27021790851779615248227387804517}{738034209365129902975000000000000}, y_3 = \frac{12477726501592917275651824144327}{738034209365129902975000000000000},$$


$$x_8 = \frac{10283706808007515852155223155753}{369017104682564951487500000000000}, y_6 = 0,$$


$$y_{20} = \frac{146595822837128319463634716570549}{738034209365129902975000000000000}, x_7 = \frac{14812489438766405947810890939787}{738034209365129902975000000000000},$$


$$x_{16} = 0, x_{15} = \frac{14894469075803107781185602456577}{738034209365129902975000000000000},$$


$$\pi_2 = \frac{120300767585134580394312829}{36901710468256495148750}, y_{19} = \frac{2312698432828330290252169316231}{18450855234128247574375000000000}, x_{18} = 0,$$


$$\pi_6 = \frac{133}{2500} \}$$

> solu2:=evalf(sol2);
solu2 := {x19 = 0, y11 = 0, y10 = 0, y9 = 0, y8 = 0, x1 = 0, x2 = 0, x4 = 0, x20 = 0, y13 = 0,
y12 = 0, y15 = 0, y14 = 0, x3 = 0, y16 = 0, x17 = 0, y5 = 0, x5 = .002323698601,
y17 = .02929940414,  $\pi_{12}$  = .04155467663, x6 = .01147341887, x9 = .03455135923,
 $\pi_4$  = 3260.032287, y7 = 0, y6 = 0,  $\pi_9$  = .05320000000,  $\pi_{11}$  = .05320000000,  $\pi_8$  = .05320000000,
 $\pi_7$  = .05320000000, y18 = .07010132837, x14 = .03316588841, x13 = .04049163113,
 $\pi_3$  = 3260.032287, x10 = .03972462504,  $\pi_1$  = 3260.032287,  $\pi_{10}$  = .05320000000,
x7 = .02007019356, x15 = .02018127193,  $\pi_2$  = 3260.032287, y19 = .1253436984,
y20 = .1986301190, x8 = .02786783235, x16 = 0,  $\pi_6$  = .05320000000, x18 = 0,
y1 = .03661319558, y3 = .01690670479, y2 = .02673852958, y4 = .007183958712,
 $\pi_5$  = .05320000000, x12 = .04340093165, x11 = .04288357586}
> 'obj2'=subs(sol2,obj);
obj2 = .02223567330
>

```

Añadimos otra restricción para que la prima en la clase peor sea a lo sumo cinco veces la prima en la clase mejor

```

> sol3:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,
res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,pi[6]=532/10000,pi[1]<=5*pi[12]},NONNEGATIVE);
sol3 := { $\pi_{10} = \frac{133}{2500}$ ,  $\pi_2 = \frac{12238784123204361}{46894115973042500}$ ,  $x_{18} = \frac{57469579620660298791117493}{4689411597304250000000000000}$ ,

```

$$\begin{aligned}
x_6 &= \frac{3216891632062188526425693}{1172352899326062500000000000}, y_4 = \frac{40408441227436412997782407}{2344705798652125000000000000}, \\
x_{17} &= \frac{131979039183275888055276447}{1172352899326062500000000000}, y_5 = \frac{4246749275371210354563837}{5861764496630312500000000000}, y_{18} = 0, \\
y_{20} &= 0, y_{11} = 0, y_{10} = 0, y_9 = 0, x_{11} = \frac{123523110089867653684795169}{2344705798652125000000000000}, y_8 = 0, \\
\pi_{12} &= \frac{12238784123204361}{234470579865212500}, x_9 = \frac{76691006051075352257341511}{2344705798652125000000000000}, \\
x_{10} &= \frac{20021564071147941888524939}{4689411597304250000000000000}, x_1 = 0, x_2 = 0, \\
x_7 &= \frac{14926900749215584694962863}{11723528993260625000000000000}, x_4 = 0, y_2 = \frac{87253049457077963068489011}{2344705798652125000000000000}, \\
y_3 &= \frac{63830476538617581881243823}{2344705798652125000000000000}, y_1 = \frac{5533806186673915365937463}{1172352899326062500000000000}, \\
x_{16} &= \frac{240562153534270346841756711}{2344705798652125000000000000}, y_{13} = 0, x_{19} = \frac{310730309729357445440919303}{2344705798652125000000000000}, \\
x_{14} &= \frac{96878077979114799813007341}{11723528993260625000000000000}, y_{12} = 0, \pi_5 = \frac{12238784123204361}{46894115973042500}, \\
x_8 &= \frac{26636465216831251584980353}{11723528993260625000000000000}, \pi_4 = \frac{12238784123204361}{46894115973042500}, y_{15} = 0, \\
x_{12} &= \frac{29387309644066880918916363}{4689411597304250000000000000}, x_{15} = \frac{54290302911464199875322043}{5861764496630312500000000000}, \\
\pi_3 &= \frac{12238784123204361}{46894115973042500}, \pi_1 = \frac{12238784123204361}{46894115973042500}, x_{20} = \frac{5220371283031489388812727}{36636028103939453125000000}, \\
x_{13} &= \frac{85173865108642117272590477}{11723528993260625000000000000}, x_5 = 0, y_{14} = 0, y_{17} = 0, y_{19} = 0, \pi_8 = \frac{133}{2500}, x_3 = 0, \\
\pi_7 &= \frac{133}{2500}, \pi_{11} = \frac{133}{2500}, \pi_9 = \frac{133}{2500}, y_{16} = 0, y_7 = 0, y_6 = 0, \pi_6 = \frac{133}{2500} \}
\end{aligned}$$

> solu3:=evalf(sol3);

solu3 := { $x_{18} = .1225517923$, $y_{18} = 0$, $y_{20} = 0$, $y_{11} = 0$, $y_{10} = 0$, $y_9 = 0$, $y_8 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,
 $x_4 = 0$, $y_{13} = 0$, $y_{12} = 0$, $y_{15} = 0$, $x_5 = 0$, $y_{14} = 0$, $y_{17} = 0$, $y_{19} = 0$, $x_3 = 0$, $y_{16} = 0$, $y_7 = 0$,
 $y_6 = 0$, $\pi_9 = .05320000000$, $\pi_{11} = .05320000000$, $\pi_8 = .05320000000$, $\pi_7 = .05320000000$,
 $\pi_{10} = .05320000000$, $\pi_6 = .05320000000$, $\pi_3 = .2609876286$, $\pi_5 = .2609876286$,
 $x_{16} = .1025980119$, $x_{20} = .1424928289$, $y_1 = .04720256324$, $\pi_1 = .2609876286$,
 $x_{13} = .07265207017$, $x_8 = .02272051806$, $\pi_4 = .2609876286$, $x_{15} = .09261768012$,
 $x_{12} = .06266737102$, $x_{14} = .08263559380$, $x_{19} = .1325242211$, $y_3 = .02722323482$,
 $y_2 = .03721279212$, $x_7 = .01273242959$, $x_9 = .03270815729$, $x_{10} = .04269525857$,
 $\pi_{12} = .05219752572$, $x_{11} = .05268170965$, $y_5 = .007244830934$, $x_6 = .002743961851$,

```

      x17=.1125762040,y4=.01723390681, $\pi_2$ =.2609876286}
> 'obj3'=subs(solu3,obj);
                                     obj3=.02933894844
>

```

☐ Añadimos restricciones para que la prima aumente un porcentaje de la prima en la clase anterior

```
> sol4:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9
, res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,pi[6]=532/10000,pi[1]<=5*pi[12],pi[1]>=1001/1000*pi[2
],pi[2]>=1001/1000*pi[3],pi[3]>=1001/1000*pi[4],pi[4]>=1001/1000
*pi[5],pi[5]>=1001/1000*pi[6],pi[6]>=1001/1000*pi[7],pi[7]>=1001
/1000*pi[8],pi[8]>=1001/1000*pi[9],pi[9]>=1001/1000*pi[10],pi[10
]>=1001/1000*pi[11],pi[11]>=1001/1000*pi[12]},NONNEGATIVE);
```

$$sol4 := \{y18 = 0, y20 = 0, y11 = 0, y10 = 0, y9 = 0, y8 = 0, x1 = 0, x2 = 0, x4 = 0, y13 = 0,$$

$$y12 = 0, y15 = 0, x5 = 0, y14 = 0, y17 = 0, y19 = 0, x3 = 0, y16 = 0, y7 = 0, y6 = 0, \pi_6 = \frac{133}{2500},$$

$$x6 = \frac{463805434395978287815419969929207853243041306188551}{16899231042794503980877633222280513647525000000000000}.$$

$$x_8 = \frac{3840723451020760116137855541251476612404251213347631}{1689923104279450398087763322228051364752500000000000000}.$$

$$y^3 = \frac{143810101856872937028639518090490606159928823364169}{5281009700873282494024260381962660514851562500000000}.$$

$$x7 = \frac{1076146709612979435541245287961721486095770491238953}{8449615521397251990438816611140256823762500000000000}.$$

$$x_{I2} = \frac{2118714258301925885250177238119798077775092003856051}{3379846208558900796175526644456102729505000000000000}$$

$$\pi_3 = \frac{175767738952047906283914937042200}{674619328435580562529483831743901}, \pi_7 = \frac{38}{715},$$

$$y_5 = \frac{24994513832388888076755290963666434420894230188977}{344882266179479673079135371883275788725000000000000}.$$

$$\pi_{12} = \frac{878838694760239531419574685211}{16831802773539661201173547525000}.$$

$$y^2 = \frac{6290569428217754724918868498169072673080909246236041}{16899231042794503980877633222280513647525000000000000}.$$

$$\pi_{11} = \frac{7600000000000}{143572858572143}.$$

$$xI8 = \frac{4143384712523545306614112024870477133967831834417579}{3379846208558900796175526644456102729505000000000000}.$$

$$\begin{aligned}
x16 &= \frac{17343757971942100900860539555610531586643180403541541}{16899231042794503980877633222280513647525000000000000}, \pi_9 = \frac{7600000}{143286143}, \\
x15 &= \frac{15656598579022267843212839984035233572493243631966077}{16899231042794503980877633222280513647525000000000000}, \pi_8 = \frac{7600}{143143}, \\
x17 &= \frac{19030559249146392944925396199965563531684811480121019}{16899231042794503980877633222280513647525000000000000}, \\
\pi_{10} &= \frac{7600000000}{143429429143}, \\
x20 &= \frac{24087945951697300556781278270951453007971106438906183}{16899231042794503980877633222280513647525000000000000}, \\
x9 &= \frac{502643956638052841960711527685118168633261738134251}{15362937311631367255343302929345921497750000000000000}, \\
x10 &= \frac{721735843283948122380735500332702982818978442079611}{16899231042794503980877633222280513647525000000000000}, \\
\pi_1 &= \frac{878838694760239531419574685211}{3366360554707932240234709505000}, \pi_4 = \frac{175767738952047906283914937042200000}{675293947764016143092013315575644901}, \\
\pi_2 &= \frac{878838694760239531419574685211}{3369726915262640172474944214505}, \\
\pi_5 &= \frac{175767738952047906283914937042200000000}{675969241711780159235105328891220545901}, \\
x14 &= \frac{498898092040264082773126487405386022952212962115589}{6035439658140894278884869007957326302687500000000000}, \\
y4 &= \frac{364163648856781816465878755749132325300736692542709}{21124038803493129976097041527850642059406250000000000}, \\
x11 &= \frac{2226382242012721453484599685782706706369939690652571}{42248077606986259952194083055701284118812500000000000}, \\
x13 &= \frac{50749817979738866613051525848910654141027795181287}{69831533234688032978833195133390552262500000000000}, \\
x19 &= \frac{350043071100824271349841152031323856459377944985577}{2640504850436641247012130190981330257425781250000000}, \\
y1 &= \frac{1595849001981755560001861164606289874132981028458233}{3379846208558900796175526644456102729505000000000000} \}
\end{aligned}$$

> solu4:=evalf(sol4);

solu4 := {y1 = .04721661589, π_4 = .2602833026, π_1 = .2610649336, x15 = .09264681061,
x9 = .03271795923, x20 = .1425387101, π_{10} = .05298773094, x17 = .1126119834,
 π_8 = .05309375939, π_7 = .05314685315, π_9 = .05304071867, x16 = .1026304565,
 π_{12} = .05221298672, y2 = .03722399802, y5 = .007247259799, x7 = .01273604351,
y3 = .02723155419, x8 = .02272720836, x6 = .002744535732, y4 = .01723930032,

$x19 = .1325667215, x10 = .04270820616, \pi_2 = .2608041295, \pi_5 = .2600232793,$
 $x14 = .08266143318, y18 = 0, y20 = 0, x13 = .07267464372, x11 = .05269783545,$
 $\pi_{11} = .05293479614, x18 = .1225909245, x12 = .06268670607, \pi_3 = .2605435859, y11 = 0,$
 $y10 = 0, y9 = 0, y8 = 0, x1 = 0, x2 = 0, x4 = 0, y13 = 0, y12 = 0, y15 = 0, x5 = 0, y14 = 0,$
 $y17 = 0, y19 = 0, x3 = 0, y16 = 0, y7 = 0, y6 = 0, \pi_6 = .05320000000 \}$

> 'obj4' = subs (solu4, obj) ;

obj4 = .02934789936

>

Obligamos a que la prima en la clase peor sea a lo sumo 10 veces la prima en la clase mejor

> sol5 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6, res7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, res17, res18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26, res27, res28, res29, res30, res31, res32, pi [6] = 532/10000, pi [1] <= 10*pi [12], pi [1] >= 1001/1000*pi [2], pi [2] >= 1001/1000*pi [3], pi [3] >= 1001/1000*pi [4], pi [4] >= 1001/1000*pi [5], pi [5] >= 1001/1000*pi [6], pi [6] >= 1001/1000*pi [7], pi [7] >= 1001/1000*pi [8], pi [8] >= 1001/1000*pi [9], pi [9] >= 1001/1000*pi [10], pi [10] >= 1001/1000*pi [11], pi [11] >= 1001/1000*pi [12]}, NONNEGATIVE) ;

sol5 := {y18 = 0, y20 = 0, y11 = 0, y10 = 0, y9 = 0, y8 = 0, x1 = 0, x2 = 0, x4 = 0, y13 = 0,

y12 = 0, y15 = 0, x5 = 0, y14 = 0, y17 = 0, y19 = 0, x3 = 0, y16 = 0, y7 = 0, y6 = 0,

$x10 = \frac{2819385645735833038507777691305879938796006290043}{66015822943717457537198084868765755777758789062500},$

$\pi_2 = \frac{7030709558081916251356597481688}{13479561402502060214292586928285},$

$x13 = \frac{50747028941756333611731574817682080048747747467407}{698349201388085501219946682909257581781250000000000},$

$y1 = \frac{797920620862684364823726008511592959375695074297391}{16900050673591669129522709726404033479106250000000000},$

$x9 = \frac{1005355870944006596237107500264413213524473320738437}{30727364861075762053677654048007333598375000000000000}, \pi_6 = \frac{133}{2500}, \pi_7 = \frac{38}{715},$

$\pi_{11} = \frac{7600000000000}{143572858572143}, \pi_9 = \frac{7600000}{143286143}, \pi_8 = \frac{7600}{143143}, \pi_{10} = \frac{7600000000}{143429429143},$

$y5 = \frac{12493888554036257909188047582513663717243034899361}{1724494966693027462196194870041227906031250000000000},$

$x17 = \frac{38051092824365582121775462989234764945294840576429873}{338001013471833382590454194528080669582125000000000000},$

$x12 = \frac{84746781443662290252848807665484369056441586462127}{13520040538873335303618167781123226783285000000000000},$

$$\begin{aligned}
x11 &= \frac{17811216275448337801452357413877036099932666387656163}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
x16 &= \frac{17340343508553809157034447072584425797123384010701411}{16900050673591669129522709726404033479106250000000000}, \\
\pi_4 &= \frac{1406141911616383250271319496337600000}{2701306800973693367356277278945699657}, \\
\pi_5 &= \frac{140614191161638325027131949633760000000}{2704008107774667060723633556224645356657}, \\
\pi_1 &= \frac{878838694760239531419574685211}{1683261913399358168617955410625}, \\
x15 &= \frac{31308777033383639414954014817135764849129585305894129}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
\pi_3 &= \frac{1406141911616383250271319496337600}{2698608192780912454901375903042657}, \\
x18 &= \frac{8283928360472577037954907875054907420802711310512237}{6760020269436667651809083890561613391642500000000000}, \\
x20 &= \frac{48149397538594983998655235283430761036949034361400351}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
x19 &= \frac{44785911243817771170864385639569328778924967393436511}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
x7 &= \frac{4305417037755863338437281181840647709844872982030607}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
y2 &= \frac{3145226639842586961031190964385827408025522056182403}{8450025336795834564761354863202016739553125000000000}, \\
\pi_{12} &= \frac{878838694760239531419574685211}{16832619133993581686179554106250}, \\
y4 &= \frac{2913044441215360090536679772741730835208859823674857}{16900050673591669129522709726404033479106250000000000}, \\
x8 &= \frac{7682280188130611577017555630650484020257195408594827}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
y3 &= \frac{9203462134408881709851207464023075633076850053247401}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
x6 &= \frac{928376463482388626029384121113559111551377933046737}{33800101347183338259045419452808066958212500000000000}, \\
x14 &= \frac{498850986172944613243541697637498684501485059553309}{6035732383425596117686682045144297671109375000000000} \}
\end{aligned}$$

> solu5:=evalf(sol5);

**solu5 := { $\pi_1 = .5221045446$, $\pi_5 = .5200213371$, $y5 = .007244955071$, $x17 = .1125768602$,
 $\pi_2 = .5215829617$, $x13 = .07266712533$, $x10 = .04270772551$, $x20 = .1424534117$,**

```

-  $\pi_{10} = .05298773094, x_{18} = .1225429515, \pi_3 = .5210618998, \pi_8 = .05309375939,$ 
-  $y_1 = .04721409635, \pi_7 = .05314685315, \pi_9 = .05304071867, x_{14} = .08264961971,$ 
-  $x_6 = .002746667692, y_3 = .02722909627, \pi_{12} = .05221045446, y_4 = .01723689767,$ 
-  $y_2 = .03722150543, x_{19} = .1325022987, x_7 = .01273788204, x_{16} = .1026052752,$ 
-  $\pi_4 = .5205413584, x_{12} = .06268234270, x_{11} = .05269574814, x_{15} = .09262924011,$ 
-  $x_8 = .02272857146, x_9 = .03271858409, y_{18} = 0, y_{20} = 0, \pi_{11} = .05293479614, y_{11} = 0,$ 
-  $y_{10} = 0, y_9 = 0, y_8 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, y_{13} = 0, y_{12} = 0, y_{15} = 0, x_5 = 0, y_{14} = 0,$ 
-  $y_{17} = 0, y_{19} = 0, x_3 = 0, y_{16} = 0, y_7 = 0, y_6 = 0, \pi_6 = .05320000000 \}$ 
- > 'obj5'=subs(solu5,obj) ;
-
-                                     obj5 = .02934513698
- >
- >
- >

```

pro-lin-Gilde

> restart;

> with(simplex):

Warning, new definition for maximize

Warning, new definition for minimize

> res1 :=

$(117/10^{10}) * (a-b) + (313/10^{10}) * (a-2*b) + (2075/10^{10}) * (a-3*b) + (7421/10^{10}) * (a-4*b) + (46713/10^{10}) * (a-5*b) + (120506/10^{10}) * (a-6*b) + (84562/10^{10}) * (a-7*b) + (1865342/10^{10}) * (a-8*b) + (17030098/10^{10}) * (a-9*b) + (26458822/10^{10}) * (a-10*b) + (323107673/10^{10}) * (a-11*b) + (312619132/10^{10}) * (a-12*b) + (9317857227/10^{10}) * (a-13*b) + x1 - y1 = (33/1000);$

$$res1 := \frac{100000000001}{100000000000} a - y1 + x1 - \frac{128877724963}{100000000000} b = \frac{33}{1000}$$

> res2 :=

$(10716/10^{10}) * \pi_1 + (22748/10^{10}) * \pi_2 + (81813/10^{10}) * \pi_3 + (278861/10^{10}) * \pi_4 + (965881/10^{10}) * \pi_5 + (2123977/10^{10}) * \pi_6 + (8249332/10^{10}) * \pi_7 + (15527029/10^{10}) * \pi_8 + (72279468/10^{10}) * \pi_9 + (104793493/10^{10}) * \pi_{10} + (634806202/10^{10}) * \pi_{11} + (593667715/10^{10}) * \pi_{12} + (8567192761/10^{10}) * \pi_{13} + x2 - y2 = (67/1000);$

$$res2 := \frac{2679}{25000000000} \pi_1 + \frac{5687}{25000000000} \pi_2 + \frac{81813}{100000000000} \pi_3 + \frac{278861}{100000000000} \pi_4 + \frac{965881}{100000000000} \pi_5 + \frac{2123977}{100000000000} \pi_6 + \frac{2062333}{25000000000} \pi_7 + \frac{15527029}{100000000000} \pi_8 + \frac{18069867}{25000000000} \pi_9 + \frac{104793493}{100000000000} \pi_{10} + \frac{317403101}{50000000000} \pi_{11} + \frac{118733543}{20000000000} \pi_{12} + \frac{8567192761}{100000000000} \pi_{13} + x2 - y2 = \frac{67}{1000}$$

> res3 :=

$(145925/10^{10}) * \pi_1 + (257587/10^{10}) * \pi_2 + (670146/10^{10}) * \pi_3 + (2213165/10^{10}) * \pi_4 + (5601108/10^{10}) * \pi_5 + (10783388/10^{10}) * \pi_6 + (29783247/10^{10}) * \pi_7 + (50714245/10^{10}) * \pi_8 + (163064122/10^{10}) * \pi_9 + (221680971/10^{10}) * \pi_{10} + (905480159/10^{10}) * \pi_{11} + (819312321/10^{10}) * \pi_{12} + (7790293614/10^{10}) * \pi_{13} + x3 - y3 = (100/1000);$

$$res3 := \frac{5837}{4000000000} \pi_1 + \frac{257587}{100000000000} \pi_2 + \frac{335073}{50000000000} \pi_3 + \frac{442633}{20000000000} \pi_4 + \frac{1400277}{25000000000} \pi_5 + \frac{2695847}{25000000000} \pi_6 + \frac{29783247}{100000000000} \pi_7 + \frac{10142849}{20000000000} \pi_8 + \frac{81532061}{50000000000} \pi_9 + \frac{221680971}{100000000000} \pi_{10} + \frac{905480159}{100000000000} \pi_{11} + \frac{819312321}{100000000000} \pi_{12} + \frac{3895146807}{50000000000} \pi_{13} + x3 - y3 = \frac{1}{10}$$

> res4 :=

```
(953934/10^10)*pi[1]+(1436987/10^10)*pi[2]+(2997821/10^10)*pi[3]
+(9703595/10^10)*pi[4]+(19832261/10^10)*pi[5]+(33972041/10^10)*p
i[6]+(74280657/10^10)*pi[7]+(115363098/10^10)*pi[8]+(286717239/1
0^10)*pi[9]+(366384377/10^10)*pi[10]+(1131817826/10^10)*pi[11]+(
990866996/10^10)*pi[12]+(6965673165/10^10)*pi[13]+x4-y4 =
(133/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res4} := & \frac{476967}{5000000000} \pi_1 + \frac{1436987}{10000000000} \pi_2 + \frac{2997821}{10000000000} \pi_3 + \frac{1940719}{20000000000} \pi_4 \\ & + \frac{19832261}{10000000000} \pi_5 + \frac{33972041}{10000000000} \pi_6 + \frac{74280657}{10000000000} \pi_7 + \frac{57681549}{50000000000} \pi_8 + \frac{286717239}{100000000000} \pi_9 \\ & + \frac{366384377}{100000000000} \pi_{10} + \frac{565908913}{50000000000} \pi_{11} + \frac{247716749}{25000000000} \pi_{12} + \frac{1393134633}{20000000000} \pi_{13} + x4 - y4 = \frac{133}{1000} \end{aligned}$$

```
> res5 :=
(4259152/10^10)*pi[1]+(5557138/10^10)*pi[2]+(9766462/10^10)*pi[3]
+(31259918/10^10)*pi[4]+(54103891/10^10)*pi[5]+(83247175/10^10)
*pi[6]+(151806997/10^10)*pi[7]+(215969315/10^10)*pi[8]+(43865786
1/10^10)*pi[9]+(527120748/10^10)*pi[10]+(1303958369/10^10)*pi[11]
+(1103409060/10^10)*pi[12]+(6070883914/10^10)*pi[13]+x5-y5 =
(167/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res5} := & \frac{266197}{625000000} \pi_1 + \frac{2778569}{5000000000} \pi_2 + \frac{4883231}{5000000000} \pi_3 + \frac{15629959}{5000000000} \pi_4 + \frac{54103891}{10000000000} \pi_5 \\ & + \frac{3329887}{400000000} \pi_6 + \frac{151806997}{10000000000} \pi_7 + \frac{43193863}{2000000000} \pi_8 + \frac{438657861}{10000000000} \pi_9 + \frac{131780187}{2500000000} \pi_{10} \\ & + \frac{1303958369}{10000000000} \pi_{11} + \frac{55170453}{5000000000} \pi_{12} + \frac{3035441957}{5000000000} \pi_{13} + x5 - y5 = \frac{167}{1000} \end{aligned}$$

```
> res6 :=
(13697558/10^10)*pi[1]+(15770376/10^10)*pi[2]+(24245585/10^10)*p
i[3]+(77330064/10^10)*pi[4]+(117515929/10^10)*pi[5]+(164570641/1
0^10)*pi[6]+(260565143/10^10)*pi[7]+(342431688/10^10)*pi[8]+(594
075320/10^10)*pi[9]+(673897092/10^10)*pi[10]+(1398655489/10^10)*
pi[11]+(1145122259/10^10)*pi[12]+(5172122857/10^10)*pi[13]+x6-y6
= (200/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res6} := & \frac{6848779}{5000000000} \pi_1 + \frac{1971297}{1250000000} \pi_2 + \frac{4849117}{2000000000} \pi_3 + \frac{4833129}{625000000} \pi_4 + \frac{117515929}{10000000000} \pi_5 \\ & + \frac{164570641}{10000000000} \pi_6 + \frac{260565143}{10000000000} \pi_7 + \frac{42803961}{1250000000} \pi_8 + \frac{14851883}{2500000000} \pi_9 + \frac{168474273}{2500000000} \pi_{10} \\ & + \frac{1398655489}{10000000000} \pi_{11} + \frac{1145122259}{10000000000} \pi_{12} + \frac{5172122857}{10000000000} \pi_{13} + x6 - y6 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

```
> res7 :=
(35803046/10^10)*pi[1]+(36776528/10^10)*pi[2]+(50517533/10^10)*p
i[3]+(161509365/10^10)*pi[4]+(219895716/10^10)*pi[5]+(282523316/
10^10)*pi[6]+(397329046/10^10)*pi[7]+(484719618/10^10)*pi[8]+(73
```

$6784396/10^{10}) * \pi_9 + (790405524/10^{10}) * \pi_{10} + (1414132199/10^{10})$
 $* \pi_{11} + (1120209867/10^{10}) * \pi_{12} + (4269393847/10^{10}) * \pi_{13} + x7 - y$
 $7 = (233/1000);$

$$\begin{aligned}
 res7 := & \frac{17901523}{5000000000} \pi_1 + \frac{2298533}{625000000} \pi_2 + \frac{50517533}{10000000000} \pi_3 + \frac{32301873}{2000000000} \pi_4 + \frac{54973929}{2500000000} \pi_5 \\
 & + \frac{70630829}{2500000000} \pi_6 + \frac{198664523}{5000000000} \pi_7 + \frac{242359809}{5000000000} \pi_8 + \frac{184196099}{2500000000} \pi_9 + \frac{197601381}{2500000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{1414132199}{10000000000} \pi_{11} + \frac{1120209867}{10000000000} \pi_{12} + \frac{4269393847}{10000000000} \pi_{13} + x7 - y7 = \frac{233}{1000}
 \end{aligned}$$

> res8 :=

$(81085379/10^{10}) * \pi_1 + (74735718/10^{10}) * \pi_2 + (92836046/10^{10}) * \pi_3$
 $+ (299075099/10^{10}) * \pi_4 + (369004973/10^{10}) * \pi_5 + (436819723/10^{10})$
 $* \pi_6 + (552909641/10^{10}) * \pi_7 + (627499805/10^{10}) * \pi_8 + (848355863/10^{10})$
 $* \pi_9 + (860723874/10^{10}) * \pi_{10} + (1349009323/10^{10}) * \pi_{11}$
 $+ (1032900111/10^{10}) * \pi_{12} + (3375044448/10^{10}) * \pi_{13} + x8 - y$
 $8 = (267/1000);$

$$\begin{aligned}
 res8 := & \frac{81085379}{10000000000} \pi_1 + \frac{37367859}{5000000000} \pi_2 + \frac{46418023}{5000000000} \pi_3 + \frac{299075099}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{369004973}{10000000000} \pi_5 + \frac{436819723}{10000000000} \pi_6 + \frac{552909641}{10000000000} \pi_7 + \frac{125499961}{2000000000} \pi_8 + \frac{848355863}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{430361937}{5000000000} \pi_{10} + \frac{1349009323}{10000000000} \pi_{11} + \frac{1032900111}{10000000000} \pi_{12} + \frac{105470139}{312500000} \pi_{13} + x8 - y8 = \frac{267}{1000}
 \end{aligned}$$

> res9 :=

$(156074956/10^{10}) * \pi_1 + (130430534/10^{10}) * \pi_2 + (148575699/10^{10})$
 $* \pi_3 + (484227523/10^{10}) * \pi_4 + (548720654/10^{10}) * \pi_5 + (603277617/10^{10})$
 $* \pi_6 + (697699867/10^{10}) * \pi_7 + (740944992/10^{10}) * \pi_8 + (906461577/10^{10})$
 $* \pi_9 + (872555176/10^{10}) * \pi_{10} + (1221013507/10^{10}) * \pi_{11}$
 $+ (904549045/10^{10}) * \pi_{12} + (2585468847/10^{10}) * \pi_{13} + x9 - y$
 $9 = (300/1000);$

$$\begin{aligned}
 res9 := & \frac{39018739}{2500000000} \pi_1 + \frac{65215267}{5000000000} \pi_2 + \frac{148575699}{10000000000} \pi_3 + \frac{484227523}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{274360327}{5000000000} \pi_5 + \frac{603277617}{10000000000} \pi_6 + \frac{697699867}{10000000000} \pi_7 + \frac{23154531}{312500000} \pi_8 + \frac{906461577}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{109069397}{1250000000} \pi_{10} + \frac{1221013507}{10000000000} \pi_{11} + \frac{180909809}{2000000000} \pi_{12} + \frac{2585468847}{10000000000} \pi_{13} + x9 - y9 = \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

> res10 :=

$(267882253/10^{10}) * \pi_1 + (204175575/10^{10}) * \pi_2 + (215043125/10^{10})$
 $* \pi_3 + (711538257/10^{10}) * \pi_4 + (746386741/10^{10}) * \pi_5 + (765660517/10^{10})$
 $* \pi_6 + (816357711/10^{10}) * \pi_7 + (813857972/10^{10}) * \pi_8 + (910433601/10^{10})$
 $* \pi_9 + (832633778/10^{10}) * \pi_{10} + (1052490586/10^{10}) * \pi_{11}$
 $+ (754393880/10^{10}) * \pi_{12} + (1909146002/10^{10}) * \pi_{13} + x10 - y$
 $10 = (333/1000);$

$$\begin{aligned}
 res10 := & \frac{267882253}{10000000000} \pi_1 + \frac{8167023}{400000000} \pi_2 + \frac{344069}{16000000} \pi_3 + \frac{711538257}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{746386741}{10000000000} \pi_5 + \frac{765660517}{10000000000} \pi_6 + \frac{816357711}{10000000000} \pi_7 + \frac{203464493}{2500000000} \pi_8 + \frac{910433601}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{416316889}{5000000000} \pi_{10} + \frac{526245293}{5000000000} \pi_{11} + \frac{18859847}{2500000000} \pi_{12} + \frac{954573001}{5000000000} \pi_{13} + x10 - y10 = \frac{333}{1000}
 \end{aligned}$$

> res11 :=
 (422858364/10^10)*pi[1]+(294639131/10^10)*pi[2]+(288173384/10^10)
)*pi[3]+(971575667/10^10)*pi[4]+(947296114/10^10)*pi[5]+(9085448
 36/10^10)*pi[6]+(897418891/10^10)*pi[7]+(840746907/10^10)*pi[8]+
 (865099539/10^10)*pi[9]+(751521801/10^10)*pi[10]+(863857791/10^1
 0)*pi[11]+(598489006/10^10)*pi[12]+(1349778568/10^10)*pi[13]+x11
 -y11 = (367/1000);

$$\begin{aligned}
 res11 := & \frac{105714591}{2500000000} \pi_1 + \frac{294639131}{10000000000} \pi_2 + \frac{36021673}{1250000000} \pi_3 + \frac{971575667}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{473648057}{5000000000} \pi_5 + \frac{227136209}{2500000000} \pi_6 + \frac{897418891}{10000000000} \pi_7 + \frac{840746907}{10000000000} \pi_8 + \frac{865099539}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{751521801}{10000000000} \pi_{10} + \frac{863857791}{10000000000} \pi_{11} + \frac{299244503}{5000000000} \pi_{12} + \frac{168722321}{1250000000} \pi_{13} + x11 - y11 = \\
 & \frac{367}{1000}
 \end{aligned}$$

> res12 :=
 (608066864/10^10)*pi[1]+(389997413/10^10)*pi[2]+(356844130/10^10
)*pi[3]+(1228499692/10^10)*pi[4]+(1121338704/10^10)*pi[5]+(10109
 80340/10^10)*pi[6]+(932477030/10^10)*pi[7]+(824530392/10^10)*pi[
 8]+(787585052/10^10)*pi[9]+(651657547/10^10)*pi[10]+(688379272/1
 0^10)*pi[11]+(461434429/10^10)*pi[12]+(938209134/10^10)*pi[13]+x
 12-y12 = (400/1000);

$$\begin{aligned}
 res12 := & \frac{38004179}{625000000} \pi_1 + \frac{389997413}{10000000000} \pi_2 + \frac{35684413}{10000000000} \pi_3 + \frac{307124923}{2500000000} \pi_4 + \frac{70083669}{625000000} \pi_5 \\
 & + \frac{50549017}{5000000000} \pi_6 + \frac{93247703}{10000000000} \pi_7 + \frac{103066299}{12500000000} \pi_8 + \frac{196896263}{2500000000} \pi_9 + \frac{651657547}{10000000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{86047409}{1250000000} \pi_{11} + \frac{461434429}{10000000000} \pi_{12} + \frac{469104567}{5000000000} \pi_{13} + x12 - y12 = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

> res13 :=
 (820629069/10^10)*pi[1]+(486198558/10^10)*pi[2]+(417929093/10^10
)*pi[3]+(1472572113/10^10)*pi[4]+(1263403150/10^10)*pi[5]+(10739
 20124/10^10)*pi[6]+(929155826/10^10)*pi[7]+(777179810/10^10)*pi[
 8]+(692873442/10^10)*pi[9]+(546632092/10^10)*pi[10]+(534014695/1
 0^10)*pi[11]+(346340833/10^10)*pi[12]+(639151195/10^10)*pi[13]+x
 13-y13 = 433/1000;

$$\begin{aligned}
 \text{res13} := & \frac{820629069}{10000000000} \pi_1 + \frac{243099279}{5000000000} \pi_2 + \frac{417929093}{10000000000} \pi_3 + \frac{1472572113}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{25268063}{2000000000} \pi_5 + \frac{268480031}{25000000000} \pi_6 + \frac{464577913}{50000000000} \pi_7 + \frac{77717981}{10000000000} \pi_8 + \frac{346436721}{50000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{136658023}{25000000000} \pi_{10} + \frac{106802939}{20000000000} \pi_{11} + \frac{346340833}{100000000000} \pi_{12} + \frac{127830239}{20000000000} \pi_{13} + x13 - y13 = \\
 & \frac{433}{1000}
 \end{aligned}$$

> res14 :=
 (1060067090/10^10)*pi[1]+(580631324/10^10)*pi[2]+(469694006/10^10)*pi[3]+(1698628580/10^10)*pi[4]+(1372062519/10^10)*pi[5]+(1100576121/10^10)*pi[6]+(894996537/10^10)*pi[7]+(708418422/10^10)*pi[8]+(591008842/10^10)*pi[9]+(444411181/10^10)*pi[10]+(402784951/10^10)*pi[11]+(252497866/10^10)*pi[12]+(424222563/10^10)*pi[13]+x14-y14 = 467/1000;

$$\begin{aligned}
 \text{res14} := & \frac{106006709}{10000000000} \pi_1 + \frac{145157831}{25000000000} \pi_2 + \frac{234847003}{50000000000} \pi_3 + \frac{84931429}{5000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{1372062519}{100000000000} \pi_5 + \frac{1100576121}{100000000000} \pi_6 + \frac{894996537}{100000000000} \pi_7 + \frac{354209211}{50000000000} \pi_8 + \frac{295504421}{50000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{444411181}{100000000000} \pi_{10} + \frac{402784951}{100000000000} \pi_{11} + \frac{126248933}{50000000000} \pi_{12} + \frac{424222563}{100000000000} \pi_{13} + x14 - y14 = \\
 & \frac{467}{1000}
 \end{aligned}$$

> res15 :=
 (1305087280/10^10)*pi[1]+(664167021/10^10)*pi[2]+(508015655/10^10)*pi[3]+(1887715601/10^10)*pi[4]+(1442235180/10^10)*pi[5]+(1096056863/10^10)*pi[6]+(841967488/10^10)*pi[7]+(632833526/10^10)*pi[8]+(496902227/10^10)*pi[9]+(356973464/10^10)*pi[10]+(302202431/10^10)*pi[11]+(183295040/10^10)*pi[12]+(282548218/10^10)*pi[13]+x15-y15 = 500/1000;

$$\begin{aligned}
 \text{res15} := & \frac{16313591}{1250000000} \pi_1 + \frac{664167021}{100000000000} \pi_2 + \frac{101603131}{20000000000} \pi_3 + \frac{1887715601}{100000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{72111759}{5000000000} \pi_5 + \frac{1096056863}{100000000000} \pi_6 + \frac{6577871}{78125000} \pi_7 + \frac{316416763}{50000000000} \pi_8 + \frac{496902227}{100000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{44621683}{12500000000} \pi_{10} + \frac{302202431}{100000000000} \pi_{11} + \frac{572797}{31250000} \pi_{12} + \frac{141274109}{50000000000} \pi_{13} + x15 - y15 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

> res16 :=
 (1556855321/10^10)*pi[1]+(737835142/10^10)*pi[2]+(534956643/10^10)*pi[3]+(2045776811/10^10)*pi[4]+(1481922592/10^10)*pi[5]+(1069145598/10^10)*pi[6]+(777882388/10^10)*pi[7]+(556070052/10^10)*pi

$[8] + (412259172/10^{10}) * \pi[9] + (283194399/10^{10}) * \pi[10] + (224800153/10^{10}) * \pi[11] + (131922123/10^{10}) * \pi[12] + (187379607/10^{10}) * \pi[13] + x16 - y16 = 533/1000;$

$$\begin{aligned} res16 := & \frac{1556855321}{10000000000} \pi_1 + \frac{368917571}{5000000000} \pi_2 + \frac{534956643}{10000000000} \pi_3 + \frac{2045776811}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{46310081}{312500000} \pi_5 + \frac{534572799}{5000000000} \pi_6 + \frac{194470597}{2500000000} \pi_7 + \frac{139017513}{2500000000} \pi_8 + \frac{103064793}{2500000000} \pi_9 \\ & + \frac{283194399}{10000000000} \pi_{10} + \frac{224800153}{10000000000} \pi_{11} + \frac{131922123}{10000000000} \pi_{12} + \frac{187379607}{10000000000} \pi_{13} + x16 - y16 = \\ & \frac{533}{1000} \end{aligned}$$

> res17 :=
 $(1818916106/10^{10}) * \pi[1] + (802748145/10^{10}) * \pi[2] + (552023939/10^{10}) * \pi[3] + (2177802883/10^{10}) * \pi[4] + (1496552907/10^{10}) * \pi[5] + (1025258841/10^{10}) * \pi[6] + (707036816/10^{10}) * \pi[7] + (480701482/10^{10}) * \pi[8] + (336863511/10^{10}) * \pi[9] + (221152911/10^{10}) * \pi[10] + (164862540/10^{10}) * \pi[11] + (93514080/10^{10}) * \pi[12] + (122565838/10^{10}) * \pi[13] + x17 - y17 = 567/1000;$

$$\begin{aligned} res17 := & \frac{909458053}{5000000000} \pi_1 + \frac{160549629}{2000000000} \pi_2 + \frac{552023939}{10000000000} \pi_3 + \frac{2177802883}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1496552907}{10000000000} \pi_5 + \frac{1025258841}{10000000000} \pi_6 + \frac{44189801}{625000000} \pi_7 + \frac{240350741}{5000000000} \pi_8 + \frac{336863511}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{221152911}{10000000000} \pi_{10} + \frac{8243127}{500000000} \pi_{11} + \frac{584463}{62500000} \pi_{12} + \frac{61282919}{5000000000} \pi_{13} + x17 - y17 = \frac{567}{1000} \end{aligned}$$

> res18 :=
 $(2072848196/10^{10}) * \pi[1] + (855235486/10^{10}) * \pi[2] + (559718394/10^{10}) * \pi[3] + (2278952667/10^{10}) * \pi[4] + (1490664231/10^{10}) * \pi[5] + (972754284/10^{10}) * \pi[6] + (638101947/10^{10}) * \pi[7] + (413769218/10^{10}) * \pi[8] + (275184622/10^{10}) * \pi[9] + (173019313/10^{10}) * \pi[10] + (121708800/10^{10}) * \pi[11] + (66795209/10^{10}) * \pi[12] + (81247632/10^{10}) * \pi[13] + x18 - y18 = 600/1000;$

$$\begin{aligned} res18 := & \frac{518212049}{2500000000} \pi_1 + \frac{427617743}{5000000000} \pi_2 + \frac{279859197}{5000000000} \pi_3 + \frac{2278952667}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1490664231}{10000000000} \pi_5 + \frac{243188571}{2500000000} \pi_6 + \frac{638101947}{10000000000} \pi_7 + \frac{206884609}{5000000000} \pi_8 + \frac{137592311}{5000000000} \pi_9 \\ & + \frac{173019313}{10000000000} \pi_{10} + \frac{19017}{1562500} \pi_{11} + \frac{66795209}{10000000000} \pi_{12} + \frac{5077977}{625000000} \pi_{13} + x18 - y18 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

> res19 :=
 $(2324339980/10^{10}) * \pi[1] + (897953611/10^{10}) * \pi[2] + (560194628/10^{10}) * \pi[3] + (2356843596/10^{10}) * \pi[4] + (1469697588/10^{10}) * \pi[5] + (9148$

$30715/10^{10} * \pi_1 + (571799692/10^{10}) * \pi_2 + (354047174/10^{10}) * \pi_3 +$
 $8] + (223920237/10^{10}) * \pi_4 + (134926301/10^{10}) * \pi_5 + (89789080/10^{10}) * \pi_6 +$
 $(47677683/10^{10}) * \pi_7 + (53979719/10^{10}) * \pi_8 + x_{19} -$
 $y_{19} = 633/1000;$

$$\begin{aligned}
 res_{19} := & \frac{116216999}{500000000} \pi_1 + \frac{897953611}{10000000000} \pi_2 + \frac{140048657}{2500000000} \pi_3 + \frac{589210899}{2500000000} \pi_4 \\
 & + \frac{367424397}{2500000000} \pi_5 + \frac{182966143}{2000000000} \pi_6 + \frac{142949923}{2500000000} \pi_7 + \frac{177023587}{5000000000} \pi_8 + \frac{223920237}{10000000000} \pi_9 \\
 & + \frac{134926301}{10000000000} \pi_{10} + \frac{2244727}{2500000000} \pi_{11} + \frac{47677683}{10000000000} \pi_{12} + \frac{53979719}{10000000000} \pi_{13} + x_{19} - y_{19} = \\
 & \frac{633}{1000}
 \end{aligned}$$

> res20 :=

$(2579481395/10^{10}) * \pi_1 + (932593392/10^{10}) * \pi_2 + (554609585/10^{10}) * \pi_3 +$
 $(2416207567/10^{10}) * \pi_4 + (1436424963/10^{10}) * \pi_5 + (852771725/10^{10}) * \pi_6 +$
 $(507915014/10^{10}) * \pi_7 + (300219207/10^{10}) * \pi_8 + (180624176/10^{10}) * \pi_9 +$
 $(104242665/10^{10}) * \pi_{10} + (65668128/10^{10}) * \pi_{11} + (33703907/10^{10}) * \pi_{12} +$
 $(35538270/10^{10}) * \pi_{13} + x_{20} -$
 $y_{20} = 667/1000;$

$$\begin{aligned}
 res_{20} := & \frac{515896279}{20000000000} \pi_1 + \frac{58287087}{6250000000} \pi_2 + \frac{110921917}{20000000000} \pi_3 + \frac{2416207567}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{1436424963}{10000000000} \pi_5 + \frac{34110869}{4000000000} \pi_6 + \frac{253957507}{5000000000} \pi_7 + \frac{300219207}{10000000000} \pi_8 + \frac{11289011}{6250000000} \pi_9 \\
 & + \frac{20848533}{20000000000} \pi_{10} + \frac{2052129}{3125000000} \pi_{11} + \frac{33703907}{10000000000} \pi_{12} + \frac{3553827}{10000000000} \pi_{13} + x_{20} - y_{20} = \frac{667}{1000}
 \end{aligned}$$

> obj := $(x_1 + y_1) * (143/1000) + (x_2 + y_2) * (172/1000) + (x_3 + y_3) * (143/1000) +$
 $(x_4 + y_4) * (114/1000) + (x_5 + y_5) * (1/10) + (x_6 + y_6) * (86/1000) + (x_7 + y_7) * (72/1000) +$
 $(x_8 + y_8) * (57/1000) + (x_9 + y_9) * (43/1000) + (x_{10} + y_{10}) * (29/1000) + (x_{11} + y_{11}) * (14/1000) +$
 $(x_{12} + y_{12}) * (7/1000) + (x_{13} + y_{13}) * (6/1000) + (x_{14} + y_{14}) * (4/1000) + (x_{15} + y_{15}) * (3/1000) +$
 $(x_{16} + y_{16}) * (1/1000) + (x_{17} + y_{17}) * (1/1000) + (x_{18} + y_{18}) * (1/1000) + (x_{19} + y_{19}) * (1/1000) +$
 $(x_{20} + y_{20}) * (1/1000);$

$$\begin{aligned}
 obj := & \frac{1}{1000} x_{20} + \frac{1}{1000} y_{20} + \frac{1}{1000} y_{18} + \frac{1}{1000} x_{18} + \frac{1}{1000} x_{19} + \frac{1}{1000} y_{19} + \frac{143}{1000} y_1 \\
 & + \frac{143}{1000} x_1 + \frac{143}{1000} x_3 + \frac{143}{1000} y_3 + \frac{57}{500} x_4 + \frac{57}{500} y_4 + \frac{1}{10} x_5 + \frac{1}{10} y_5 + \frac{43}{250} y_2 + \frac{43}{250} x_2 + \frac{43}{500} x_6 \\
 & + \frac{43}{500} y_6 + \frac{9}{125} x_7 + \frac{9}{125} y_7 + \frac{57}{1000} x_8 + \frac{57}{1000} y_8 + \frac{43}{1000} x_9 + \frac{43}{1000} y_9 + \frac{29}{1000} x_{10} + \frac{29}{1000} y_{10} \\
 & + \frac{7}{500} x_{11} + \frac{7}{500} y_{11} + \frac{7}{1000} x_{12} + \frac{7}{1000} y_{12} + \frac{3}{500} x_{13} + \frac{3}{500} y_{13} + \frac{1}{250} x_{14} + \frac{1}{250} y_{14} \\
 & + \frac{3}{1000} x_{15} + \frac{3}{1000} y_{15} + \frac{1}{1000} x_{16} + \frac{1}{1000} y_{16} + \frac{1}{1000} x_{17} + \frac{1}{1000} y_{17}
 \end{aligned}$$

```
> dese:=(x1-y1)*(143/1000)+(x2-y2)*(172/1000)+(x3-y3)*(143/1000)+(
x4-y4)*(114/1000)+(x5-y5)*(1/10)+(x6-y6)*(86/1000)+(x7-y7)*(72/1
000)+(x8-y8)*(57/1000)+(x9-y9)*(43/1000)+(x10-y10)*(29/1000)+(x1
1-y11)*(14/1000)+(x12-y12)*(7/1000)+(x13-y13)*(6/1000)+(x14-y14)
*(4/1000)+(x15-y15)*(3/1000)+(x16-y16)*(1/1000)+(x17-y17)*(1/100
0)+(x18-y18)*(1/1000)+(x19-y19)*(1/1000)+(x20-y20)*(1/1000);
```

$$\begin{aligned} dese := & \frac{1}{1000}x_{20} - \frac{1}{1000}y_{20} - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{18} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{19} - \frac{143}{1000}y_1 \\ & + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{143}{1000}x_3 - \frac{143}{1000}y_3 + \frac{57}{500}x_4 - \frac{57}{500}y_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}y_5 - \frac{43}{250}y_2 + \frac{43}{250}x_2 + \frac{43}{500}x_6 \\ & - \frac{43}{500}y_6 + \frac{9}{125}x_7 - \frac{9}{125}y_7 + \frac{57}{1000}x_8 - \frac{57}{1000}y_8 + \frac{43}{1000}x_9 - \frac{43}{1000}y_9 + \frac{29}{1000}x_{10} - \frac{29}{1000}y_{10} \\ & + \frac{7}{500}x_{11} - \frac{7}{500}y_{11} + \frac{7}{1000}x_{12} - \frac{7}{1000}y_{12} + \frac{3}{500}x_{13} - \frac{3}{500}y_{13} + \frac{1}{250}x_{14} - \frac{1}{250}y_{14} \\ & + \frac{3}{1000}x_{15} - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{1000}y_{17} \end{aligned}$$

```
> 'r1'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-
4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,
pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res1);
```

$$r1 = \left(\frac{100000000001}{100000000000}a - y_1 + x_1 - \frac{128877724963}{100000000000}b = \frac{33}{1000} \right)$$

```
> r1 :=
(100000000001/100000000000*a-128877724963/100000000000*b+x1-y1 =
33/1000);
```

$$r1 := \frac{100000000001}{100000000000}a - y_1 + x_1 - \frac{128877724963}{100000000000}b = \frac{33}{1000}$$

```
> 'r2'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-
4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,
pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res2);
```

$$r2 = \left(\frac{24999999999}{25000000000}a - \frac{25475957751}{20000000000}b + x_2 - y_2 = \frac{67}{1000} \right)$$

```
> r2 := (24999999999/25000000000*a-25475957751/20000000000*b+x2-y2 =
67/1000);
```

$$r2 := \frac{24999999999}{25000000000}a - \frac{25475957751}{20000000000}b + x_2 - y_2 = \frac{67}{1000}$$

```
> 'r3'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-
4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,
pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res3);
```

$$r3 = \left(\frac{49999999999}{50000000000}a - \frac{25093732029}{20000000000}b + x_3 - y_3 = \frac{1}{10} \right)$$

```
> r3 := (49999999999/50000000000*a-25093732029/20000000000*b+x3-y3 =
```

1/10);

$$r3 := \frac{4999999999}{5000000000}a - \frac{25093732029}{2000000000}b + x3 - y3 = \frac{1}{10}$$

> 'r4'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res4);

$$r4 = \left(\frac{9999999997}{10000000000}a - \frac{122935948789}{10000000000}b + x4 - y4 = \frac{133}{1000} \right)$$

> r4 := (9999999997/10000000000*a-122935948789/10000000000*b+x4-y4 = 133/1000);

$$r4 := \frac{9999999997}{10000000000}a - \frac{122935948789}{10000000000}b + x4 - y4 = \frac{133}{1000}$$

> 'r5'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res5);

$$r5 = \left(a - \frac{5972759419}{5000000000}b + x5 - y5 = \frac{167}{1000} \right)$$

> r5 := (a-5972759419/5000000000*b+x5-y5 = 167/1000);

$$r5 := a - \frac{5972759419}{5000000000}b + x5 - y5 = \frac{167}{1000}$$

> 'r6'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res6);

$$r6 = \left(\frac{10000000001}{10000000000}a - \frac{23003126349}{20000000000}b + x6 - y6 = \frac{1}{5} \right)$$

> r6 := (10000000001/10000000000*a-23003126349/20000000000*b+x6-y6 = 1/5);

$$r6 := \frac{10000000001}{10000000000}a - \frac{23003126349}{20000000000}b + x6 - y6 = \frac{1}{5}$$

> 'r7'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res7);

$$r7 = \left(\frac{10000000001}{10000000000}a - \frac{109395832311}{10000000000}b + x7 - y7 = \frac{233}{1000} \right)$$

> r7 :=
(10000000001/10000000000*a-109395832311/10000000000*b+x7-y7 = 233/1000);

$$r7 := \frac{10000000001}{10000000000}a - \frac{109395832311}{10000000000}b + x7 - y7 = \frac{233}{1000}$$

> 'r8'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res8);

$$r8 = \left(\frac{10000000003}{10000000000} a - \frac{20482719539}{20000000000} b + x8 - y8 = \frac{267}{1000} \right)$$

```
> r8 := (10000000003/10000000000*a-20482719539/20000000000*b+x8-y8 = 267/1000);
```

$$r8 := \frac{10000000003}{10000000000} a - \frac{20482719539}{20000000000} b + x8 - y8 = \frac{267}{1000}$$

```
> 'r9'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res9);
```

$$r9 = \left(\frac{4999999997}{50000000000} a - \frac{94754839271}{100000000000} b + x9 - y9 = \frac{3}{10} \right)$$

```
> r9 := (4999999997/50000000000*a-94754839271/100000000000*b+x9-y9 = 3/10);
```

$$r9 := \frac{4999999997}{50000000000} a - \frac{94754839271}{100000000000} b + x9 - y9 = \frac{3}{10}$$

```
> 'r10'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res10);
```

$$r10 = \left(\frac{4999999999}{50000000000} a - \frac{86688041587}{100000000000} b + x10 - y10 = \frac{333}{1000} \right)$$

```
> r10 := (4999999999/50000000000*a-86688041587/100000000000*b+x10-y10 = 333/1000);
```

$$r10 := \frac{4999999999}{50000000000} a - \frac{86688041587}{100000000000} b + x10 - y10 = \frac{333}{1000}$$

```
> 'r11'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res11);
```

$$r11 = \left(\frac{9999999999}{100000000000} a - \frac{78491155543}{100000000000} b + x11 - y11 = \frac{367}{1000} \right)$$

```
> r11 := (9999999999/100000000000*a-78491155543/100000000000*b+x11-y11 = 367/1000);
```

$$r11 := \frac{9999999999}{100000000000} a - \frac{78491155543}{100000000000} b + x11 - y11 = \frac{367}{1000}$$

```
> 'r12'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res12);
```

$$r12 = \left(\frac{9999999999}{100000000000} a - \frac{35539847787}{50000000000} b + x12 - y12 = \frac{2}{5} \right)$$

```
> r12 := (9999999999/100000000000*a-35539847787/50000000000*b+x12-y12 = 2/5);
```

$$r12 := \frac{9999999999}{10000000000}a - \frac{35539847787}{5000000000}b + x12 - y12 = \frac{2}{5}$$

> 'r13'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res13);

$$r13 = \left(a - \frac{32230283373}{5000000000}b + x13 - y13 = \frac{433}{1000} \right)$$

> r13 := (a-32230283373/5000000000*b+x13-y13 = 433/1000);

$$r13 := a - \frac{32230283373}{5000000000}b + x13 - y13 = \frac{433}{1000}$$

> 'r14'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res14);

$$r14 = \left(\frac{50000000001}{50000000000}a - \frac{14639928023}{25000000000}b + x14 - y14 = \frac{467}{1000} \right)$$

> r14 := (50000000001/50000000000*a-14639928023/25000000000*b+x14-y14 = 467/1000);

$$r14 := \frac{50000000001}{50000000000}a - \frac{14639928023}{25000000000}b + x14 - y14 = \frac{467}{1000}$$

> 'r15'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res15);

$$r15 = \left(\frac{49999999997}{50000000000}a - \frac{53691037131}{100000000000}b + x15 - y15 = \frac{1}{2} \right)$$

> r15 :=

(49999999997/50000000000*a-53691037131/100000000000*b+x15-y15 = 1/2);

$$r15 := \frac{49999999997}{50000000000}a - \frac{53691037131}{100000000000}b + x15 - y15 = \frac{1}{2}$$

> 'r16'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res16);

$$r16 = \left(\frac{100000000001}{100000000000}a - \frac{24786402523}{50000000000}b + x16 - y16 = \frac{533}{1000} \right)$$

> r16 :=

(100000000001/100000000000*a-24786402523/50000000000*b+x16-y16 = 533/1000);

$$r16 := \frac{100000000001}{100000000000}a - \frac{24786402523}{50000000000}b + x16 - y16 = \frac{533}{1000}$$

> 'r17'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res17);

$$r17 = \left(\frac{9999999999}{10000000000} a - \frac{45993196397}{10000000000} b + x17 - y17 = \frac{567}{1000} \right)$$

> r17 :=

(9999999999/10000000000*a-45993196397/10000000000*b+x17-y17 = 567/1000);

$$r17 := \frac{9999999999}{10000000000} a - \frac{45993196397}{10000000000} b + x17 - y17 = \frac{567}{1000}$$

> 'r18'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res18);

$$r18 = \left(\frac{9999999999}{10000000000} a - \frac{21524206251}{5000000000} b + x18 - y18 = \frac{3}{5} \right)$$

> r18 :=

(9999999999/10000000000*a-21524206251/5000000000*b+x18-y18 = 3/5);

$$r18 := \frac{9999999999}{10000000000} a - \frac{21524206251}{5000000000} b + x18 - y18 = \frac{3}{5}$$

> 'r19'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res19);

$$r19 = \left(\frac{2500000001}{2500000000} a - \frac{20263373251}{5000000000} b + x19 - y19 = \frac{633}{1000} \right)$$

> r19 := (2500000001/2500000000*a-20263373251/5000000000*b+x19-y19 = 633/1000);

$$r19 := \frac{2500000001}{2500000000} a - \frac{20263373251}{5000000000} b + x19 - y19 = \frac{633}{1000}$$

> 'r20'=subs(pi[1]=a-b,pi[2]=a-2*b,pi[3]=a-3*b,pi[2]=a-2*b,pi[4]=a-4*b,pi[5]=a-5*b,pi[6]=a-6*b,pi[7]=a-7*b,pi[8]=a-8*b,pi[9]=a-9*b,pi[10]=a-10*b,pi[11]=a-11*b,pi[12]=a-12*b,pi[13]=a-13*b,res20);

$$r20 = \left(\frac{4999999997}{5000000000} a - \frac{38286079157}{10000000000} b + x20 - y20 = \frac{667}{1000} \right)$$

> r20 :=

(4999999997/5000000000*a-38286079157/10000000000*b+x20-y20 = 667/1000);

$$r20 := \frac{4999999997}{5000000000} a - \frac{38286079157}{10000000000} b + x20 - y20 = \frac{667}{1000}$$

> obj:=(x1+y1)*(143/1000)+(x2+y2)*(172/1000)+(x3+y3)*(143/1000)+(x4+y4)*(114/1000)+(x5+y5)*(1/10)+(x6+y6)*(86/1000)+(x7+y7)*(72/1000)+(x8+y8)*(57/1000)+(x9+y9)*(43/1000)+(x10+y10)*(29/1000)+(x11+y11)*(14/1000)+(x12+y12)*(7/1000)+(x13+y13)*(6/1000)+(x14+y14)*(4/1000)+(x15+y15)*(3/1000)+(x16+y16)*(1/1000)+(x17+y17)*(1/1000)+(x18+y18)*(1/1000)+(x19+y19)*(1/1000)+(x20+y20)*(1/1000);

$$\begin{aligned}
obj := & \frac{1}{1000}x_{20} + \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{18} + \frac{1}{1000}x_{19} + \frac{1}{1000}y_{19} + \frac{143}{1000}y_1 \\
& + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{143}{1000}x_3 + \frac{143}{1000}y_3 + \frac{57}{500}x_4 + \frac{57}{500}y_4 + \frac{1}{10}x_5 + \frac{1}{10}y_5 + \frac{43}{250}y_2 + \frac{43}{250}x_2 + \frac{43}{500}x_6 \\
& + \frac{43}{500}y_6 + \frac{9}{125}x_7 + \frac{9}{125}y_7 + \frac{57}{1000}x_8 + \frac{57}{1000}y_8 + \frac{43}{1000}x_9 + \frac{43}{1000}y_9 + \frac{29}{1000}x_{10} + \frac{29}{1000}y_{10} \\
& + \frac{7}{500}x_{11} + \frac{7}{500}y_{11} + \frac{7}{1000}x_{12} + \frac{7}{1000}y_{12} + \frac{3}{500}x_{13} + \frac{3}{500}y_{13} + \frac{1}{250}x_{14} + \frac{1}{250}y_{14} \\
& + \frac{3}{1000}x_{15} + \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{1000}x_{16} + \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{1}{1000}x_{17} + \frac{1}{1000}y_{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{dese} := & (x_1 - y_1) * (143/1000) + (x_2 - y_2) * (172/1000) + (x_3 - y_3) * (143/1000) + (x_4 - y_4) * (114/1000) \\
& + (x_5 - y_5) * (1/10) + (x_6 - y_6) * (86/1000) + (x_7 - y_7) * (72/1000) + (x_8 - y_8) * (57/1000) + (x_9 - y_9) * (43/1000) \\
& + (x_{10} - y_{10}) * (29/1000) + (x_{11} - y_{11}) * (14/1000) + (x_{12} - y_{12}) * (7/1000) + (x_{13} - y_{13}) * (6/1000) + (x_{14} - y_{14}) * (4/1000) \\
& + (x_{15} - y_{15}) * (3/1000) + (x_{16} - y_{16}) * (1/1000) + (x_{17} - y_{17}) * (1/1000) + (x_{18} - y_{18}) * (1/1000) + (x_{19} - y_{19}) * (1/1000) + (x_{20} - y_{20}) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dese} := & \frac{1}{1000}x_{20} - \frac{1}{1000}y_{20} - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{18} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{19} - \frac{143}{1000}y_1 \\
& + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{143}{1000}x_3 - \frac{143}{1000}y_3 + \frac{57}{500}x_4 - \frac{57}{500}y_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}y_5 - \frac{43}{250}y_2 + \frac{43}{250}x_2 + \frac{43}{500}x_6 \\
& - \frac{43}{500}y_6 + \frac{9}{125}x_7 - \frac{9}{125}y_7 + \frac{57}{1000}x_8 - \frac{57}{1000}y_8 + \frac{43}{1000}x_9 - \frac{43}{1000}y_9 + \frac{29}{1000}x_{10} - \frac{29}{1000}y_{10} \\
& + \frac{7}{500}x_{11} - \frac{7}{500}y_{11} + \frac{7}{1000}x_{12} - \frac{7}{1000}y_{12} + \frac{3}{500}x_{13} - \frac{3}{500}y_{13} + \frac{1}{250}x_{14} - \frac{1}{250}y_{14} \\
& + \frac{3}{1000}x_{15} - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{1000}y_{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{r33} := & (x_1 - y_1) * (143/1000) + (x_2 - y_2) * (172/1000) + (x_3 - y_3) * (143/1000) + (x_4 - y_4) * (114/1000) \\
& + (x_5 - y_5) * (1/10) + (x_6 - y_6) * (86/1000) + (x_7 - y_7) * (72/1000) + (x_8 - y_8) * (57/1000) + (x_9 - y_9) * (43/1000) \\
& + (x_{10} - y_{10}) * (29/1000) + (x_{11} - y_{11}) * (14/1000) + (x_{12} - y_{12}) * (7/1000) + (x_{13} - y_{13}) * (6/1000) + (x_{14} - y_{14}) * (4/1000) \\
& + (x_{15} - y_{15}) * (3/1000) + (x_{16} - y_{16}) * (1/1000) + (x_{17} - y_{17}) * (1/1000) + (x_{18} - y_{18}) * (1/1000) + (x_{19} - y_{19}) * (1/1000) + (x_{20} - y_{20}) * (1/1000) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{r33} := & \frac{1}{1000}x_{20} - \frac{1}{1000}y_{20} - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{18} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{19} - \frac{143}{1000}y_1 \\
& + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{143}{1000}x_3 - \frac{143}{1000}y_3 + \frac{57}{500}x_4 - \frac{57}{500}y_4 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}y_5 - \frac{43}{250}y_2 + \frac{43}{250}x_2 + \frac{43}{500}x_6 \\
& - \frac{43}{500}y_6 + \frac{9}{125}x_7 - \frac{9}{125}y_7 + \frac{57}{1000}x_8 - \frac{57}{1000}y_8 + \frac{43}{1000}x_9 - \frac{43}{1000}y_9 + \frac{29}{1000}x_{10} - \frac{29}{1000}y_{10} \\
& + \frac{7}{500}x_{11} - \frac{7}{500}y_{11} + \frac{7}{1000}x_{12} - \frac{7}{1000}y_{12} + \frac{3}{500}x_{13} - \frac{3}{500}y_{13} + \frac{1}{250}x_{14} - \frac{1}{250}y_{14}
\end{aligned}$$

```

+  $\frac{3}{1000}x_{15} - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{1000}y_{17} = 0$ 
> soleq:=minimize(obj,{r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,r12,r13,
r14,r15,r16,r17,r18,r19,r20,r33},NONNEGATIVE);
soleq:={x1=0,y4=0,x18=0,x19=0,x15=0,x16=0,x14=0,x13=0,x12=0,x11=0,
y9=0,y8=0,y7=0,y6=0,x2=0,y5=0,x17=0,x20=0,x9=0,x10=0,
y20= $\frac{658383718959612592601497}{112327556755506116037395000}$ ,x7= $\frac{6666409922825034362395027}{224655113511012232074790000}$ ,
y13= $\frac{7529545482637181240364047}{112327556755506116037395000}$ ,y12= $\frac{12653960174546973240444047}{224655113511012232074790000}$ ,
y19= $\frac{2815628985560374338066637}{112327556755506116037395000}$ ,y11= $\frac{9073493312932756533545263}{224655113511012232074790000}$ ,
y17= $\frac{12349618246129526391813499}{224655113511012232074790000}$ ,y2= $\frac{493639707087773133228133}{28081889188876529009348750}$ ,
a= $\frac{20795491525622669000000}{22465511351101223207479}$ ,y15= $\frac{399565269419048343722931}{5616377837775305801869750}$ ,
y18= $\frac{9304262483884403141931999}{224655113511012232074790000}$ ,x6= $\frac{7589145462443473680465001}{224655113511012232074790000}$ ,
y14= $\frac{1010880370995164845855946}{14040944594438264504674375}$ ,y16= $\frac{14677936471292595578913963}{224655113511012232074790000}$ ,
x8= $\frac{3947306729752803581178293}{224655113511012232074790000}$ ,y10= $\frac{91051767164185333265403}{4493102270220244641495800}$ ,
x5= $\frac{676112065660182555000101}{22465511351101223207479000}$ ,x3= $\frac{78693997216839976971051}{28081889188876529009348750}$ ,
x4= $\frac{4286172044628428746686051}{224655113511012232074790000}$ ,b= $\frac{1483390000548166000000}{22465511351101223207479}$ ,
y1= $\frac{9365368027647820885086741}{224655113511012232074790000}$ ,y3=0}
> solequ:=evalf(soleq);
solequ:={x1=0,y4=0,x18=0,x19=0,x15=0,x16=0,x14=0,x13=0,x12=0,x11=0,
y9=0,y8=0,y7=0,y6=0,x2=0,y5=0,x17=0,x20=0,x9=0,x10=0,
y20=.005861284069,x7=.02967397367,y13=.06703204183,y12=.05632616136,
y19=.02506623545,y11=.04038854567,y17=.05497145404,y2=.01757857898,
a=.9256629507,y15=.07114287553,y18=.04141576098,x6=.03378131636,
y16=.06533542122,x8=.01757051806,y3=0,y14=.07199518267,y10=.02026478849,
x5=.03009555648,x3=.002802304243,x4=.01907889822,b=.06602965663,
y1=.04168775810}
> 'obj'=subs(solequ,obj);

```

$obj = .02325703679$

> 'dese'=subs(solequ,dese);

$dese = .44 \cdot 10^{-12}$

> p1:=a-b;

$p1 := a - b$

> 'pi1'=subs(solequ,p1);

$\pi1 = .8596332941$

> p2:=a-b*2;

$p2 := a - 2 b$

> 'pi2'=subs(solequ,p2);

$\pi2 = .8020171535$

> p3:=a-b*3;

$p3 := a - 3 b$

> 'pi3'=subs(solequ,p3);

$\pi3 = .7275739808$

> p4:=a-b*4;

$p4 := a - 4 b$

> 'pi4'=subs(solequ,p4);

$\pi4 = .6615443242$

> p5:=a-b*5;

$p5 := a - 5 b$

> 'pi5'=subs(solequ,p5);

$\pi5 = .5955146675$

> p6:=a-b*6;

$p6 := a - 6 b$

> 'pi6'=subs(solequ,p6);

$\pi6 = .5333966024$

> p7:=a-b*7;

$p7 := a - 7 b$

> 'pi7'=subs(solequ,p7);

$\pi7 = .4634553543$

> p8:=a-b*8;

$p8 := a - 8 b$

> 'pi8'=subs(solequ,p8);

$\pi8 = .3990863269$

> p9:=a-b*9;

$p9 := a - 9 b$

> 'pi9'=subs(solequ,p9);

$\pi9 = .3313960410$

> p10:=a-b*10;

$p10 := a - 10 b$

```

> 'pi10'=subs(solequ,p10);
                                      $\pi_{10} = .2653663844$ 
> p11:=a-b*11;
                                      $p_{11} := a - 11 b$ 
> 'pi11'=subs(solequ,p11);
                                      $\pi_{11} = .1993367278$ 
> p12:=a-b*12;
                                      $p_{12} := a - 12 b$ 
> 'pi12'=subs(solequ,p12);
                                      $\pi_{12} = .1333070711$ 
> p13:=a-b*13;
                                      $p_{13} := a - 13 b$ 
> 'pi13'=subs(solequ,p13);
                                      $\pi_{13} = .0672774145$ 
>
> 'obj'=subs(solequ,obj);
                                      $obj = .02325703679$ 
>

```

pro-lin-Norberg2

Programa lineal para la distribución lambda de Noruega 75 con las reglas de Norberg 2

```
> restart;
```

```
> with(simplex):
```

```
Warning, new definition for maximize
```

```
Warning, new definition for minimize
```

```
> res1:=(136/10^10)*pi[1]+(444/10^10)*pi[2]+(2501/10^10)*pi[3]+(74
20/10^10)*pi[4]+(46711/10^10)*pi[5]+(120503/10^10)*pi[6]+(884559
/10^10)*pi[7]+(186537/10^10)*pi[8]+(17030092/10^10)*pi[9]+(26458
818/10^10)*pi[10]+(323107651/10^10)*pi[11]+(312619114/10^10)*pi[
12]+(9317856718/10^10)*pi[13]+x1-y1 = (33/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res1} := & \frac{17}{12500000000} \pi_1 + \frac{111}{25000000000} \pi_2 + \frac{2501}{100000000000} \pi_3 + \frac{371}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{46711}{100000000000} \pi_5 + \frac{120503}{100000000000} \pi_6 + \frac{884559}{100000000000} \pi_7 + \frac{186537}{100000000000} \pi_8 + \frac{4257523}{25000000000} \pi_9 \\ & + \frac{13229409}{50000000000} \pi_{10} + \frac{323107651}{100000000000} \pi_{11} + \frac{156309557}{50000000000} \pi_{12} + \frac{4658928359}{50000000000} \pi_{13} + x1 - y1 = \frac{33}{1000} \end{aligned}$$

```
> res2 :=
```

```
(13938/10^10)*pi[1]+(35782/10^10)*pi[2]+(115276/10^10)*pi[3]+(27
8858/10^10)*pi[4]+(965876/10^10)*pi[5]+(2123967/10^10)*pi[6]+(82
49289/10^10)*pi[7]+(15526951/10^10)*pi[8]+(72279110/10^10)*pi[9]
+(104792968/10^10)*pi[10]+(634803051/10^10)*pi[11]+(593664768/10
^10)*pi[12]+(8567150165/10^10)*pi[13]+x2-y2 = (67/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res2} := & \frac{6969}{50000000000} \pi_1 + \frac{17891}{50000000000} \pi_2 + \frac{28819}{25000000000} \pi_3 + \frac{139429}{50000000000} \pi_4 + \frac{241469}{25000000000} \pi_5 \\ & + \frac{2123967}{100000000000} \pi_6 + \frac{8249289}{100000000000} \pi_7 + \frac{15526951}{100000000000} \pi_8 + \frac{7227911}{100000000000} \pi_9 + \frac{13099121}{12500000000} \pi_{10} \\ & + \frac{634803051}{100000000000} \pi_{11} + \frac{2319003}{39062500} \pi_{12} + \frac{1713430033}{20000000000} \pi_{13} + x2 - y2 = \frac{67}{1000} \end{aligned}$$

```
> res3 :=
```

```
(208160/10^10)*pi[1]+(445921/10^10)*pi[2]+(1073589/10^10)*pi[3]+
(2213024/10^10)*pi[4]+(5600749/10^10)*pi[5]+(10782692/10^10)*pi[
6]+(29781319/10^10)*pi[7]+(50710947/10^10)*pi[8]+(163053476/10^1
0)*pi[9]+(221666498/10^10)*pi[10]+(905420950/10^10)*pi[11]+(8192
58752/10^10)*pi[12]+(7789783927/10^10)*pi[13]+x3-y3 =
(100/1000);
```

$$\text{res3} := \frac{1301}{62500000} \pi_1 + \frac{445921}{100000000000} \pi_2 + \frac{1073589}{100000000000} \pi_3 + \frac{69157}{312500000} \pi_4 + \frac{5600749}{100000000000} \pi_5$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2695673}{2500000000} \pi_6 + \frac{29781319}{10000000000} \pi_7 + \frac{50710947}{10000000000} \pi_8 + \frac{40763369}{2500000000} \pi_9 + \frac{110833249}{5000000000} \pi_{10} \\
& + \frac{18108419}{200000000} \pi_{11} + \frac{6400459}{78125000} \pi_{12} + \frac{7789783927}{10000000000} \pi_{13} + x^3 - y^3 = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

> res4 :=

$$\begin{aligned}
& (1477497/10^{10}) * \pi_1 + (2729879/10^{10}) * \pi_2 + (5386478/10^{10}) * \pi_3 + (9699507/10^{10}) * \pi_4 + (19823906/10^{10}) * \pi_5 + (33957757/10^{10}) * \\
& \pi_6 + (74249413/10^{10}) * \pi_7 + (115314566/10^{10}) * \pi_8 + (286596613/10^{10}) * \pi_9 + (366230225/10^{10}) * \pi_{10} + (1131341615/10^{10}) * \pi_{11} + \\
& (990450082/10^{10}) * \pi_{12} + (6962742466/10^{10}) * \pi_{13} + x^4 - y^4 = \\
& (133/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res4 := & \frac{1477497}{10000000000} \pi_1 + \frac{2729879}{10000000000} \pi_2 + \frac{2693239}{5000000000} \pi_3 + \frac{9699507}{10000000000} \pi_4 \\
& + \frac{9911953}{5000000000} \pi_5 + \frac{33957757}{10000000000} \pi_6 + \frac{74249413}{10000000000} \pi_7 + \frac{57657283}{5000000000} \pi_8 + \frac{286596613}{10000000000} \pi_9 \\
& + \frac{14649209}{4000000000} \pi_{10} + \frac{226268323}{20000000000} \pi_{11} + \frac{495225041}{50000000000} \pi_{12} + \frac{3481371233}{50000000000} \pi_{13} + x^4 - y^4 = \frac{133}{1000}
\end{aligned}$$

> res5 :=

$$\begin{aligned}
& (7128338/10^{10}) * \pi_1 + (11578733/10^{10}) * \pi_2 + (19546115/10^{10}) * \pi_3 + (31201438/10^{10}) * \pi_4 + (54002662/10^{10}) * \pi_5 + (83091447/10^{10}) * \\
& \pi_6 + (151523008/10^{10}) * \pi_7 + (215565294/10^{10}) * \pi_8 + (437837268/10^{10}) * \pi_9 + (526134661/10^{10}) * \pi_{10} + (1301519041/10^{10}) * \pi_{11} + (1101344906/10^{10}) * \pi_{12} + (6059527089/10^{10}) * \pi_{13} + x^5 - y^5 = \\
& (167/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res5 := & \frac{3564169}{50000000000} \pi_1 + \frac{11578733}{100000000000} \pi_2 + \frac{3909223}{20000000000} \pi_3 + \frac{15600719}{50000000000} \pi_4 \\
& + \frac{27001331}{50000000000} \pi_5 + \frac{83091447}{100000000000} \pi_6 + \frac{2367547}{156250000} \pi_7 + \frac{107782647}{50000000000} \pi_8 + \frac{109459317}{25000000000} \pi_9 \\
& + \frac{526134661}{100000000000} \pi_{10} + \frac{1301519041}{100000000000} \pi_{11} + \frac{550672453}{50000000000} \pi_{12} + \frac{6059527089}{100000000000} \pi_{13} + x^5 - y^5 = \\
& \frac{167}{1000}
\end{aligned}$$

> res6 :=

$$\begin{aligned}
& (24550015/10^{10}) * \pi_1 + (35775095/10^{10}) * \pi_2 + (53389491/10^{10}) * \pi_3 + (76863574/10^{10}) * \pi_4 + (11680702/10^{10}) * \pi_5 + (163577873/10^{10}) * \\
& \pi_6 + (258993276/10^{10}) * \pi_7 + (340365961/10^{10}) * \pi_8 + (590491564/10^{10}) * \pi_9 + (669831818/10^{10}) * \pi_{10} + (1390218085/10^{10}) * \pi_{11} + (1138214303/10^{10}) * \pi_{12} + (5140921921/10^{10}) * \pi_{13} + x^6 - y^6 = \\
& (200/1000);
\end{aligned}$$

$$res6 := \frac{4910003}{20000000000} \pi_1 + \frac{7155019}{20000000000} \pi_2 + \frac{53389491}{100000000000} \pi_3 + \frac{38431787}{50000000000} \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5840351}{5000000000} \pi_5 + \frac{163577873}{10000000000} \pi_6 + \frac{64748319}{2500000000} \pi_7 + \frac{340365961}{10000000000} \pi_8 + \frac{147622891}{2500000000} \pi_9 \\
& + \frac{334915909}{5000000000} \pi_{10} + \frac{278043617}{2000000000} \pi_{11} + \frac{1138214303}{10000000000} \pi_{12} + \frac{5140921921}{10000000000} \pi_{13} + x^6 - y^6 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

> res7 :=

$$\begin{aligned}
& (68141183/10^{10}) * \pi_1 + (90172584/10^{10}) * \pi_2 + (121148309/10^{10}) * \\
& \pi_3 + (158952447/10^{10}) * \pi_4 + (216414457/10^{10}) * \pi_5 + (278050577/ \\
& /10^{10}) * \pi_6 + (391038781/10^{10}) * \pi_7 + (477045841/10^{10}) * \pi_8 + (7 \\
& 25120089/10^{10}) * \pi_9 + (777892313/10^{10}) * \pi_{10} + (1391744528/10^{10} \\
&) * \pi_{11} + (1102475403/10^{10}) * \pi_{12} + (4201803485/10^{10}) * \pi_{13} + x^7 - \\
& y^7 = (233/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res7 := & \frac{68141183}{10000000000} \pi_1 + \frac{11271573}{1250000000} \pi_2 + \frac{121148309}{10000000000} \pi_3 + \frac{158952447}{10000000000} \pi_4 \\
& + \frac{216414457}{10000000000} \pi_5 + \frac{278050577}{10000000000} \pi_6 + \frac{391038781}{10000000000} \pi_7 + \frac{477045841}{10000000000} \pi_8 \\
& + \frac{725120089}{10000000000} \pi_9 + \frac{777892313}{10000000000} \pi_{10} + \frac{86984033}{625000000} \pi_{11} + \frac{1102475403}{10000000000} \pi_{12} \\
& + \frac{840360697}{20000000000} \pi_{13} + x^7 - y^7 = \frac{233}{1000}
\end{aligned}$$

> res8

$$\begin{aligned}
& := (162155478/10^{10}) * \pi_1 + (196215492/10^{10}) * \pi_2 + (239745983/10^{10} \\
& 10) * \pi_3 + (288357103/10^{10}) * \pi_4 + (355780896/10^{10}) * \pi_5 + (42116 \\
& 5368/10^{10}) * \pi_6 + (533094958/10^{10}) * \pi_7 + (605012028/10^{10}) * \pi_8 \\
&] + (817953245/10^{10}) * \pi_9 + (829878028/10^{10}) * \pi_{10} + (1300664752/1 \\
& 0^{10}) * \pi_{11} + (995883980/10^{10}) * \pi_{12} + (3254092688/10^{10}) * \pi_{13} + \\
& x^8 - y^8 = (267/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res8 := & \frac{81077739}{5000000000} \pi_1 + \frac{49053873}{2500000000} \pi_2 + \frac{239745983}{10000000000} \pi_3 + \frac{288357103}{10000000000} \pi_4 \\
& + \frac{11118153}{312500000} \pi_5 + \frac{52645671}{1250000000} \pi_6 + \frac{266547479}{5000000000} \pi_7 + \frac{151253007}{2500000000} \pi_8 + \frac{163590649}{2000000000} \pi_9 \\
& + \frac{207469507}{2500000000} \pi_{10} + \frac{81291547}{625000000} \pi_{11} + \frac{49794199}{500000000} \pi_{12} + \frac{203380793}{625000000} \pi_{13} + x^8 - y^8 = \frac{267}{1000}
\end{aligned}$$

> res9

$$\begin{aligned}
& := (322363790/10^{10}) * \pi_1 + (360338975/10^{10}) * \pi_2 + (405378067/10^{10} \\
& 10) * \pi_3 + (451169167/10^{10}) * \pi_4 + (511259337/10^{10}) * \pi_5 + (56209 \\
& 1686/10^{10}) * \pi_6 + (650067700/10^{10}) * \pi_7 + (69060470/10^{10}) * \pi_8 \\
& + (844577194/10^{10}) * \pi_9 + (812985599/10^{10}) * \pi_{10} + (1137654580/10 \\
& ^{10}) * \pi_{11} + (842795243/10^{10}) * \pi_{12} + (2408958189/10^{10}) * \pi_{13} + x \\
& 9 - y^9 = (300/1000);
\end{aligned}$$

$$res9 := \frac{32236379}{10000000000} \pi_1 + \frac{14413559}{400000000} \pi_2 + \frac{405378067}{10000000000} \pi_3 + \frac{451169167}{10000000000} \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{511259337}{10000000000} \pi_5 + \frac{281045843}{5000000000} \pi_6 + \frac{6500677}{1000000000} \pi_7 + \frac{6906047}{1000000000} \pi_8 + \frac{422288597}{5000000000} \pi_9 \\
& + \frac{812985599}{10000000000} \pi_{10} + \frac{56882729}{5000000000} \pi_{11} + \frac{842795243}{10000000000} \pi_{12} + \frac{2408958189}{10000000000} \pi_{13} + x^9 - y^9 = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

> res10 :=

$$\begin{aligned}
& (561409479/10^{10}) * \pi_1 + (583206884/10^{10}) * \pi_2 + (608454250/10^{10}) * \pi_3 + (630094418/10^{10}) * \pi_4 + (660954088/10^{10}) * \pi_5 + (678021757/10^{10}) * \pi_6 \\
& + (722916070/10^{10}) * \pi_7 + (720702456/10^{10}) * \pi_8 + (806223883/10^{10}) * \pi_9 + (737329155/10^{10}) * \pi_{10} + (932020794/10^{10}) * \pi_{11} \\
& + (668044726/10^{10}) * \pi_{12} + (1690622035/10^{10}) * \pi_{13} + x^{10} - y^{10} = (333/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res10 := & \frac{561409479}{10000000000} \pi_1 + \frac{145801721}{2500000000} \pi_2 + \frac{2433817}{400000000} \pi_3 + \frac{315047209}{5000000000} \pi_4 + \frac{82619261}{1250000000} \pi_5 \\
& + \frac{678021757}{10000000000} \pi_6 + \frac{72291607}{10000000000} \pi_7 + \frac{90087807}{1250000000} \pi_8 + \frac{806223883}{10000000000} \pi_9 + \frac{147465831}{2000000000} \pi_{10} \\
& + \frac{466010397}{5000000000} \pi_{11} + \frac{334022363}{5000000000} \pi_{12} + \frac{338124407}{2000000000} \pi_{13} + x^{10} - y^{10} = \frac{333}{1000}
\end{aligned}$$

> res11 :=

$$\begin{aligned}
& (883547801/10^{10}) * \pi_1 + (855529538/10^{10}) * \pi_2 + (830776916/10^{10}) * \pi_3 + (802611127/10^{10}) * \pi_4 + (782553981/10^{10}) * \pi_5 + (750541853/10^{10}) * \pi_6 \\
& + (741350802/10^{10}) * \pi_7 + (694534519/10^{10}) * \pi_8 + (714652048/10^{10}) * \pi_9 + (620826355/10^{10}) * \pi_{10} + (713626250/10^{10}) * \pi_{11} \\
& + (494407148/10^{10}) * \pi_{12} + (1115041661/10^{10}) * \pi_{13} + x^{11} - y^{11} = (367/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res11 := & \frac{883547801}{10000000000} \pi_1 + \frac{427764769}{5000000000} \pi_2 + \frac{207694229}{2500000000} \pi_3 + \frac{802611127}{10000000000} \pi_4 \\
& + \frac{782553981}{10000000000} \pi_5 + \frac{750541853}{10000000000} \pi_6 + \frac{370675401}{5000000000} \pi_7 + \frac{694534519}{10000000000} \pi_8 + \frac{44665753}{625000000} \pi_9 \\
& + \frac{124165271}{2000000000} \pi_{10} + \frac{570901}{8000000} \pi_{11} + \frac{123601787}{2500000000} \pi_{12} + \frac{1115041661}{10000000000} \pi_{13} + x^{11} - y^{11} = \frac{367}{1000}
\end{aligned}$$

> res12

$$\begin{aligned}
:= & (1248765923/10^{10}) * \pi_1 + (1134137620/10^{10}) * \pi_2 + (1032046790/10^{10}) * \pi_3 + (935760060/10^{10}) * \pi_4 + (854134504/10^{10}) * \pi_5 + (770073470/10^{10}) * \pi_6 \\
& + (710276747/10^{10}) * \pi_7 + (628052752/10^{10}) * \pi_8 + (599911133/10^{10}) * \pi_9 + (496373842/10^{10}) * \pi_{10} + (524345139/10^{10}) * \pi_{11} \\
& + (351479055/10^{10}) * \pi_{12} + (714642961/10^{10}) * \pi_{13} + x^{12} - y^{12} = (400/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res12 := & \frac{1248765923}{10000000000} \pi_1 + \frac{56706881}{5000000000} \pi_2 + \frac{103204679}{10000000000} \pi_3 + \frac{46788003}{5000000000} \pi_4 + \frac{106766813}{1250000000} \pi_5 \\
& + \frac{77007347}{10000000000} \pi_6 + \frac{710276747}{10000000000} \pi_7 + \frac{39253297}{625000000} \pi_8 + \frac{599911133}{10000000000} \pi_9 + \frac{248186921}{5000000000} \pi_{10}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{524345139}{10000000000} \pi_{11} + \frac{70295811}{2000000000} \pi_{12} + \frac{714642961}{10000000000} \pi_{13} + x/2 - y/2 = \frac{2}{5}$$

> res13 :=

$$(1640097660/10^{10}) * \pi_1 + (1401995005/10^{10}) * \pi_2 + (1200069766/10^{10}) * \pi_3 + (1024602046/10^{10}) * \pi_4 + (879064214/10^{10}) * \pi_5 + (747223677/10^{10}) * \pi_6 + (646498014/10^{10}) * \pi_7 + (540754507/10^{10}) * \pi_8 + (482094909/10^{10}) * \pi_9 + (380341535/10^{10}) * \pi_{10} + (371562466/10^{10}) * \pi_{11} + (240980735/10^{10}) * \pi_{12} + (444715460/10^{10}) * \pi_{13} + x_{13} - y_{13} = 433/1000;$$

$$\begin{aligned} res13 := & \frac{82004883}{5000000000} \pi_1 + \frac{280399001}{2000000000} \pi_2 + \frac{600034883}{5000000000} \pi_3 + \frac{512301023}{5000000000} \pi_4 + \frac{439532107}{5000000000} \pi_5 \\ & + \frac{747223677}{10000000000} \pi_6 + \frac{323249007}{5000000000} \pi_7 + \frac{540754507}{10000000000} \pi_8 + \frac{482094909}{10000000000} \pi_9 + \frac{76068307}{20000000000} \pi_{10} \\ & + \frac{185781233}{5000000000} \pi_{11} + \frac{48196147}{2000000000} \pi_{12} + \frac{22235773}{5000000000} \pi_{13} + x/3 - y/3 = \frac{433}{1000} \end{aligned}$$

> res14 :=

$$(2047647352/10^{10}) * \pi_1 + (1649587636/10^{10}) * \pi_2 + (1330130742/10^{10}) * \pi_3 + (1070605667/10^{10}) * \pi_4 + (864778757/10^{10}) * \pi_5 + (693667264/10^{10}) * \pi_6 + (564095288/10^{10}) * \pi_7 + (446499484/10^{10}) * \pi_8 + (372498989/10^{10}) * \pi_9 + (280101930/10^{10}) * \pi_{10} + (253865894/10^{10}) * \pi_{11} + (159143477/10^{10}) * \pi_{12} + (267377520/10^{10}) * \pi_{13} + x_{14} - y_{14} = 467/1000;$$

$$\begin{aligned} res14 := & \frac{255955919}{12500000000} \pi_1 + \frac{412396909}{25000000000} \pi_2 + \frac{665065371}{50000000000} \pi_3 + \frac{1070605667}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{864778757}{100000000000} \pi_5 + \frac{10838551}{156250000} \pi_6 + \frac{70511911}{1250000000} \pi_7 + \frac{111624871}{2500000000} \pi_8 + \frac{372498989}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{28010193}{10000000000} \pi_{10} + \frac{126932947}{50000000000} \pi_{11} + \frac{159143477}{100000000000} \pi_{12} + \frac{3342219}{125000000} \pi_{13} + x_{14} - y_{14} = \frac{467}{1000} \end{aligned}$$

> res15 :=

$$(2432465940/10^{10}) * \pi_1 + (1854786991/10^{10}) * \pi_2 + (1415201674/10^{10}) * \pi_3 + (1078404180/10^{10}) * \pi_4 + (823912477/10^{10}) * \pi_5 + (626149566/10^{10}) * \pi_6 + (480994729/10^{10}) * \pi_7 + (361521790/10^{10}) * \pi_8 + (283867671/10^{10}) * \pi_9 + (203929913/10^{10}) * \pi_{10} + (172640604/10^{10}) * \pi_{11} + (104711818/10^{10}) * \pi_{12} + (161412650/10^{10}) * \pi_{13} + x_{15} - y_{15} = 500/1000;$$

$$\begin{aligned} res15 := & \frac{121623297}{5000000000} \pi_1 + \frac{1854786991}{10000000000} \pi_2 + \frac{707600837}{50000000000} \pi_3 + \frac{53920209}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{823912477}{100000000000} \pi_5 + \frac{313074783}{50000000000} \pi_6 + \frac{480994729}{100000000000} \pi_7 + \frac{36152179}{10000000000} \pi_8 + \frac{283867671}{100000000000} \pi_9 \end{aligned}$$

$$+ \frac{203929913}{10000000000} \pi_{10} + \frac{43160151}{2500000000} \pi_{11} + \frac{52355909}{5000000000} \pi_{12} + \frac{3228253}{2000000000} \pi_{13} + x15 - y15 = \frac{1}{2}$$

> res16 :=

$$(2798640462/10^{10}) * \pi_1 + (2024338058/10^{10}) * \pi_2 + (1464914391/10^{10}) * \pi_3 + (1059103053/10^{10}) * \pi_4 + (767194515/10^{10}) * \pi_5 + (553498975/10^{10}) * \pi_6 + (402711380/10^{10}) * \pi_7 + (287878660/10^{10}) * \pi_8 + (213427455/10^{10}) * \pi_9 + (146610347/10^{10}) * \pi_{10} + (116379517/10^{10}) * \pi_{11} + (68296367/10^{10}) * \pi_{12} + (97006817/10^{10}) * \pi_{13} + x16 - y16 = 533/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res16} := & \frac{1399320231}{5000000000} \pi_1 + \frac{1012169029}{5000000000} \pi_2 + \frac{1464914391}{10000000000} \pi_3 + \frac{1059103053}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{153438903}{2000000000} \pi_5 + \frac{22139959}{4000000000} \pi_6 + \frac{20135569}{5000000000} \pi_7 + \frac{14393933}{5000000000} \pi_8 + \frac{42685491}{2000000000} \pi_9 \\ & + \frac{146610347}{10000000000} \pi_{10} + \frac{116379517}{10000000000} \pi_{11} + \frac{68296367}{10000000000} \pi_{12} + \frac{97006817}{10000000000} \pi_{13} + x16 - y16 = \\ & \frac{533}{1000} \end{aligned}$$

> res17 :=

$$(3152929348/10^{10}) * \pi_1 + (2164325463/10^{10}) * \pi_2 + (1486157313/10^{10}) * \pi_3 + (1019809602/10^{10}) * \pi_4 + (700797590/10^{10}) * \pi_5 + (480102591/10^{10}) * \pi_6 + (331087325/10^{10}) * \pi_7 + (225100253/10^{10}) * \pi_8 + (157744596/10^{10}) * \pi_9 + (103560272/10^{10}) * \pi_{10} + (77200923/10^{10}) * \pi_{11} + (43790260/10^{10}) * \pi_{12} + (57394458/10^{10}) * \pi_{13} + x17 - y17 = 567/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res17} := & \frac{788232337}{25000000000} \pi_1 + \frac{2164325463}{100000000000} \pi_2 + \frac{1486157313}{100000000000} \pi_3 + \frac{509904801}{50000000000} \pi_4 \\ & + \frac{70079759}{10000000000} \pi_5 + \frac{480102591}{100000000000} \pi_6 + \frac{13243493}{4000000000} \pi_7 + \frac{225100253}{100000000000} \pi_8 + \frac{39436149}{25000000000} \pi_9 \\ & + \frac{6472517}{6250000000} \pi_{10} + \frac{77200923}{100000000000} \pi_{11} + \frac{2189513}{5000000000} \pi_{12} + \frac{28697229}{50000000000} \pi_{13} + x17 - y17 = \frac{567}{1000} \end{aligned}$$

> res18 := (3473932424/10¹⁰) * pi[1] + (2270486903/10¹⁰) * pi[2] + (1484262314/10¹⁰) * pi[3] + (969826691/10¹⁰) * pi[4] + (634364192/10¹⁰) * pi[5] + (413963433/10¹⁰) * pi[6] + (271549431/10¹⁰) * pi[7] + (176082828/10¹⁰) * pi[8] + (117107039/10¹⁰) * pi[9] + (73629765/10¹⁰) * pi[10] + (51794158/10¹⁰) * pi[11] + (28425240/10¹⁰) * pi[12] + (34575586/10¹⁰) * pi[13] + x18 - y18 = 600/1000;

$$\begin{aligned} \text{res18} := & \frac{434241553}{12500000000} \pi_1 + \frac{2270486903}{100000000000} \pi_2 + \frac{742131157}{50000000000} \pi_3 + \frac{969826691}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{19823881}{3125000000} \pi_5 + \frac{413963433}{100000000000} \pi_6 + \frac{271549431}{100000000000} \pi_7 + \frac{44020707}{25000000000} \pi_8 + \frac{117107039}{100000000000} \pi_9 \end{aligned}$$

$$+\frac{14725953}{2000000000}\pi_{10}+\frac{25897079}{5000000000}\pi_{11}+\frac{710631}{250000000}\pi_{12}+\frac{17287793}{5000000000}\pi_{13}+x_{18}-y_{18}=\frac{3}{5}$$

> res19 :=

$$(3773299318/10^{10})\pi_1+(2351576598/10^{10})\pi_2+(1465761120/10^{10})\pi_3+(913306131/10^{10})\pi_4+(569526055/10^{10})\pi_5+(354508253/10^{10})\pi_6+(221579476/10^{10})\pi_7+(137197675/10^{10})\pi_8+(86771870/10^{10})\pi_9+(52285617/10^{10})\pi_{10}+(34794384/10^{10})\pi_{11}+(18475696/10^{10})\pi_{12}+(20917807/10^{10})\pi_{13}+x_{19}-y_{19}=633/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res19} := & \frac{1886649659}{5000000000}\pi_1 + \frac{1175788299}{5000000000}\pi_2 + \frac{9161007}{62500000}\pi_3 + \frac{913306131}{10000000000}\pi_4 + \frac{113905211}{2000000000}\pi_5 \\ & + \frac{354508253}{10000000000}\pi_6 + \frac{55394869}{2500000000}\pi_7 + \frac{5487907}{400000000}\pi_8 + \frac{8677187}{1000000000}\pi_9 + \frac{52285617}{10000000000}\pi_{10} \\ & + \frac{2174649}{625000000}\pi_{11} + \frac{1154731}{625000000}\pi_{12} + \frac{20917807}{10000000000}\pi_{13} + x_{19} - y_{19} = \frac{633}{1000} \end{aligned}$$

> res20

$$:=(4060702233/10^{10})\pi_1+(2412999456/10^{10})\pi_2+(1434034226/10^{10})\pi_3+(852026866/10^{10})\pi_4+(506526293/10^{10})\pi_5+(300712749/10^{10})\pi_6+(179105984/10^{10})\pi_7+(105866249/10^{10})\pi_8+(63693467/10^{10})\pi_9+(36759074/10^{10})\pi_{10}+(23156541/10^{10})\pi_{11}+(11884999/10^{10})\pi_{12}+(12531854/10^{10})\pi_{13}+x_{20}-y_{20}=667/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res20} := & \frac{4060702233}{10000000000}\pi_1 + \frac{75406233}{312500000}\pi_2 + \frac{717017113}{5000000000}\pi_3 + \frac{426013433}{5000000000}\pi_4 \\ & + \frac{506526293}{10000000000}\pi_5 + \frac{300712749}{10000000000}\pi_6 + \frac{2798531}{156250000}\pi_7 + \frac{105866249}{10000000000}\pi_8 + \frac{63693467}{10000000000}\pi_9 \\ & + \frac{18379537}{50000000000}\pi_{10} + \frac{23156541}{10000000000}\pi_{11} + \frac{11884999}{10000000000}\pi_{12} + \frac{6265927}{5000000000}\pi_{13} + x_{20} - y_{20} = \\ & \frac{667}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{obj} := (x_1+y_1) * (143/1000) + (x_2+y_2) * (172/1000) + (x_3+y_3) * (143/1000) + (x_4+y_4) * (114/1000) \\ & + (x_5+y_5) * (1/10) + (x_6+y_6) * (86/1000) + (x_7+y_7) * (72/1000) + (x_8+y_8) * (57/1000) \\ & + (x_9+y_9) * (43/1000) + (x_{10}+y_{10}) * (29/1000) + (x_{11}+y_{11}) * (14/1000) + (x_{12}+y_{12}) * (7/1000) \\ & + (x_{13}+y_{13}) * (6/1000) + (x_{14}+y_{14}) * (4/1000) + (x_{15}+y_{15}) * (3/1000) + (x_{16}+y_{16}) * (1/1000) + (x_{17}+y_{17}) * (1/1000) \\ & + (x_{18}+y_{18}) * (1/1000) + (x_{19}+y_{19}) * (1/1000) + (x_{20}+y_{20}) * (1/1000); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{obj} := & \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}y_{17} + \frac{1}{1000}x_{19} + \frac{1}{1000}y_{19} + \frac{1}{1000}x_{18} + \frac{7}{1000}y_{12} + \frac{3}{500}x_{13} \\ & + \frac{7}{1000}x_{12} + \frac{3}{1000}x_{15} + \frac{1}{1000}x_{20} + \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}x_{16} + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{143}{1000}y_1 \\ & + \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{43}{250}x_2 + \frac{43}{250}y_2 + \frac{3}{500}y_{13} + \frac{143}{1000}x_3 + \frac{143}{1000}y_3 + \frac{57}{500}x_4 + \frac{57}{500}y_4 + \frac{1}{10}x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{10}y^5 + \frac{43}{500}x^6 + \frac{43}{500}y^6 + \frac{9}{125}x^7 + \frac{9}{125}y^7 + \frac{57}{1000}x^8 + \frac{57}{1000}y^8 + \frac{1}{1000}x^{17} + \frac{43}{1000}x^9 \\
& + \frac{43}{1000}y^9 + \frac{29}{1000}x^{10} + \frac{29}{1000}y^{10} + \frac{7}{500}x^{11} + \frac{7}{500}y^{11} + \frac{1}{250}y^{14} + \frac{1}{250}x^{14}
\end{aligned}$$

> dese := (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x11-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14) * (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/1000) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000) ;

$$\begin{aligned}
dese := & -\frac{1}{1000}y^{18} - \frac{1}{1000}y^{17} + \frac{1}{1000}x^{19} - \frac{1}{1000}y^{19} + \frac{1}{1000}x^{18} - \frac{7}{1000}y^{12} + \frac{3}{500}x^{13} \\
& + \frac{7}{1000}x^{12} + \frac{3}{1000}x^{15} + \frac{1}{1000}x^{20} - \frac{3}{1000}y^{15} - \frac{1}{1000}y^{20} + \frac{1}{1000}x^{16} + \frac{143}{1000}x^{11} - \frac{143}{1000}y^{11} \\
& - \frac{1}{1000}y^{16} + \frac{43}{250}x^2 - \frac{43}{250}y^2 - \frac{3}{500}y^{13} + \frac{143}{1000}x^3 - \frac{143}{1000}y^3 + \frac{57}{500}x^4 - \frac{57}{500}y^4 + \frac{1}{10}x^5 \\
& - \frac{1}{10}y^5 + \frac{43}{500}x^6 - \frac{43}{500}y^6 + \frac{9}{125}x^7 - \frac{9}{125}y^7 + \frac{57}{1000}x^8 - \frac{57}{1000}y^8 + \frac{1}{1000}x^{17} + \frac{43}{1000}x^9 \\
& - \frac{43}{1000}y^9 + \frac{29}{1000}x^{10} - \frac{29}{1000}y^{10} + \frac{7}{500}x^{11} - \frac{7}{500}y^{11} - \frac{1}{250}y^{14} + \frac{1}{250}x^{14}
\end{aligned}$$

> res21 := pi[1] >= pi[2] ;

$$res21 := \pi_2 \leq \pi_1$$

> res22 := pi[2] >= pi[3] ;

$$res22 := \pi_3 \leq \pi_2$$

> res23 := pi[3] >= pi[4] ;

$$res23 := \pi_4 \leq \pi_3$$

> res24 := pi[4] >= pi[5] ;

$$res24 := \pi_5 \leq \pi_4$$

> res25 := pi[5] >= pi[6] ;

$$res25 := \pi_6 \leq \pi_5$$

> res26 := pi[6] >= pi[7] ;

$$res26 := \pi_7 \leq \pi_6$$

> res27 := pi[7] >= pi[8] ;

$$res27 := \pi_8 \leq \pi_7$$

> res28 := pi[8] >= pi[9] ;

$$res28 := \pi_9 \leq \pi_8$$

> res29 := pi[9] >= pi[10] ;

$$res29 := \pi_{10} \leq \pi_9$$

> res30 := pi[10] >= pi[11] ;

$$res30 := \pi_{11} \leq \pi_{10}$$

```

> res31:=pi[11]>=pi[12];
                                     res31 :=  $\pi_{12} \leq \pi_{11}$ 
> res32:=pi[12]>=pi[13];
                                     res32 :=  $\pi_{13} \leq \pi_{12}$ 
>

```

Añadimos la restricción de equilibrio financiero

```

> res33:=(x1-y1)*(143/1000)+(x2-y2)*(172/1000)+(x3-y3)*(143/1000)+
(x4-y4)*(114/1000)+(x5-y5)*(1/10)+(x6-y6)*(86/1000)+(x7-y7)*(72/
1000)+(x8-y8)*(57/1000)+(x9-y9)*(43/1000)+(x10-y10)*(29/1000)+(x
11-y11)*(14/1000)+(x12-y12)*(7/1000)+(x13-y13)*(6/1000)+(x14-y14
)*(4/1000)+(x15-y15)*(3/1000)+(x16-y16)*(1/1000)+(x17-y17)*(1/10
00)+(x18-y18)*(1/1000)+(x19-y19)*(1/1000)+(x20-y20)*(1/1000)=0:

```

No obligamos a que en ninguna clase se pague la siniestralidad media

```

> sol1Norberg2:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res
7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,r
es18,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,re
s28,res29,res30,res31,res32,res33},NONNEGATIVE):
> solulNorberg2:=evalf(sol1Norberg2);
solulNorberg2 := {y9 = 0, x10 = 0, y8 = .01216417835, x4 = .002846360451, y14 = 0,
x11 = 0, x1 = 0, y3 = 0, y2 = 0, x2 = 0, y13 = 0, y5 = 0, y6 = 0, x8 = 0, x7 = 0, y15 = 0,
x12 = 0, y16 = 0, y20 = 0, y17 = 0, y11 = .01021455770,  $\pi_3$  = .4040744670,
x15 = .05544271104, x13 = .01484517040, x9 = .009604551708, x20 = .1852356628,
 $\pi_{12}$  = .4040744670,  $\pi_{11}$  = .4040744670, y1 = .004395330529,  $\pi_9$  = .4040744670,
 $\pi_{13}$  = .01062421945, y7 = .007066364495, x14 = .03402102582,  $\pi_1$  = .5966099749,
x19 = .1570991345, x18 = .1304003757,  $\pi_6$  = .4040744670, x3 = .002410766454,
 $\pi_7$  = .4040744670,  $\pi_5$  = .4040744670,  $\pi_{10}$  = .4040744670,  $\pi_2$  = .4040744670,
x17 = .1044786342,  $\pi_8$  = .4040744670, y10 = .01536602693, x5 = .001200530488,
x16 = .07885850243, x6 = .001970444520,  $\pi_4$  = .4040744670, y4 = 0, y18 = 0, y19 = 0,
y12 = 0}
> 'objsol1Norberg2'=subs(solulNorberg2,obj);
objsol1Norberg2 = .004838574528

```

Añadimos las restricciones de que la prima aumente un porcentaje de la prima en el nivel anterior

```

> sol2Norberg2:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,
res7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,r
es17,res18,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26

```

```

, res27, res28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[1] <= 5*pi[13]
, pi[1] >= 101/100*pi[2], pi[2] >= 101/100*pi[3], pi[3] >= 101/100*
pi[4], pi[4] >= 101/100*pi[5], pi[5] >= 101/100*pi[6], pi[6] >= 101
/100*pi[7], pi[7] >= 101/100*pi[8], pi[8] >= 101/100*pi[9], pi[9]
>= 101/100*pi[10], pi[10] >= 101/100*pi[11], pi[11] >= 101/100*pi
[12], pi[12] >= 101/100*pi[13] }, NONNEGATIVE) :
> solu2Norberg2 := evalf(sol2Norberg2) ;
solu2Norberg2 := {y9 = 0, y14 = 0, x1 = 0, x2 = 0, y13 = 0, y5 = 0, y6 = 0,
pi3 = .4445806913, x15 = .07287797007, x17 = .1284010301, x14 = .04974815236,
pi5 = .4358206953, x11 = .01178602192, x5 = .02513502253, y15 = 0, y16 = 0, y20 = 0,
pi4 = .4401789023, x9 = .04490622145, x12 = .01773952949, pi11 = .09252649003,
y2 = .03055432796, pi8 = .4230032732, x7 = .03144764593, pi10 = .4146684376,
pi12 = .09161038617, x19 = .1890441521, x13 = .03052100824, x6 = .03606625799,
x20 = .2214212214, pi6 = .4315056390, x10 = .01271263458, x8 = .02609369811,
y17 = 0, pi13 = .09070335264, y3 = .006860915398, pi2 = .4490264982,
x16 = .09912932120, x18 = .1582527203, pi1 = .4535167632, y1 = .05923339284,
pi7 = .4272333059, pi9 = .4188151219, x4 = .01187932277, y4 = 0, y18 = 0, y19 = 0,
y12 = 0, x3 = 0, y10 = 0, y8 = 0, y7 = 0, y11 = 0}
> 'objsol2Norberg2' := subs(solu2Norberg2, obj) ;
objsol2Norberg2 = .02941366098

```

Obligamos a que la siniestralidad media se pague en la clase

6

```

> sol3Norberg2 := minimize(obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6, res
7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, res17, r
es18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26, res27, re
s28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[6] = 152/1000}, NONNEGATIVE
) :
> solu3Norberg2 := evalf(sol3Norberg2) ;
solu3Norberg2 := {y9 = 0, x10 = 0, x11 = 0, x1 = 0, y3 = 0, x2 = 0, y5 = 0, y6 = 0, x12 = 0,
x18 = 0, x17 = 0, x14 = 0, x13 = 0, x15 = 0, x20 = 0, x19 = 0, x16 = 0, y20 = .2085351758,
y17 = .2502663201, pi2 = .9329167447, pi10 = .1520000000, x5 = .04638844539,
x6 = .06861268505, pi1 = .9329167447, y1 = .05588716766, x9 = .01362725693,
pi9 = .1520000000, pi13 = .08428938336, y12 = .1536161617, y11 = .1019224036,
pi12 = .1520000000, y15 = .2447763868, pi4 = .9329167447, pi8 = .1520000000,
pi3 = .9329167447, y19 = .2274207690, y13 = .1959268576, x4 = .02509042565,
x8 = .04002389295, pi5 = .9329167447, y2 = .02710138611, x7 = .05831397901,
y14 = .2269223888, y16 = .2519938823, pi11 = .1520000000, pi7 = .1520000000,

```

```

y10 = .04527305316, y18 = .2415396924,  $\pi_6$  = .1520000000, y4 = 0, x3 = 0, y8 = 0, y7 = 0
}
> 'objsol3Norberg2' = subs (solu3Norberg2, obj) ;
      objsol3Norberg2 = .04093156883

```

⇒ Añadimos las restricciones de que la prima aumente un porcentaje de la prima en el nivel anterior

```

> solu4Norberg2 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6,
res7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, r
es17, res18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26
, res27, res28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[6]=152/1000,
pi[1]<=5*pi[13], pi[1]>=101/100*pi[2], pi[2]>=101/100*pi[3],
pi[3]>=101/100*pi[4], pi[4]>=101/100*pi[5], pi[5]>=101/100*pi
i[6], pi[6]>=101/100*pi[7], pi[7]>=101/100*pi[8], pi[8]>=101/
100*pi[9], pi[9]>=101/100*pi[10], pi[10]>=101/100*pi[11], pi[
11]>=101/100*pi[12], pi[12]>=101/100*pi[13]}, NONNEGATIVE) :
> solu4Norberg2 := evalf (solu4Norberg2) ;
      solu4Norberg2 := {y3 = .02422028312, y9 = 0,  $\pi_{11}$  = .1446227845,  $\pi_{12}$  = .1431908758,
      x19 = .09027373025,  $\pi_2$  = .5836501533, x18 = .06813407082,  $\pi_4$  = .5721499395,
      x15 = .02299104017,  $\pi_1$  = .5894866548, x6 = .06135471835, x4 = .005201899217,
      y1 = .08666323522, x17 = .04899534338, x14 = .01853250440, x13 = .02084201948,
       $\pi_7$  = .1504950495,  $\pi_8$  = .1490049995,  $\pi_9$  = .1475297025, x10 = .05964754114,
       $\pi_3$  = .5778714389, x12 = .02973374772, x8 = .07641768123, x20 = .1155076788,
       $\pi_{10}$  = .1460690124, x16 = .03330486090,  $\pi_5$  = .5664850886, x11 = .04365104524,
      x9 = .08115117496, y14 = 0, y2 = .05475091538, x5 = .03299677040,
      x7 = .07063322759, x1 = 0, x2 = 0, y13 = 0, y5 = 0,  $\pi_{13}$  = .1178973310, y6 = 0, y15 = 0,
      y16 = 0, y20 = 0, y17 = 0,  $\pi_6$  = .1520000000, y4 = 0, y18 = 0, y19 = 0, y12 = 0, x3 = 0,
      y10 = 0, y8 = 0, y7 = 0, y11 = 0}
> 'objsol4Norberg2' = subs (solu4Norberg2, obj) ;
      objsol4Norberg2 = .05054700114

```

⇒ Obligamos a que la siniestralidad media se pague en la clase 12

```

> solu5Norberg2 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6, res
7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, res17, r
es18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26, res27, re
s28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[12]=152/1000}, NONNEGATIV
E) :
> solu5Norberg2 := evalf (solu5Norberg2) ;
      solu5Norberg2 := {y9 = 0, x10 = 0, y14 = 0, x11 = 0, x1 = 0, y3 = 0, y2 = 0, x2 = 0, y13 = 0,

```

$y5 = 0, y6 = 0, x8 = 0, x7 = 0, y15 = 0, x12 = 0, y16 = 0, y20 = 0, y17 = 0,$
 $\pi_{12} = .1520000000, y4 = 0, y18 = 0, y19 = 0, \pi_5 = .4554900730, \pi_1 = .4554900730,$
 $x14 = .02790209389, x6 = .006153084879, \pi_8 = .4554900730, x3 = .006230572725,$
 $y11 = .02526708368, x5 = .006969371610, \pi_4 = .4554900730, \pi_{11} = .4554900730,$
 $x15 = .05466786276, y7 = .007330654686, y12 = .01391942142, \pi_7 = .4554900730,$
 $\pi_6 = .4554900730, x9 = .002559132991, x18 = .1468677714, y10 = .02910728723,$
 $x16 = .08377756128, x19 = .1789752037, y1 = .009989864799, y8 = .01754786175,$
 $x13 = .004054474042, \pi_{13} = .02305579854, x17 = .1153208512, \pi_3 = .4554900730,$
 $\pi_2 = .4554900730, x4 = .008661952232, x20 = .2124125456, \pi_{10} = .4554900730,$
 $\pi_9 = .4554900730\}$

```

> 'objsol5Norberg2' = subs (solu5Norberg2, obj) ;
      objsol5Norberg2 = .008503744751

```

■ Añadimos las restricciones de que la prima aumente un porcentaje de la prima en el nivel anterior

```

> solu6Norberg2 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6,
    res7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, r
    es17, res18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26
    , res27, res28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[12]=152/1000
    , pi[1]<=5*pi[13], pi[1]>=101/100*pi[2], pi[2]>=101/100*pi[3]
    , pi[3]>=101/100*pi[4], pi[4]>=101/100*pi[5], pi[5]>=101/100*
    pi[6], pi[6]>=101/100*pi[7], pi[7]>=101/100*pi[8], pi[8]>=101
    /100*pi[9], pi[9]>=101/100*pi[10], pi[10]>=101/100*pi[11], pi
    [11]>=101/100*pi[12], pi[12]>=101/100*pi[13]}, NONNEGATIVE) :
> solu6Norberg2 := evalf (solu6Norberg2) ;

```

$solu6Norberg2 := \{y9 = 0, y14 = 0, x1 = 0, x2 = 0, y13 = 0, y5 = 0, y6 = 0,$
 $y3 = .01030360726, x20 = .2556002969, x16 = .1313882407, \pi_5 = .4021573736,$
 $\pi_{10} = .3826389420, x18 = .1918291184, x13 = .05745134216, y15 = 0,$
 $x14 = .07917366934, y16 = 0, y20 = 0, y17 = 0, \pi_{12} = .1520000000, y4 = 0,$
 $x7 = .03009446813, x19 = .2229741051, \pi_4 = .4061789473, y18 = 0,$
 $\pi_6 = .3981756174, \pi_7 = .3942332846, x15 = .1039865711, y2 = .03134988577,$
 $\pi_8 = .3903299847, x17 = .1614574652, x10 = .02659418575, x4 = .006843686058,$
 $x6 = .03157665894, x12 = .04132160863, \pi_{13} = .08369731512, \pi_{11} = .1535200000,$
 $x9 = .05117197750, x8 = .02912001478, \pi_3 = .4102407368, x5 = .01979394578,$
 $y1 = .05641994770, \pi_1 = .4184865756, \pi_2 = .4143431441, x11 = .03102495398,$
 $\pi_9 = .3864653314, y19 = 0, y12 = 0, x3 = 0, y10 = 0, y8 = 0, y7 = 0, y11 = 0\}$

```

> 'objsol6Norberg2' = subs (solu6Norberg2, obj) ;
      objsol6Norberg2 = .02986729744

```

>

pro-lin-Norberg3

Programa lineal para la distribución lambda de Noruega 75 con las reglas de Norberg 3

```
> restart;
```

```
> with(simplex):
```

```
Warning, new definition for maximize
```

```
Warning, new definition for minimize
```

```
> res1:=(65318/10^10)*pi[1]+(145674/10^10)*pi[2]+(267867/10^10)*pi[3]+(1062283/10^10)*pi[4]+(2071844/10^10)*pi[5]+(3321775/10^10)*pi[6]+(18215452/10^10)*pi[7]+(27562997/10^10)*pi[8]+(36284477/10^10)*pi[9]+(321725412/10^10)*pi[10]+(311281741/10^10)*pi[11]+(301177086/10^10)*pi[12]+(8976818074/10^10)*pi[13]+x1-y1 = (33/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res1} := & \frac{32659}{5000000000} \pi_1 + \frac{72837}{5000000000} \pi_2 + \frac{267867}{10000000000} \pi_3 + \frac{1062283}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{517961}{2500000000} \pi_5 + \frac{132871}{4000000000} \pi_6 + \frac{4553863}{25000000000} \pi_7 + \frac{27562997}{10000000000} \pi_8 + \frac{36284477}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{80431353}{25000000000} \pi_{10} + \frac{311281741}{100000000000} \pi_{11} + \frac{150588543}{50000000000} \pi_{12} + \frac{4488409037}{50000000000} \pi_{13} + x1 - y1 = \frac{33}{1000} \end{aligned}$$

```
> res2 :=
```

```
(1671651/10^10)*pi[1]+(3005802/10^10)*pi[2]+(4849485/10^10)*pi[3]+(11293841/10^10)*pi[4]+(18822599/10^10)*pi[5]+(27464354/10^10)*pi[6]+(81148758/10^10)*pi[7]+(112345891/10^10)*pi[8]+(139158779/10^10)*pi[9]+(622141545/10^10)*pi[10]+(581823788/10^10)*pi[11]+(544118817/10^10)*pi[12]+(7852154684/10^10)*pi[13]+x2-y2 = (67/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res2} := & \frac{1671651}{10000000000} \pi_1 + \frac{1502901}{5000000000} \pi_2 + \frac{969897}{2000000000} \pi_3 + \frac{11293841}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{18822599}{10000000000} \pi_5 + \frac{13732177}{5000000000} \pi_6 + \frac{40574379}{5000000000} \pi_7 + \frac{112345891}{10000000000} \pi_8 + \frac{139158779}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{124428309}{20000000000} \pi_{10} + \frac{145455947}{25000000000} \pi_{11} + \frac{544118817}{100000000000} \pi_{12} + \frac{1963038671}{25000000000} \pi_{13} + x2 - y2 = \frac{67}{1000} \end{aligned}$$

```
> res3 :=
```

```
(11125724/10^10)*pi[1]+(17190143/10^10)*pi[2]+(24877360/10^10)*pi[3]+(44386553/10^10)*pi[4]+(65416786/10^10)*pi[5]+(87809263/10^10)*pi[6]+(187596313/10^10)*pi[7]+(240179896/10^10)*pi[8]+(281056652/10^10)*pi[9]+(860304114/10^10)*pi[10]+(778435353/10^10)*pi[11]+(704357422/10^10)*pi[12]+(6697264415/10^10)*pi[13]+x3-y3 = (100/1000);
```

$$\begin{aligned}
 res3 := & \frac{2781431}{2500000000} \pi_1 + \frac{17190143}{10000000000} \pi_2 + \frac{310967}{125000000} \pi_3 + \frac{44386553}{10000000000} \pi_4 \\
 & + \frac{32708393}{5000000000} \pi_5 + \frac{87809263}{10000000000} \pi_6 + \frac{187596313}{10000000000} \pi_7 + \frac{30022487}{1250000000} \pi_8 + \frac{70264163}{2500000000} \pi_9 \\
 & + \frac{430152057}{5000000000} \pi_{10} + \frac{778435353}{10000000000} \pi_{11} + \frac{352178711}{5000000000} \pi_{12} + \frac{1339452883}{20000000000} \pi_{13} + x^3 - y^3 = \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

> res4 :=

$$\begin{aligned}
 & (43033045/10^{10}) * \pi_1 + (58980152/10^{10}) * \pi_2 + (77593737/10^{10}) * \pi_3 \\
 & + (116081302/10^{10}) * \pi_4 + (154248650/10^{10}) * \pi_5 + (191722767/10^{10}) * \pi_6 \\
 & + (329387213/10^{10}) * \pi_7 + (392484767/10^{10}) * \pi_8 + (434758174/10^{10}) * \pi_9 \\
 & + (1021399218/10^{10}) * \pi_{10} + (894199348/10^{10}) * \pi_{11} + (782840317/10^{10}) * \pi_{12} \\
 & + (5503271307/10^{10}) * \pi_{13} + x^4 - y^4 = (133/1000);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 res4 := & \frac{8606609}{2000000000} \pi_1 + \frac{7372519}{1250000000} \pi_2 + \frac{77593737}{10000000000} \pi_3 + \frac{58040651}{5000000000} \pi_4 + \frac{3084973}{200000000} \pi_5 \\
 & + \frac{191722767}{10000000000} \pi_6 + \frac{329387213}{10000000000} \pi_7 + \frac{392484767}{10000000000} \pi_8 + \frac{217379087}{5000000000} \pi_9 + \frac{510699609}{5000000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{223549837}{2500000000} \pi_{11} + \frac{782840317}{10000000000} \pi_{12} + \frac{5503271307}{10000000000} \pi_{13} + x^4 - y^4 = \frac{133}{1000}
 \end{aligned}$$

> res5 :=

$$\begin{aligned}
 & (123054598/10^{10}) * \pi_1 + (152221751/10^{10}) * \pi_2 + (183484375/10^{10}) * \pi_3 \\
 & + (239930723/10^{10}) * \pi_4 + (290675390/10^{10}) * \pi_5 + (335691841/10^{10}) * \pi_6 \\
 & + (488370301/10^{10}) * \pi_7 + (543349131/10^{10}) * \pi_8 + (569864248/10^{10}) * \pi_9 \\
 & + (1087885156/10^{10}) * \pi_{10} + (920567994/10^{10}) * \pi_{11} + (778984275/10^{10}) * \pi_{12} \\
 & + (4285920215/10^{10}) * \pi_{13} + x^5 - y^5 = (167/1000);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 res5 := & \frac{61527299}{5000000000} \pi_1 + \frac{152221751}{10000000000} \pi_2 + \frac{11743}{640000} \pi_3 + \frac{239930723}{10000000000} \pi_4 + \frac{29067539}{1000000000} \pi_5 \\
 & + \frac{335691841}{10000000000} \pi_6 + \frac{488370301}{10000000000} \pi_7 + \frac{543349131}{10000000000} \pi_8 + \frac{71233031}{1250000000} \pi_9 + \frac{271971289}{2500000000} \pi_{10} \\
 & + \frac{460283997}{5000000000} \pi_{11} + \frac{31159371}{400000000} \pi_{12} + \frac{857184043}{2000000000} \pi_{13} + x^5 - y^5 = \frac{167}{1000}
 \end{aligned}$$

> res6 :=

$$\begin{aligned}
 & (269667803/10^{10}) * \pi_1 + (306182746/10^{10}) * \pi_2 + (341803032/10^{10}) * \pi_3 \\
 & + (402697564/10^{10}) * \pi_4 + (450580042/10^{10}) * \pi_5 + (486824151/10^{10}) * \pi_6 \\
 & + (623528780/10^{10}) * \pi_7 + (651874445/10^{10}) * \pi_8 + (649455471/10^{10}) * \pi_9 \\
 & + (1054513174/10^{10}) * \pi_{10} + (863362360/10^{10}) * \pi_{11} + (706861314/10^{10}) * \pi_{12} \\
 & + (3192649115/10^{10}) * \pi_{13} + x^6 - y^6 = (200/1000);
 \end{aligned}$$

$$res6 := \frac{269667803}{10000000000} \pi_1 + \frac{153091373}{5000000000} \pi_2 + \frac{42725379}{1250000000} \pi_3 + \frac{100674391}{2500000000} \pi_4$$

$$+ \frac{225290021}{5000000000} \pi_5 + \frac{486824151}{10000000000} \pi_6 + \frac{31176439}{500000000} \pi_7 + \frac{130374889}{2000000000} \pi_8 + \frac{649455471}{10000000000} \pi_9$$

$$+ \frac{527256587}{5000000000} \pi_{10} + \frac{21584059}{250000000} \pi_{11} + \frac{353430657}{5000000000} \pi_{12} + \frac{638529823}{2000000000} \pi_{13} + x6 - y6 = \frac{1}{5}$$

> res7 :=

$$(269667803/10^{10}) * \pi_1 + (306182746/10^{10}) * \pi_2 + (341803032/10^{10}) * \pi_3 + (402697564/10^{10}) * \pi_4 + (450580042/10^{10}) * \pi_5 + (486824151/10^{10}) * \pi_6 + (623528780/10^{10}) * \pi_7 + (651874445/10^{10}) * \pi_8 + (649455471/10^{10}) * \pi_9 + (1054513174/10^{10}) * \pi_{10} + (863362360/10^{10}) * \pi_{11} + (706861314/10^{10}) * \pi_{12} + (3192649115/10^{10}) * \pi_{13} + x7 - y7 = (233/1000);$$

$$res7 := \frac{269667803}{10000000000} \pi_1 + \frac{153091373}{5000000000} \pi_2 + \frac{42725379}{1250000000} \pi_3 + \frac{100674391}{2500000000} \pi_4$$

$$+ \frac{225290021}{5000000000} \pi_5 + \frac{486824151}{10000000000} \pi_6 + \frac{31176439}{500000000} \pi_7 + \frac{130374889}{2000000000} \pi_8 + \frac{649455471}{10000000000} \pi_9$$

$$+ \frac{527256587}{5000000000} \pi_{10} + \frac{21584059}{250000000} \pi_{11} + \frac{353430657}{5000000000} \pi_{12} + \frac{638529823}{2000000000} \pi_{13} + x7 - y7 = \frac{233}{1000}$$

> res8 :=

$$(802516380/10^{10}) * \pi_1 + (786834816/10^{10}) * \pi_2 + (765753085/10^{10}) * \pi_3 + (763920548/10^{10}) * \pi_4 + (743303865/10^{10}) * \pi_5 + (709706173/10^{10}) * \pi_6 + (745650549/10^{10}) * \pi_7 + (694243277/10^{10}) * \pi_8 + (625985207/10^{10}) * \pi_9 + (787827305/10^{10}) * \pi_{10} + (603218152/10^{10}) * \pi_{11} + (461867897/10^{10}) * \pi_{12} + (1509172741/10^{10}) * \pi_{13} + x8 - y8 = (267/1000);$$

$$res8 := \frac{40125819}{500000000} \pi_1 + \frac{6147147}{7812500} \pi_2 + \frac{153150617}{2000000000} \pi_3 + \frac{190980137}{2500000000} \pi_4 + \frac{148660773}{2000000000} \pi_5$$

$$+ \frac{709706173}{10000000000} \pi_6 + \frac{745650549}{10000000000} \pi_7 + \frac{694243277}{10000000000} \pi_8 + \frac{625985207}{10000000000} \pi_9$$

$$+ \frac{157565461}{2000000000} \pi_{10} + \frac{75402269}{1250000000} \pi_{11} + \frac{461867897}{10000000000} \pi_{12} + \frac{1509172741}{10000000000} \pi_{13} + x8 - y8 = \frac{267}{1000}$$

> res9 :=

$$(1151149561/10^{10}) * \pi_1 + (1059766915/10^{10}) * \pi_2 + (970759538/10^{10}) * \pi_3 + (904681068/10^{10}) * \pi_4 + (828161455/10^{10}) * \pi_5 + (747533950/10^{10}) * \pi_6 + (725952247/10^{10}) * \pi_7 + (641047528/10^{10}) * \pi_8 + (551388335/10^{10}) * \pi_9 + (627105710/10^{10}) * \pi_{10} + (464571337/10^{10}) * \pi_{11} + (344162909/10^{10}) * \pi_{12} + (983719440/10^{10}) * \pi_{13} + x9 - y9 = (300/1000);$$

$$res9 := \frac{1151149561}{10000000000} \pi_1 + \frac{211953383}{2000000000} \pi_2 + \frac{485379769}{5000000000} \pi_3 + \frac{226170267}{2500000000} \pi_4$$

$$+ \frac{165632291}{2000000000} \pi_5 + \frac{14950679}{200000000} \pi_6 + \frac{725952247}{10000000000} \pi_7 + \frac{80130941}{1250000000} \pi_8 + \frac{110277667}{2000000000} \pi_9$$

$$+ \frac{62710571}{1000000000} \pi_{10} + \frac{464571337}{10000000000} \pi_{11} + \frac{344162909}{10000000000} \pi_{12} + \frac{12296493}{125000000} \pi_{13} + x^9 - y^9 = \frac{3}{10}$$

> res10 :=

$$(1524025022/10^{10}) * \pi_1 + (1323224645/10^{10}) * \pi_2 + (1144973515/10^{10}) * \pi_3 + (1002797678/10^{10}) * \pi_4 + (866976962/10^{10}) * \pi_5 + (741730390/10^{10}) * \pi_6 + (671334071/10^{10}) * \pi_7 + (563496379/10^{10}) * \pi_8 + (462890549/10^{10}) * \pi_9 + (481080207/10^{10}) * \pi_{10} + (344823957/10^{10}) * \pi_{11} + (247159531/10^{10}) * \pi_{12} + (625487086/10^{10}) * \pi_{13} + x_{10} - y_{10} = (333/1000);$$

$$\begin{aligned} \text{res10} := & \frac{762012511}{5000000000} \pi_1 + \frac{264644929}{2000000000} \pi_2 + \frac{228994703}{2000000000} \pi_3 + \frac{501398839}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{433488481}{5000000000} \pi_5 + \frac{74173039}{1000000000} \pi_6 + \frac{671334071}{10000000000} \pi_7 + \frac{563496379}{10000000000} \pi_8 + \frac{462890549}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{481080207}{10000000000} \pi_{10} + \frac{344823957}{10000000000} \pi_{11} + \frac{247159531}{10000000000} \pi_{12} + \frac{312743543}{5000000000} \pi_{13} + x_{10} - y_{10} = \\ & \frac{333}{1000} \end{aligned}$$

> res11 :=

$$(1911693146/10^{10}) * \pi_1 + (1568433290/10^{10}) * \pi_2 + (1283851842/10^{10}) * \pi_3 + (1059852526/10^{10}) * \pi_4 + (866771158/10^{10}) * \pi_5 + (703369499/10^{10}) * \pi_6 + (596008322/10^{10}) * \pi_7 + (475752569/10^{10}) * \pi_8 + (373136763/10^{10}) * \pi_9 + (356688207/10^{10}) * \pi_{10} + (247117030/10^{10}) * \pi_{11} + (171205060/10^{10}) * \pi_{12} + (386120580/10^{10}) * \pi_{13} + x_{11} - y_{11} = (367/1000);$$

$$\begin{aligned} \text{res11} := & \frac{955846573}{5000000000} \pi_1 + \frac{156843329}{1000000000} \pi_2 + \frac{641925921}{5000000000} \pi_3 + \frac{529926263}{5000000000} \pi_4 \\ & + \frac{433385579}{5000000000} \pi_5 + \frac{703369499}{10000000000} \pi_6 + \frac{298004161}{5000000000} \pi_7 + \frac{475752569}{10000000000} \pi_8 + \frac{373136763}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{356688207}{10000000000} \pi_{10} + \frac{24711703}{1000000000} \pi_{11} + \frac{8560253}{500000000} \pi_{12} + \frac{19306029}{500000000} \pi_{13} + x_{11} - y_{11} = \frac{367}{1000} \end{aligned}$$

> res12 :=

$$(2277532259/10^{10}) * \pi_1 + (1773891521/10^{10}) * \pi_2 + (1379445442/10^{10}) * \pi_3 + (1079205175/10^{10}) * \pi_4 + (838505279/10^{10}) * \pi_5 + (647697971/10^{10}) * \pi_6 + (517435092/10^{10}) * \pi_7 + (394041462/10^{10}) * \pi_8 + (295769206/10^{10}) * \pi_9 + (262582364/10^{10}) * \pi_{10} + (176014219/10^{10}) * \pi_{11} + (117985863/10^{10}) * \pi_{12} + (239894139/10^{10}) * \pi_{13} + x_{12} - y_{12} = (400/1000);$$

$$\begin{aligned} \text{res12} := & \frac{2277532259}{10000000000} \pi_1 + \frac{1773891521}{10000000000} \pi_2 + \frac{689722721}{5000000000} \pi_3 + \frac{43168207}{400000000} \pi_4 \\ & + \frac{838505279}{10000000000} \pi_5 + \frac{647697971}{10000000000} \pi_6 + \frac{129358773}{2500000000} \pi_7 + \frac{197020731}{5000000000} \pi_8 + \frac{147884603}{5000000000} \pi_9 \end{aligned}$$

$$+ \frac{65645591}{2500000000} \pi_{10} + \frac{176014219}{10000000000} \pi_{11} + \frac{117985863}{10000000000} \pi_{12} + \frac{239894139}{10000000000} \pi_{13} + x/2 - y/2 = \frac{2}{5}$$

> res13 :=

$$(2625869725/10^{10}) * \pi_1 + (1946269025/10^{10}) * \pi_2 + (1440991421/10^{10}) * \pi_3 + (1071510233/10^{10}) * \pi_4 + (792704496/10^{10}) * \pi_5 + (583877866/10^{10}) * \pi_6 + (441514191/10^{10}) * \pi_7 + (321237088/10^{10}) * \pi_8 + (230968936/10^{10}) * \pi_9 + (191554569/10^{10}) * \pi_{10} + (124234725/10^{10}) * \pi_{11} + (80573736/10^{10}) * \pi_{12} + (148693983/10^{10}) * \pi_{13} + x13 - y13 = 433/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res13} := & \frac{105034789}{400000000} \pi_1 + \frac{77850761}{400000000} \pi_2 + \frac{1440991421}{10000000000} \pi_3 + \frac{1071510233}{10000000000} \pi_4 + \frac{49544031}{625000000} \pi_5 \\ & + \frac{291938933}{5000000000} \pi_6 + \frac{441514191}{10000000000} \pi_7 + \frac{10038659}{312500000} \pi_8 + \frac{28871117}{1250000000} \pi_9 + \frac{191554569}{10000000000} \pi_{10} \\ & + \frac{4969389}{400000000} \pi_{11} + \frac{10071717}{1250000000} \pi_{12} + \frac{148693983}{10000000000} \pi_{13} + x/3 - y/3 = \frac{433}{1000} \end{aligned}$$

> res14 :=

$$(2963457673/10^{10}) * \pi_1 + (2091555903/10^{10}) * \pi_2 + (1475091806/10^{10}) * \pi_3 + (1043526063/10^{10}) * \pi_4 + (735445499/10^{10}) * \pi_5 + (516627923/10^{10}) * \pi_6 + (370404393/10^{10}) * \pi_7 + (257477451/10^{10}) * \pi_8 + (177253963/10^{10}) * \pi_9 + (137740691/10^{10}) * \pi_{10} + (86346897/10^{10}) * \pi_{11} + (54129149/10^{10}) * \pi_{12} + (90942579/10^{10}) * \pi_{13} + x14 - y14 = 467/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res14} := & \frac{2963457673}{10000000000} \pi_1 + \frac{2091555903}{10000000000} \pi_2 + \frac{737545903}{5000000000} \pi_3 + \frac{1043526063}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{735445499}{10000000000} \pi_5 + \frac{516627923}{10000000000} \pi_6 + \frac{370404393}{10000000000} \pi_7 + \frac{257477451}{10000000000} \pi_8 \\ & + \frac{177253963}{10000000000} \pi_9 + \frac{137740691}{10000000000} \pi_{10} + \frac{86346897}{10000000000} \pi_{11} + \frac{54129149}{10000000000} \pi_{12} \\ & + \frac{90942579}{10000000000} \pi_{13} + x/4 - y/4 = \frac{467}{1000} \end{aligned}$$

> res15 :=

$$(3270070215/10^{10}) * \pi_1 + (2204744112/10^{10}) * \pi_2 + (1485721899/10^{10}) * \pi_3 + (1003410836/10^{10}) * \pi_4 + (675767477/10^{10}) * \pi_5 + (453990955/10^{10}) * \pi_6 + (309928177/10^{10}) * \pi_7 + (206344518/10^{10}) * \pi_8 + (136292345/10^{10}) * \pi_9 + (99834767/10^{10}) * \pi_{10} + (60552842/10^{10}) * \pi_{11} + (36727159/10^{10}) * \pi_{12} + (56614694/10^{10}) * \pi_{13} + x15 - y15 = 500/1000;$$

$$\text{res15} := \frac{654014043}{2000000000} \pi_1 + \frac{137796507}{625000000} \pi_2 + \frac{1485721899}{10000000000} \pi_3 + \frac{250852709}{2500000000} \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{675767477}{10000000000} \pi_5 + \frac{90798191}{2000000000} \pi_6 + \frac{309928177}{10000000000} \pi_7 + \frac{103172259}{5000000000} \pi_8 + \frac{27258469}{2000000000} \pi_9 \\
& + \frac{99834767}{10000000000} \pi_{10} + \frac{30276421}{5000000000} \pi_{11} + \frac{36727159}{10000000000} \pi_{12} + \frac{28307347}{5000000000} \pi_{13} + x15 - y15 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

> res16 :=

$$\begin{aligned}
& (3556863575/10^{10}) * \pi[1] + (2294264816/10^{10}) * \pi[2] + (1479335071/10^{10}) * \pi[3] + (955398542/10^{10}) * \pi[4] + (615724576/10^{10}) * \pi[5] + (396080811/10^{10}) * \pi[6] \\
& + (258023222/10^{10}) * \pi[7] + (164702363/10^{10}) * \pi[8] + (104449577/10^{10}) * \pi[9] + (72367730/10^{10}) * \pi[10] + (42468410/10^{10}) * \pi[11] \\
& + (24922238/10^{10}) * \pi[12] + (35399058/10^{10}) * \pi[13] + x16 - y16 = 533/1000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res16 := & \frac{719866397}{2000000000} \pi_1 + \frac{143391551}{625000000} \pi_2 + \frac{1479335071}{10000000000} \pi_3 + \frac{477699271}{5000000000} \pi_4 + \frac{19241393}{312500000} \pi_5 \\
& + \frac{396080811}{10000000000} \pi_6 + \frac{129011611}{5000000000} \pi_7 + \frac{164702363}{10000000000} \pi_8 + \frac{104449577}{10000000000} \pi_9 + \frac{7236773}{1000000000} \pi_{10} \\
& + \frac{12461119}{5000000000} \pi_{12} + \frac{17699529}{5000000000} \pi_{13} + x16 - y16 = \frac{533}{1000}
\end{aligned}$$

> res17 :=

$$\begin{aligned}
& (3833147208/10^{10}) * \pi[1] + (2365410674/10^{10}) * \pi[2] + (1459327272/10^{10}) * \pi[3] + (901357551/10^{10}) * \pi[4] + (555852294/10^{10}) * \pi[5] + (342311068/10^{10}) * \pi[6] \\
& + (212895741/10^{10}) * \pi[7] + (130248551/10^{10}) * \pi[8] + (79262483/10^{10}) * \pi[9] + (52014047/10^{10}) * \pi[10] + (29503642/10^{10}) * \pi[11] \\
& + (16735194/10^{10}) * \pi[12] + (21934267/10^{10}) * \pi[13] + x17 - y17 = 567/1000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res17 := & \frac{479143401}{1250000000} \pi_1 + \frac{1182705337}{5000000000} \pi_2 + \frac{182415909}{1250000000} \pi_3 + \frac{901357551}{10000000000} \pi_4 \\
& + \frac{277926147}{5000000000} \pi_5 + \frac{85577767}{2500000000} \pi_6 + \frac{212895741}{10000000000} \pi_7 + \frac{130248551}{10000000000} \pi_8 + \frac{79262483}{10000000000} \pi_9 \\
& + \frac{52014047}{10000000000} \pi_{10} + \frac{14751821}{5000000000} \pi_{11} + \frac{8367597}{5000000000} \pi_{12} + \frac{21934267}{10000000000} \pi_{13} + x17 - y17 = \\
& \frac{567}{1000}
\end{aligned}$$

> res18 := (4084307504/10¹⁰) * pi[1] + (2417130593/10¹⁰) * pi[2] + (1430240872/10¹⁰) * pi[3] + (846992443/10¹⁰) * pi[4] + (500998688/10¹⁰) * pi[5] + (296033741/10¹⁰) * pi[6] + (176289215/10¹⁰) * pi[7] + (103584297/10¹⁰) * pi[8] + (60599245/10¹⁰) * pi[9] + (37820141/10¹⁰) * pi[10] + (20756135/10¹⁰) * pi[11] + (11391206/10¹⁰) * pi[12] + (13855915/10¹⁰) * pi[13] + x18 - y18 = 600/1000;

$$res18 := \frac{255269219}{625000000} \pi_1 + \frac{2417130593}{10000000000} \pi_2 + \frac{178780109}{1250000000} \pi_3 + \frac{846992443}{10000000000} \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15656209}{312500000} \pi_5 + \frac{296033741}{10000000000} \pi_6 + \frac{35257843}{20000000000} \pi_7 + \frac{103584297}{100000000000} \pi_8 + \frac{12119849}{200000000000} \pi_9 \\
& + \frac{37820141}{100000000000} \pi_{10} + \frac{4151227}{200000000000} \pi_{11} + \frac{5695603}{500000000000} \pi_{12} + \frac{2771183}{2000000000000} \pi_{13} + x18 - y18 = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

> res19 :=

$$\begin{aligned}
& (4320298872/10^{10}) * \pi[1] + (2454413326/10^{10}) * \pi[2] + (1394220112/10^{10}) * \pi[3] + (792459814/10^{10}) * \pi[4] + (450024667/10^{10}) * \pi[5] + (255361100/10^{10}) * \pi[6] \\
& + (145794841/10^{10}) * \pi[7] + (82335224/10^{10}) * \pi[8] + (46331513/10^{10}) * \pi[9] + (27558898/10^{10}) * \pi[10] + (14633674/10^{10}) * \pi[11] \\
& + (7770428/10^{10}) * \pi[12] + (8797524/10^{10}) * \pi[13] + x19 - y19 = 633/1000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res19 := & \frac{540037359}{1250000000} \pi_1 + \frac{1227206663}{5000000000} \pi_2 + \frac{87138757}{625000000} \pi_3 + \frac{396229907}{5000000000} \pi_4 \\
& + \frac{450024667}{10000000000} \pi_5 + \frac{2553611}{1000000000} \pi_6 + \frac{145794841}{100000000000} \pi_7 + \frac{10291903}{1250000000} \pi_8 + \frac{46331513}{100000000000} \pi_9 \\
& + \frac{13779449}{50000000000} \pi_{10} + \frac{7316837}{50000000000} \pi_{11} + \frac{1942607}{25000000000} \pi_{12} + \frac{2199381}{25000000000} \pi_{13} + x19 - y19 = \frac{633}{1000}
\end{aligned}$$

> res20 :=

$$\begin{aligned}
& (4549093390/10^{10}) * \pi[1] + (2480045891/10^{10}) * \pi[2] + (1351948585/10^{10}) * \pi[3] + (737308682/10^{10}) * \pi[4] + (401836261/10^{10}) * \pi[5] + (218874280/10^{10}) * \pi[6] \\
& + (119793892/10^{10}) * \pi[7] + (64986800/10^{10}) * \pi[8] + (35152142/10^{10}) * \pi[9] + (19937481/10^{10}) * \pi[10] + (10232832/10^{10}) * \pi[11] \\
& + (5251961/10^{10}) * \pi[12] + (5537802/10^{10}) * \pi[13] + x20 - y20 = 667/1000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res20 := & \frac{454909339}{10000000000} \pi_1 + \frac{2480045891}{100000000000} \pi_2 + \frac{270389717}{20000000000} \pi_3 + \frac{368654341}{50000000000} \pi_4 \\
& + \frac{401836261}{100000000000} \pi_5 + \frac{5471857}{2500000000} \pi_6 + \frac{29948473}{25000000000} \pi_7 + \frac{162467}{250000000} \pi_8 + \frac{17576071}{50000000000} \pi_9 \\
& + \frac{19937481}{100000000000} \pi_{10} + \frac{9993}{9765625} \pi_{11} + \frac{5251961}{100000000000} \pi_{12} + \frac{2768901}{50000000000} \pi_{13} + x20 - y20 = \frac{667}{1000}
\end{aligned}$$

> obj := (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/1000) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11+y11) * (14/1000) + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000) + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000);

$$\begin{aligned}
obj := & \frac{143}{1000} y1 + \frac{43}{250} x2 + \frac{43}{250} y2 + \frac{57}{500} x4 + \frac{57}{500} y4 + \frac{143}{1000} x3 + \frac{143}{1000} y3 + \frac{43}{500} x6 + \frac{43}{500} y6 \\
& + \frac{1}{10} x5 + \frac{1}{10} y5 + \frac{29}{1000} x10 + \frac{29}{1000} y10 + \frac{43}{1000} x9 + \frac{43}{1000} y9 + \frac{57}{1000} x8 + \frac{57}{1000} y8 + \frac{9}{125} x7 \\
& + \frac{9}{125} y7 + \frac{7}{500} x11 + \frac{7}{500} y11 + \frac{7}{1000} x12 + \frac{7}{1000} y12 + \frac{3}{1000} y15 + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{250} y14
\end{aligned}$$

```

+  $\frac{3}{500}x_{13} + \frac{3}{500}y_{13} + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{1}{1000}x_{18} + \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{17} + \frac{1}{1000}y_{17} + \frac{1}{1000}x_{16}$ 
+  $\frac{1}{1000}y_{16} + \frac{3}{1000}x_{15} + \frac{1}{1000}x_{20} + \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}x_{19} + \frac{1}{1000}y_{19}$ 
> dese := (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + (
x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1
000) + (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x1
1-y11) * (14/1000) + (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14)
* (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/100
0) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000) ;
dese := -  $\frac{143}{1000}y_1 + \frac{43}{250}x_2 - \frac{43}{250}y_2 + \frac{57}{500}x_4 - \frac{57}{500}y_4 + \frac{143}{1000}x_3 - \frac{143}{1000}y_3 + \frac{43}{500}x_6 - \frac{43}{500}y_6$ 
+  $\frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}y_5 + \frac{29}{1000}x_{10} - \frac{29}{1000}y_{10} + \frac{43}{1000}x_9 - \frac{43}{1000}y_9 + \frac{57}{1000}x_8 - \frac{57}{1000}y_8 + \frac{9}{125}x_7$ 
-  $\frac{9}{125}y_7 + \frac{7}{500}x_{11} - \frac{7}{500}y_{11} + \frac{7}{1000}x_{12} - \frac{7}{1000}y_{12} - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{250}x_{14} - \frac{1}{250}y_{14}$ 
+  $\frac{3}{500}x_{13} - \frac{3}{500}y_{13} + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{1}{1000}x_{18} - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{1000}y_{17} + \frac{1}{1000}x_{16}$ 
-  $\frac{1}{1000}y_{16} + \frac{3}{1000}x_{15} + \frac{1}{1000}x_{20} - \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{19}$ 
> res21:=pi[1]>=pi[2];
res21 :=  $\pi_2 \leq \pi_1$ 
> res22:=pi[2]>=pi[3];
res22 :=  $\pi_3 \leq \pi_2$ 
> res23:=pi[3]>=pi[4];
res23 :=  $\pi_4 \leq \pi_3$ 
> res24:=pi[4]>=pi[5];
res24 :=  $\pi_5 \leq \pi_4$ 
> res25:=pi[5]>=pi[6];
res25 :=  $\pi_6 \leq \pi_5$ 
> res26:=pi[6]>=pi[7];
res26 :=  $\pi_7 \leq \pi_6$ 
> res27:=pi[7]>=pi[8];
res27 :=  $\pi_8 \leq \pi_7$ 
> res28:=pi[8]>=pi[9];
res28 :=  $\pi_9 \leq \pi_8$ 
> res29:=pi[9]>=pi[10];
res29 :=  $\pi_{10} \leq \pi_9$ 
> res30:=pi[10]>=pi[11];
res30 :=  $\pi_{11} \leq \pi_{10}$ 

```



```

> res31:=pi[11]>=pi[12];
                                res31 :=  $\pi_{12} \leq \pi_{11}$ 
> res32:=pi[12]>=pi[13];
                                res32 :=  $\pi_{13} \leq \pi_{12}$ 
>

```

■ Añadimos la restricción de equilibrio financiero

```

> res33:=(x1-y1)*(143/1000)+(x2-y2)*(172/1000)+(x3-y3)*(143/1000)+
(x4-y4)*(114/1000)+(x5-y5)*(1/10)+(x6-y6)*(86/1000)+(x7-y7)*(72/
1000)+(x8-y8)*(57/1000)+(x9-y9)*(43/1000)+(x10-y10)*(29/1000)+(x
11-y11)*(14/1000)+(x12-y12)*(7/1000)+(x13-y13)*(6/1000)+(x14-y14
)*(4/1000)+(x15-y15)*(3/1000)+(x16-y16)*(1/1000)+(x17-y17)*(1/10
00)+(x18-y18)*(1/1000)+(x19-y19)*(1/1000)+(x20-y20)*(1/1000)=0;
res33 := - $\frac{143}{1000}y_1 + \frac{43}{250}x_2 - \frac{43}{250}y_2 + \frac{57}{500}x_4 - \frac{57}{500}y_4 + \frac{143}{1000}x_3 - \frac{143}{1000}y_3 + \frac{43}{500}x_6$ 
- $\frac{43}{500}y_6 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{1}{10}y_5 + \frac{29}{1000}x_{10} - \frac{29}{1000}y_{10} + \frac{43}{1000}x_9 - \frac{43}{1000}y_9 + \frac{57}{1000}x_8 - \frac{57}{1000}y_8$ 
+ $\frac{9}{125}x_7 - \frac{9}{125}y_7 + \frac{7}{500}x_{11} - \frac{7}{500}y_{11} + \frac{7}{1000}x_{12} - \frac{7}{1000}y_{12} - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{1}{250}x_{14}$ 
- $\frac{1}{250}y_{14} + \frac{3}{500}x_{13} - \frac{3}{500}y_{13} + \frac{143}{1000}x_1 + \frac{1}{1000}x_{18} - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{1000}y_{17}$ 
+ $\frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{3}{1000}x_{15} + \frac{1}{1000}x_{20} - \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}x_{19} - \frac{1}{1000}y_{19} = 0$ 
>

```

■ No obligamos a que en ninguna clase se pague la siniestralidad media

```

> sol1Norberg3:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res
7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,r
es18,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,re
s28,res29,res30,res31,res32,res33},NONNEGATIVE):
> solulNorberg3:=evalf(sol1Norberg3):
> 'objsol1Norberg3'=subs(solulNorberg3,obj);
                                objsol1Norberg3 = .006091941811
>

```

■ Añadimos las restricciones de que la prima aumente un porcentaje de la prima en el nivel anterior

```

> sol2Norberg3:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,
res7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,r
es17,res18,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26

```

```

, res27, res28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[1] <= 5*pi[13]
, pi[1] >= 101/100*pi[2], pi[2] >= 101/100*pi[3], pi[3] >= 101/100*
pi[4], pi[4] >= 101/100*pi[5], pi[5] >= 101/100*pi[6], pi[6] >= 101
/100*pi[7], pi[7] >= 101/100*pi[8], pi[8] >= 101/100*pi[9], pi[9]
>= 101/100*pi[10], pi[10] >= 101/100*pi[11], pi[11] >= 101/100*pi
[12], pi[12] >= 101/100*pi[13]}, NONNEGATIVE) :
> solu2Norberg3 := evalf(sol2Norberg3);
solu2Norberg3 := {  $\pi_7 = .3520740774$ ,  $x_{11} = .03663673936$ ,  $x_{14} = .1112288536$ ,
 $y_2 = .01901749823$ ,  $x_{10} = .01911098703$ ,  $\pi_{12} = .07549421300$ ,  $\pi_9 = .3451368272$ ,
 $\pi_6 = .3555948182$ ,  $x_4 = .007785431439$ ,  $x_{19} = .2655948490$ ,  $\pi_2 = .3700333938$ ,
 $\pi_3 = .3663696968$ ,  $\pi_1 = .3737337277$ ,  $\pi_{11} = .07624915513$ ,  $\pi_4 = .3627422741$ ,
 $x_7 = .03997186167$ ,  $x_{17} = .2022297247$ ,  $x_6 = .006971861668$ ,  $\pi_{10} = .07701164668$ ,
 $\pi_8 = .3485881955$ ,  $x_{16} = .1690917835$ ,  $x_{20} = .2987145847$ ,  $x_9 = .007796573030$ ,
 $\pi_5 = .3591507664$ ,  $x_{12} = .05819861536$ ,  $y_{15} = 0$ ,  $y_{12} = 0$ ,  $y_7 = 0$ ,  $y_4 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,
 $y_{20} = 0$ ,  $y_{16} = 0$ ,  $y_{17} = 0$ ,  $y_{18} = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $y_{13} = 0$ ,  $y_{14} = 0$ ,  $y_{19} = 0$ ,  $y_6 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,
 $y_8 = 0$ ,  $y_9 = 0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $y_5 = 0$ ,  $y_{11} = 0$ ,  $x_8 = .002701576644$ ,  $x_{18} = .2337217447$ ,
 $x_{13} = .08309343554$ ,  $x_5 = .009849200974$ ,  $y_3 = .001660996228$ ,  $x_{15} = .1402196831$ ,
 $\pi_{13} = .07474674554$ ,  $y_1 = .04432681695$  }
> 'objsol2Norberg3' = subs(solu2Norberg3, obj);
objsol2Norberg3 = .01969453393

```

■ **Obligamos a que la siniestralidad media se pague en la clase**

6

```

> sol3Norberg3 := minimize(obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6, res
7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, res17, r
es18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26, res27, re
s28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[6] = 152/1000}, NONNEGATIVE
):
> solu3Norberg3 := evalf(sol3Norberg3);
solu3Norberg3 := {  $x_{20} = .1910122792$ ,  $y_{15} = 0$ ,  $y_{12} = 0$ ,  $x_{11} = 0$ ,  $y_7 = 0$ ,  $x_8 = 0$ ,  $x_9 = 0$ ,
 $x_{10} = 0$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $y_{20} = 0$ ,  $y_{16} = 0$ ,  $y_{17} = 0$ ,  $y_{18} = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $y_{13} = 0$ ,  $y_{14} = 0$ ,
 $y_{19} = 0$ ,  $x_{12} = 0$ ,  $y_6 = 0$ ,  $y_5 = 0$ ,  $\pi_{10} = .1520000000$ ,  $\pi_8 = .1520000000$ ,  $\pi_6 = .1520000000$ ,
 $y_2 = .01692798518$ ,  $\pi_4 = .4923663412$ ,  $y_{10} = .01299270838$ ,  $x_{14} = .03299101682$ ,
 $y_8 = .003117987309$ ,  $\pi_{13} = .06358943669$ ,  $\pi_1 = .4923663412$ ,  $x_4 = .01434039451$ ,
 $x_7 = .04894985386$ ,  $x_3 = .001663037567$ ,  $y_{11} = .009311857089$ ,  $\pi_5 = .4923663412$ ,
 $y_1 = .03975841962$ ,  $x_{15} = .05443373111$ ,  $x_{13} = .01419630579$ ,  $\pi_3 = .4923663412$ ,
 $x_5 = .01921734504$ ,  $x_{19} = .1607448297$ ,  $x_{17} = .1049467688$ ,  $\pi_7 = .1520000000$ ,

```

```

x6 = .01594985386,  $\pi_2$  = .4923663412, y9 = .01057655022,  $\pi_9$  = .1520000000,
 $\pi_{11}$  = .1520000000, x18 = .1322737651,  $\pi_{12}$  = .1520000000, x16 = .07688743801 }
> 'objsol3Norberg3' = subs (solu3Norberg3, obj) ;
      objsol3Norberg3 = .01947347787

```

▣ Añadimos las restricciones de que la prima aumente un porcentaje de la prima en el nivel anterior

```

> solu4Norberg3 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6,
res7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, r
es17, res18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26
, res27, res28, res29, res30, res31, res32, res33, pi [6]=152/1000,
pi [1]<=5*pi [13], pi [1]>=101/100*pi [2], pi [2]>=101/100*pi [3],
pi [3]>=101/100*pi [4], pi [4]>=101/100*pi [5], pi [5]>=101/100*p
i [6], pi [6]>=101/100*pi [7], pi [7]>=101/100*pi [8], pi [8]>=101/
100*pi [9], pi [9]>=101/100*pi [10], pi [10]>=101/100*pi [11], pi [
11]>=101/100*pi [12], pi [12]>=101/100*pi [13]}, NONNEGATIVE) :
> solu4Norberg3 := evalf (solu4Norberg3) ;
solu4Norberg3 := {x9 = .01097986996, y15 = 0, y12 = 0, y7 = 0,  $\pi_{11}$  = .09557560521,
 $\pi_2$  = .4638237040,  $\pi_{10}$  = .09653136126, x4 = .01495404183,  $\pi_1$  = .4684619410,
y1 = .06147104357, y3 = .004465387174, x20 = .2181533917, x18 = .1594154791,
x16 = .1037117789, x7 = .06076372127,  $\pi_3$  = .4592313901, y2 = .03045113126,
x8 = .01607792991, x12 = .02541450582, x13 = .04022879535, x15 = .08120324006,
 $\pi_9$  = .1475297025,  $\pi_8$  = .1490049995, x5 = .02597100974,  $\pi_7$  = .1504950495, y4 = 0,
 $\pi_5$  = .4501827175, x11 = .01523046886, x2 = 0, y20 = 0, x19 = .1879028712, y16 = 0,
y17 = 0,  $\pi_{12}$  = .09462931209,  $\pi_4$  = .4546845446, x6 = .02776372127,
x14 = .05946722651, y18 = 0, x1 = 0, x10 = .01028295376, y13 = 0, y14 = 0,
x17 = .1320293721,  $\pi_{13}$  = .09369238821, y19 = 0, y6 = 0, x3 = 0, y8 = 0, y9 = 0,
y10 = 0, y5 = 0, y11 = 0,  $\pi_6$  = .1520000000 }
> 'objsol4Norberg3' = subs (solu4Norberg3, obj) ;
      objsol4Norberg3 = .029333300834

```

▣ Obligamos a que la siniestralidad media se pague en la clase 12

```

> solu5Norberg3 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6, res
7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, res17, r
es18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26, res27, re
s28, res29, res30, res31, res32, res33, pi [12]=152/1000}, NONNEGATIV
E) :
> solu5Norberg3 := evalf (solu5Norberg3) ;
solu5Norberg3 := {x13 = .02663878734, y10 = .009128344489,  $\pi_2$  = .2964586343,

```

```

 $\pi_{11} = .2964586343, y5 = .002612610106, x18 = .1248137338, \pi_5 = .2964586343,$ 
 $x19 = .1472596312, x17 = .1031438353, y1 = .005688968474, \pi_3 = .2964586343,$ 
 $x16 = .07990569686, \pi_4 = .2964586343, x15 = .06212832178, x7 = .02504603121,$ 
 $x4 = .001322353734, x3 = .002296442894, x20 = .1710881403, \pi_8 = .2964586343,$ 
 $y6 = .007953968793, x14 = .04380776674, \pi_9 = .2964586343, y8 = .01540854703,$ 
 $\pi_{13} = .01415173239, \pi_6 = .2964586343, y9 = .01424628806, \pi_{10} = .2964586343,$ 
 $\pi_7 = .2964586343, \pi_1 = .7354151765, x12 = .01204438219, y15 = 0, y12 = 0, x11 = 0,$ 
 $y7 = 0, x8 = 0, x9 = 0, x10 = 0, x5 = 0, x6 = 0, y3 = 0, y4 = 0, y2 = 0, x2 = 0, y20 = 0,$ 
 $y16 = 0, y17 = 0, y18 = 0, x1 = 0, y13 = 0, y14 = 0, y19 = 0, y11 = 0, \pi_{12} = .1520000000 \}$ 

```

```
> 'objsol5Norberg3'=subs(solu5Norberg3,obj);
```

```
objsol5Norberg3 = .007028848751
```

■ Añadimos las restricciones de que la prima aumente un porcentaje de la prima en el nivel anterior

```

> solu6Norberg3:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,
res7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,r
es17,res18,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26
,res27,res28,res29,res30,res31,res32,res33,pi[12]=152/1000
,pi[1]<=5*pi[13],pi[1]>=101/100*pi[2],pi[2]>=101/100*pi[3]
,pi[3]>=101/100*pi[4],pi[4]>=101/100*pi[5],pi[5]>=101/100*
pi[6],pi[6]>=101/100*pi[7],pi[7]>=101/100*pi[8],pi[8]>=101
/100*pi[9],pi[9]>=101/100*pi[10],pi[10]>=101/100*pi[11],pi
[11]>=101/100*pi[12],pi[12]>=101/100*pi[13]},NONNEGATIVE):
> solu6Norberg3:=evalf(solu6Norberg3);

```

```
solu6Norberg3 := {x5 = .003661624384,  $\pi_5 = .3185084724, x7 = .03923856437,$ 
```

```
x16 = .2094326297, x19 = .3067403420, x13 = .1192753002, x10 = .04539350795,
```

```
 $\pi_2 = .3281595976, \pi_1 = .3314411935, \pi_{11} = .1535200000, y1 = .04360294832,$ 
```

```
x15 = .1792345630, x14 = .1490916100,  $\pi_{13} = .06628823871, \pi_4 = .3216935571,$ 
```

```
x9 = .02850458652, y15 = 0, y12 = 0, y7 = 0, x4 = 0, x2 = 0, y20 = 0, y16 = 0, y17 = 0,
```

```
y18 = 0, x1 = 0, y13 = 0, y14 = 0, y19 = 0, x12 = .09208408594, x20 = .3400850348,
```

```
x18 = .2745673050, x11 = .06734800773,  $\pi_3 = .3249104926, x17 = .2426609041,$ 
```

```
x6 = .006238564367,  $\pi_{10} = .1550552000, y6 = 0, x8 = .01666536897,$ 
```

```
 $\pi_8 = .3091411853, y4 = .001245588634, \pi_7 = .3122325971, y3 = .01029786223,$ 
```

```
 $\pi_6 = .3153549231, \pi_9 = .3060803815, y2 = .02430666531, x3 = 0, y8 = 0, y9 = 0,$ 
```

```
y10 = 0, y5 = 0, y11 = 0,  $\pi_{12} = .1520000000 \}$ 
```

```
> 'objsol6Norberg3'=subs(solu6Norberg3,obj);
```

```
objsol6Norberg3 = .02406111889
```

```
>
```

pro-lin-Noru75

≡ Programa lineal de Noruega 75

```
> restart;
```

```
> with(simplex):
```

```
Warning, new definition for maximize
```

```
Warning, new definition for minimize
```

```
> res1 :=
```

```
(117/10^10)*pi[1]+(313/10^10)*pi[2]+(2075/10^10)*pi[3]+(7421/10^10)*pi[4]+(46713/10^10)*pi[5]+(120506/10^10)*pi[6]+(884562/10^10)*pi[7]+(1865342/10^10)*pi[8]+(17030098/10^10)*pi[9]+(26458822/10^10)*pi[10]+(323107673/10^10)*pi[11]+(312619132/10^10)*pi[12]+(9317857227/10^10)*pi[13]+x1-y1 = (33/1000);
```

$$\begin{aligned} res1 := & \frac{117}{10000000000} \pi_1 + \frac{313}{10000000000} \pi_2 + \frac{83}{4000000000} \pi_3 + \frac{7421}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{46713}{10000000000} \pi_5 + \frac{60253}{50000000000} \pi_6 + \frac{442281}{50000000000} \pi_7 + \frac{932671}{50000000000} \pi_8 + \frac{8515049}{50000000000} \pi_9 \\ & + \frac{13229411}{50000000000} \pi_{10} + \frac{323107673}{100000000000} \pi_{11} + \frac{78154783}{25000000000} \pi_{12} + \frac{9317857227}{100000000000} \pi_{13} + x1 - y1 = \frac{33}{1000} \end{aligned}$$

```
> res2 :=
```

```
(10716/10^10)*pi[1]+(22748/10^10)*pi[2]+(81813/10^10)*pi[3]+(278861/10^10)*pi[4]+(965881/10^10)*pi[5]+(2123977/10^10)*pi[6]+(8249332/10^10)*pi[7]+(15527029/10^10)*pi[8]+(72279468/10^10)*pi[9]+(104793493/10^10)*pi[10]+(634806202/10^10)*pi[11]+(593667715/10^10)*pi[12]+(8567192761/10^10)*pi[13]+x2-y2 = (67/1000);
```

$$\begin{aligned} res2 := & \frac{2679}{25000000000} \pi_1 + \frac{5687}{25000000000} \pi_2 + \frac{81813}{100000000000} \pi_3 + \frac{278861}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{965881}{100000000000} \pi_5 + \frac{2123977}{100000000000} \pi_6 + \frac{2062333}{25000000000} \pi_7 + \frac{15527029}{100000000000} \pi_8 + \frac{18069867}{25000000000} \pi_9 \\ & + \frac{104793493}{100000000000} \pi_{10} + \frac{317403101}{50000000000} \pi_{11} + \frac{118733543}{20000000000} \pi_{12} + \frac{8567192761}{100000000000} \pi_{13} + x2 - y2 = \frac{67}{1000} \end{aligned}$$

```
> res3 :=
```

```
(145925/10^10)*pi[1]+(257587/10^10)*pi[2]+(670146/10^10)*pi[3]+(2213165/10^10)*pi[4]+(5601108/10^10)*pi[5]+(10783388/10^10)*pi[6]+(29783247/10^10)*pi[7]+(50714245/10^10)*pi[8]+(163064122/10^10)*pi[9]+(221680971/10^10)*pi[10]+(905480159/10^10)*pi[11]+(819312321/10^10)*pi[12]+(7790293614/10^10)*pi[13]+x3-y3 = (100/1000);
```

$$res3 := \frac{5837}{4000000000} \pi_1 + \frac{257587}{100000000000} \pi_2 + \frac{335073}{50000000000} \pi_3 + \frac{442633}{20000000000} \pi_4 + \frac{1400277}{25000000000} \pi_5$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2695847}{2500000000} \pi_6 + \frac{29783247}{10000000000} \pi_7 + \frac{10142849}{2000000000} \pi_8 + \frac{81532061}{5000000000} \pi_9 + \frac{221680971}{10000000000} \pi_{10} \\
& + \frac{905480159}{10000000000} \pi_{11} + \frac{819312321}{10000000000} \pi_{12} + \frac{3895146807}{5000000000} \pi_{13} + x^3 - y^3 = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

> res4 :=

$$\begin{aligned}
& (953934/10^{10}) * \pi_1 + (1436987/10^{10}) * \pi_2 + (2997821/10^{10}) * \pi_3 \\
& + (9703595/10^{10}) * \pi_4 + (19832261/10^{10}) * \pi_5 + (33972041/10^{10}) * \pi_6 \\
& + (74280657/10^{10}) * \pi_7 + (115363098/10^{10}) * \pi_8 + (286717239/10^{10}) * \pi_9 \\
& + (366384377/10^{10}) * \pi_{10} + (1131817826/10^{10}) * \pi_{11} + (990866996/10^{10}) * \pi_{12} \\
& + (6965673165/10^{10}) * \pi_{13} + x^4 - y^4 = (133/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res4 := & \frac{476967}{5000000000} \pi_1 + \frac{1436987}{10000000000} \pi_2 + \frac{2997821}{10000000000} \pi_3 + \frac{1940719}{2000000000} \pi_4 \\
& + \frac{19832261}{10000000000} \pi_5 + \frac{33972041}{10000000000} \pi_6 + \frac{74280657}{10000000000} \pi_7 + \frac{57681549}{5000000000} \pi_8 + \frac{286717239}{10000000000} \pi_9 \\
& + \frac{366384377}{10000000000} \pi_{10} + \frac{565908913}{5000000000} \pi_{11} + \frac{247716749}{2500000000} \pi_{12} + \frac{1393134633}{2000000000} \pi_{13} + x^4 - y^4 = \frac{133}{1000}
\end{aligned}$$

> res5 :=

$$\begin{aligned}
& (4259152/10^{10}) * \pi_1 + (5557138/10^{10}) * \pi_2 + (9766462/10^{10}) * \pi_3 \\
& + (31259918/10^{10}) * \pi_4 + (54103891/10^{10}) * \pi_5 + (83247175/10^{10}) * \pi_6 \\
& + (151806997/10^{10}) * \pi_7 + (215969315/10^{10}) * \pi_8 + (438657861/10^{10}) * \pi_9 \\
& + (527120748/10^{10}) * \pi_{10} + (1303958369/10^{10}) * \pi_{11} + (1103409060/10^{10}) * \pi_{12} \\
& + (6070883914/10^{10}) * \pi_{13} + x^5 - y^5 = (167/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res5 := & \frac{266197}{625000000} \pi_1 + \frac{2778569}{5000000000} \pi_2 + \frac{4883231}{5000000000} \pi_3 + \frac{15629959}{5000000000} \pi_4 + \frac{54103891}{10000000000} \pi_5 \\
& + \frac{3329887}{400000000} \pi_6 + \frac{151806997}{10000000000} \pi_7 + \frac{43193863}{2000000000} \pi_8 + \frac{438657861}{10000000000} \pi_9 + \frac{131780187}{2500000000} \pi_{10} \\
& + \frac{1303958369}{10000000000} \pi_{11} + \frac{55170453}{5000000000} \pi_{12} + \frac{3035441957}{5000000000} \pi_{13} + x^5 - y^5 = \frac{167}{1000}
\end{aligned}$$

> res6 :=

$$\begin{aligned}
& (13697558/10^{10}) * \pi_1 + (15770376/10^{10}) * \pi_2 + (24245585/10^{10}) * \pi_3 \\
& + (77330064/10^{10}) * \pi_4 + (117515929/10^{10}) * \pi_5 + (164570641/10^{10}) * \pi_6 \\
& + (260565143/10^{10}) * \pi_7 + (342431688/10^{10}) * \pi_8 + (594075320/10^{10}) * \pi_9 \\
& + (673897092/10^{10}) * \pi_{10} + (1398655489/10^{10}) * \pi_{11} + (1145122259/10^{10}) * \pi_{12} \\
& + (5172122857/10^{10}) * \pi_{13} + x^6 - y^6 = (200/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res6 := & \frac{6848779}{5000000000} \pi_1 + \frac{1971297}{1250000000} \pi_2 + \frac{4849117}{2000000000} \pi_3 + \frac{4833129}{625000000} \pi_4 + \frac{117515929}{10000000000} \pi_5 \\
& + \frac{164570641}{10000000000} \pi_6 + \frac{260565143}{10000000000} \pi_7 + \frac{42803961}{1250000000} \pi_8 + \frac{14851883}{2500000000} \pi_9 + \frac{168474273}{2500000000} \pi_{10}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1398655489}{10000000000} \pi_{11} + \frac{1145122259}{10000000000} \pi_{12} + \frac{5172122857}{10000000000} \pi_{13} + x6 - y6 = \frac{1}{5}$$

> res7 :=

$$(35803046/10^{10}) * \pi_1 + (36776528/10^{10}) * \pi_2 + (50517533/10^{10}) * \pi_3 + (161509365/10^{10}) * \pi_4 + (219895716/10^{10}) * \pi_5 + (282523316/10^{10}) * \pi_6 + (397329046/10^{10}) * \pi_7 + (484719618/10^{10}) * \pi_8 + (736784396/10^{10}) * \pi_9 + (790405524/10^{10}) * \pi_{10} + (1414132199/10^{10}) * \pi_{11} + (1120209867/10^{10}) * \pi_{12} + (4269393847/10^{10}) * \pi_{13} + x7 - y7 = (233/1000);$$

$$\begin{aligned} \text{res7} := & \frac{17901523}{5000000000} \pi_1 + \frac{2298533}{625000000} \pi_2 + \frac{50517533}{10000000000} \pi_3 + \frac{32301873}{2000000000} \pi_4 + \frac{54973929}{2500000000} \pi_5 \\ & + \frac{70630829}{2500000000} \pi_6 + \frac{198664523}{5000000000} \pi_7 + \frac{242359809}{5000000000} \pi_8 + \frac{184196099}{2500000000} \pi_9 + \frac{197601381}{2500000000} \pi_{10} \\ & + \frac{1414132199}{10000000000} \pi_{11} + \frac{1120209867}{10000000000} \pi_{12} + \frac{4269393847}{10000000000} \pi_{13} + x7 - y7 = \frac{233}{1000} \end{aligned}$$

> res8 :=

$$(81085379/10^{10}) * \pi_1 + (74735718/10^{10}) * \pi_2 + (92836046/10^{10}) * \pi_3 + (299075099/10^{10}) * \pi_4 + (369004973/10^{10}) * \pi_5 + (436819723/10^{10}) * \pi_6 + (552909641/10^{10}) * \pi_7 + (627499805/10^{10}) * \pi_8 + (848355863/10^{10}) * \pi_9 + (860723874/10^{10}) * \pi_{10} + (1349009323/10^{10}) * \pi_{11} + (1032900111/10^{10}) * \pi_{12} + (3375044448/10^{10}) * \pi_{13} + x8 - y8 = (267/1000);$$

$$\begin{aligned} \text{res8} := & \frac{81085379}{10000000000} \pi_1 + \frac{37367859}{5000000000} \pi_2 + \frac{46418023}{5000000000} \pi_3 + \frac{299075099}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{369004973}{10000000000} \pi_5 + \frac{436819723}{10000000000} \pi_6 + \frac{552909641}{10000000000} \pi_7 + \frac{125499961}{2000000000} \pi_8 + \frac{848355863}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{430361937}{5000000000} \pi_{10} + \frac{1349009323}{10000000000} \pi_{11} + \frac{1032900111}{10000000000} \pi_{12} + \frac{105470139}{312500000} \pi_{13} + x8 - y8 = \frac{267}{1000} \end{aligned}$$

> res9 :=

$$(156074956/10^{10}) * \pi_1 + (130430534/10^{10}) * \pi_2 + (148575699/10^{10}) * \pi_3 + (484227523/10^{10}) * \pi_4 + (548720654/10^{10}) * \pi_5 + (603277617/10^{10}) * \pi_6 + (697699867/10^{10}) * \pi_7 + (740944992/10^{10}) * \pi_8 + (906461577/10^{10}) * \pi_9 + (872555176/10^{10}) * \pi_{10} + (1221013507/10^{10}) * \pi_{11} + (904549045/10^{10}) * \pi_{12} + (2585468847/10^{10}) * \pi_{13} + x9 - y9 = (300/1000);$$

$$\begin{aligned} \text{res9} := & \frac{39018739}{2500000000} \pi_1 + \frac{65215267}{5000000000} \pi_2 + \frac{148575699}{10000000000} \pi_3 + \frac{484227523}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{274360327}{5000000000} \pi_5 + \frac{603277617}{10000000000} \pi_6 + \frac{697699867}{10000000000} \pi_7 + \frac{23154531}{312500000} \pi_8 + \frac{906461577}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{109069397}{1250000000} \pi_{10} + \frac{1221013507}{10000000000} \pi_{11} + \frac{180909809}{2000000000} \pi_{12} + \frac{2585468847}{10000000000} \pi_{13} + x9 - y9 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

> res10 :=

```
(267882253/10^10)*pi[1]+(204175575/10^10)*pi[2]+(215043125/10^10)
)*pi[3]+(711538257/10^10)*pi[4]+(746386741/10^10)*pi[5]+(7656605
17/10^10)*pi[6]+(816357711/10^10)*pi[7]+(813857972/10^10)*pi[8]+
(910433601/10^10)*pi[9]+(832633778/10^10)*pi[10]+(1052490586/10^
10)*pi[11]+(754393880/10^10)*pi[12]+(1909146002/10^10)*pi[13]+x1
0-y10 = (333/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res10} := & \frac{267882253}{10000000000} \pi_1 + \frac{8167023}{4000000000} \pi_2 + \frac{344069}{16000000} \pi_3 + \frac{711538257}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{746386741}{10000000000} \pi_5 + \frac{765660517}{10000000000} \pi_6 + \frac{816357711}{10000000000} \pi_7 + \frac{203464493}{2500000000} \pi_8 + \frac{910433601}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{416316889}{5000000000} \pi_{10} + \frac{526245293}{5000000000} \pi_{11} + \frac{18859847}{2500000000} \pi_{12} + \frac{954573001}{5000000000} \pi_{13} + x10 - y10 = \frac{333}{1000} \end{aligned}$$

```
> res11 :=
(422858364/10^10)*pi[1]+(294639131/10^10)*pi[2]+(288173384/10^10
)*pi[3]+(971575667/10^10)*pi[4]+(947296114/10^10)*pi[5]+(9085448
36/10^10)*pi[6]+(897418891/10^10)*pi[7]+(840746907/10^10)*pi[8]+
(865099539/10^10)*pi[9]+(751521801/10^10)*pi[10]+(863857791/10^1
0)*pi[11]+(598489006/10^10)*pi[12]+(1349778568/10^10)*pi[13]+x11
-y11 = (367/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res11} := & \frac{105714591}{25000000000} \pi_1 + \frac{294639131}{100000000000} \pi_2 + \frac{36021673}{12500000000} \pi_3 + \frac{971575667}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{473648057}{50000000000} \pi_5 + \frac{227136209}{25000000000} \pi_6 + \frac{897418891}{100000000000} \pi_7 + \frac{840746907}{100000000000} \pi_8 + \frac{865099539}{100000000000} \pi_9 \\ & + \frac{751521801}{100000000000} \pi_{10} + \frac{863857791}{100000000000} \pi_{11} + \frac{299244503}{50000000000} \pi_{12} + \frac{168722321}{12500000000} \pi_{13} + x11 - y11 = \\ & \frac{367}{1000} \end{aligned}$$

```
> res12 :=
(608066864/10^10)*pi[1]+(389997413/10^10)*pi[2]+(356844130/10^10
)*pi[3]+(1228499692/10^10)*pi[4]+(1121338704/10^10)*pi[5]+(10109
80340/10^10)*pi[6]+(932477030/10^10)*pi[7]+(824530392/10^10)*pi[
8]+(787585052/10^10)*pi[9]+(651657547/10^10)*pi[10]+(688379272/1
0^10)*pi[11]+(461434429/10^10)*pi[12]+(938209134/10^10)*pi[13]+x
12-y12 = (400/1000);
```

$$\begin{aligned} \text{res12} := & \frac{38004179}{625000000} \pi_1 + \frac{389997413}{100000000000} \pi_2 + \frac{35684413}{10000000000} \pi_3 + \frac{307124923}{25000000000} \pi_4 + \frac{70083669}{625000000} \pi_5 \\ & + \frac{50549017}{5000000000} \pi_6 + \frac{93247703}{10000000000} \pi_7 + \frac{103066299}{12500000000} \pi_8 + \frac{196896263}{25000000000} \pi_9 + \frac{651657547}{100000000000} \pi_{10} \\ & + \frac{86047409}{12500000000} \pi_{11} + \frac{461434429}{100000000000} \pi_{12} + \frac{469104567}{50000000000} \pi_{13} + x12 - y12 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

```
> res13 :=
(820629069/10^10)*pi[1]+(486198558/10^10)*pi[2]+(417929093/10^10
```


) *pi[3]+(1472572113/10^10)*pi[4]+(1263403150/10^10)*pi[5]+(1073920124/10^10)*pi[6]+(929155826/10^10)*pi[7]+(777179810/10^10)*pi[8]+(692873442/10^10)*pi[9]+(546632092/10^10)*pi[10]+(534014695/10^10)*pi[11]+(346340833/10^10)*pi[12]+(639151195/10^10)*pi[13]+x13-y13 = 433/1000;

$$\begin{aligned} \text{res13} := & \frac{820629069}{10000000000} \pi_1 + \frac{243099279}{5000000000} \pi_2 + \frac{417929093}{10000000000} \pi_3 + \frac{1472572113}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{25268063}{2000000000} \pi_5 + \frac{268480031}{25000000000} \pi_6 + \frac{464577913}{50000000000} \pi_7 + \frac{77717981}{10000000000} \pi_8 + \frac{346436721}{50000000000} \pi_9 \\ & + \frac{136658023}{25000000000} \pi_{10} + \frac{106802939}{20000000000} \pi_{11} + \frac{346340833}{100000000000} \pi_{12} + \frac{127830239}{20000000000} \pi_{13} + x13 - y13 = \\ & \frac{433}{1000} \end{aligned}$$

> res14 :=

(1060067090/10^10)*pi[1]+(580631324/10^10)*pi[2]+(469694006/10^10)*pi[3]+(1698628580/10^10)*pi[4]+(1372062519/10^10)*pi[5]+(1100576121/10^10)*pi[6]+(894996537/10^10)*pi[7]+(708418422/10^10)*pi[8]+(591008842/10^10)*pi[9]+(444411181/10^10)*pi[10]+(402784951/10^10)*pi[11]+(252497866/10^10)*pi[12]+(424222563/10^10)*pi[13]+x14-y14 = 467/1000;

$$\begin{aligned} \text{res14} := & \frac{106006709}{10000000000} \pi_1 + \frac{145157831}{25000000000} \pi_2 + \frac{234847003}{50000000000} \pi_3 + \frac{84931429}{50000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1372062519}{100000000000} \pi_5 + \frac{1100576121}{100000000000} \pi_6 + \frac{894996537}{100000000000} \pi_7 + \frac{354209211}{50000000000} \pi_8 + \frac{295504421}{50000000000} \pi_9 \\ & + \frac{444411181}{100000000000} \pi_{10} + \frac{402784951}{100000000000} \pi_{11} + \frac{126248933}{50000000000} \pi_{12} + \frac{424222563}{100000000000} \pi_{13} + x14 - y14 = \\ & \frac{467}{1000} \end{aligned}$$

> res15 :=

(1305087280/10^10)*pi[1]+(664167021/10^10)*pi[2]+(508015655/10^10)*pi[3]+(1887715601/10^10)*pi[4]+(1442235180/10^10)*pi[5]+(1096056863/10^10)*pi[6]+(841967488/10^10)*pi[7]+(632833526/10^10)*pi[8]+(496902227/10^10)*pi[9]+(356973464/10^10)*pi[10]+(302202431/10^10)*pi[11]+(183295040/10^10)*pi[12]+(282548218/10^10)*pi[13]+x15-y15 = 500/1000;

$$\begin{aligned} \text{res15} := & \frac{16313591}{125000000} \pi_1 + \frac{664167021}{10000000000} \pi_2 + \frac{101603131}{20000000000} \pi_3 + \frac{1887715601}{100000000000} \pi_4 \\ & + \frac{72111759}{5000000000} \pi_5 + \frac{1096056863}{100000000000} \pi_6 + \frac{6577871}{78125000} \pi_7 + \frac{316416763}{50000000000} \pi_8 + \frac{496902227}{100000000000} \pi_9 \end{aligned}$$

$$+ \frac{44621683}{1250000000} \pi_{10} + \frac{302202431}{10000000000} \pi_{11} + \frac{572797}{31250000} \pi_{12} + \frac{141274109}{5000000000} \pi_{13} + x/5 - y/5 = \frac{1}{2}$$

> res16 :=

$$(1556855321/10^{10}) * \pi_1 + (737835142/10^{10}) * \pi_2 + (534956643/10^{10}) * \pi_3 + (2045776811/10^{10}) * \pi_4 + (1481922592/10^{10}) * \pi_5 + (1069145598/10^{10}) * \pi_6 + (777882388/10^{10}) * \pi_7 + (556070052/10^{10}) * \pi_8 + (412259172/10^{10}) * \pi_9 + (283194399/10^{10}) * \pi_{10} + (224800153/10^{10}) * \pi_{11} + (131922123/10^{10}) * \pi_{12} + (187379607/10^{10}) * \pi_{13} + x/16 - y/16 = 533/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res16} := & \frac{1556855321}{10000000000} \pi_1 + \frac{368917571}{5000000000} \pi_2 + \frac{534956643}{10000000000} \pi_3 + \frac{2045776811}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{46310081}{312500000} \pi_5 + \frac{534572799}{5000000000} \pi_6 + \frac{194470597}{2500000000} \pi_7 + \frac{139017513}{2500000000} \pi_8 + \frac{103064793}{2500000000} \pi_9 \\ & + \frac{283194399}{10000000000} \pi_{10} + \frac{224800153}{10000000000} \pi_{11} + \frac{131922123}{10000000000} \pi_{12} + \frac{187379607}{10000000000} \pi_{13} + x/16 - y/16 = \\ & \frac{533}{1000} \end{aligned}$$

> res17 :=

$$(1818916106/10^{10}) * \pi_1 + (802748145/10^{10}) * \pi_2 + (552023939/10^{10}) * \pi_3 + (2177802883/10^{10}) * \pi_4 + (1496552907/10^{10}) * \pi_5 + (1025258841/10^{10}) * \pi_6 + (707036816/10^{10}) * \pi_7 + (480701482/10^{10}) * \pi_8 + (336863511/10^{10}) * \pi_9 + (221152911/10^{10}) * \pi_{10} + (164862540/10^{10}) * \pi_{11} + (93514080/10^{10}) * \pi_{12} + (122565838/10^{10}) * \pi_{13} + x/17 - y/17 = 567/1000;$$

$$\begin{aligned} \text{res17} := & \frac{909458053}{5000000000} \pi_1 + \frac{160549629}{2000000000} \pi_2 + \frac{552023939}{10000000000} \pi_3 + \frac{2177802883}{10000000000} \pi_4 \\ & + \frac{1496552907}{10000000000} \pi_5 + \frac{1025258841}{10000000000} \pi_6 + \frac{44189801}{625000000} \pi_7 + \frac{240350741}{5000000000} \pi_8 + \frac{336863511}{10000000000} \pi_9 \\ & + \frac{221152911}{10000000000} \pi_{10} + \frac{8243127}{500000000} \pi_{11} + \frac{584463}{62500000} \pi_{12} + \frac{61282919}{5000000000} \pi_{13} + x/17 - y/17 = \frac{567}{1000} \end{aligned}$$

> res18 :=

$$(2072848196/10^{10}) * \pi_1 + (855235486/10^{10}) * \pi_2 + (559718394/10^{10}) * \pi_3 + (2278952667/10^{10}) * \pi_4 + (1490664231/10^{10}) * \pi_5 + (972754284/10^{10}) * \pi_6 + (638101947/10^{10}) * \pi_7 + (413769218/10^{10}) * \pi_8 + (275184622/10^{10}) * \pi_9 + (173019313/10^{10}) * \pi_{10} + (121708800/10^{10}) * \pi_{11} + (66795209/10^{10}) * \pi_{12} + (81247632/10^{10}) * \pi_{13} + x/18 - y/18 = 600/1000;$$

$$\text{res18} := \frac{518212049}{2500000000} \pi_1 + \frac{427617743}{5000000000} \pi_2 + \frac{279859197}{5000000000} \pi_3 + \frac{2278952667}{10000000000} \pi_4$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1490664231}{10000000000} \pi_5 + \frac{243188571}{2500000000} \pi_6 + \frac{638101947}{10000000000} \pi_7 + \frac{206884609}{5000000000} \pi_8 + \frac{137592311}{5000000000} \pi_9 \\
& + \frac{173019313}{10000000000} \pi_{10} + \frac{19017}{1562500} \pi_{11} + \frac{66795209}{10000000000} \pi_{12} + \frac{5077977}{625000000} \pi_{13} + x18 - y18 = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

> res19 :=

$$\begin{aligned}
& (2324339980/10^{10}) * \pi_1 + (897953611/10^{10}) * \pi_2 + (560194628/10^{10}) * \pi_3 + (2356843596/10^{10}) * \pi_4 + (1469697588/10^{10}) * \pi_5 + (914830715/10^{10}) * \pi_6 \\
& + (571799692/10^{10}) * \pi_7 + (354047174/10^{10}) * \pi_8 + (223920237/10^{10}) * \pi_9 + (134926301/10^{10}) * \pi_{10} + (89789080/10^{10}) * \pi_{11} \\
& + (47677683/10^{10}) * \pi_{12} + (53979719/10^{10}) * \pi_{13} + x19 - y19 = 633/1000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res19 := & \frac{116216999}{500000000} \pi_1 + \frac{897953611}{10000000000} \pi_2 + \frac{140048657}{2500000000} \pi_3 + \frac{589210899}{2500000000} \pi_4 \\
& + \frac{367424397}{2500000000} \pi_5 + \frac{182966143}{2000000000} \pi_6 + \frac{142949923}{2500000000} \pi_7 + \frac{177023587}{5000000000} \pi_8 + \frac{223920237}{10000000000} \pi_9 \\
& + \frac{134926301}{10000000000} \pi_{10} + \frac{2244727}{250000000} \pi_{11} + \frac{47677683}{10000000000} \pi_{12} + \frac{53979719}{10000000000} \pi_{13} + x19 - y19 = \\
& \frac{633}{1000}
\end{aligned}$$

> res20 :=

$$\begin{aligned}
& (2579481395/10^{10}) * \pi_1 + (932593392/10^{10}) * \pi_2 + (554609585/10^{10}) * \pi_3 + (2416207567/10^{10}) * \pi_4 + (1436424963/10^{10}) * \pi_5 \\
& + (852771725/10^{10}) * \pi_6 + (507915014/10^{10}) * \pi_7 + (300219207/10^{10}) * \pi_8 + (180624176/10^{10}) * \pi_9 + (104242665/10^{10}) * \pi_{10} \\
& + (65668128/10^{10}) * \pi_{11} + (33703907/10^{10}) * \pi_{12} + (35538270/10^{10}) * \pi_{13} + x20 - y20 = 667/1000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res20 := & \frac{515896279}{2000000000} \pi_1 + \frac{58287087}{625000000} \pi_2 + \frac{110921917}{2000000000} \pi_3 + \frac{2416207567}{10000000000} \pi_4 \\
& + \frac{1436424963}{10000000000} \pi_5 + \frac{34110869}{400000000} \pi_6 + \frac{253957507}{5000000000} \pi_7 + \frac{300219207}{10000000000} \pi_8 + \frac{11289011}{625000000} \pi_9 \\
& + \frac{20848533}{2000000000} \pi_{10} + \frac{2052129}{312500000} \pi_{11} + \frac{33703907}{10000000000} \pi_{12} + \frac{3553827}{10000000000} \pi_{13} + x20 - y20 = \frac{667}{1000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> obj := & (x1+y1) * (143/1000) + (x2+y2) * (172/1000) + (x3+y3) * (143/1000) + (x4+y4) * (114/1000) + (x5+y5) * (1/10) \\
& + (x6+y6) * (86/1000) + (x7+y7) * (72/1000) + (x8+y8) * (57/1000) + (x9+y9) * (43/1000) + (x10+y10) * (29/1000) + (x11+y11) * (14/1000) \\
& + (x12+y12) * (7/1000) + (x13+y13) * (6/1000) + (x14+y14) * (4/1000) + (x15+y15) * (3/1000) + (x16+y16) * (1/1000) + (x17+y17) * (1/1000) \\
& + (x18+y18) * (1/1000) + (x19+y19) * (1/1000) + (x20+y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
obj := & \frac{43}{250} y2 + \frac{43}{250} x2 + \frac{1}{250} x14 + \frac{1}{250} y14 + \frac{57}{1000} x8 + \frac{57}{1000} y8 + \frac{7}{1000} y12 + \frac{3}{1000} x15 \\
& + \frac{1}{10} x5 + \frac{3}{1000} y15 + \frac{57}{500} x4 + \frac{143}{1000} y1 + \frac{1}{1000} x16 + \frac{1}{1000} y16 + \frac{1}{1000} x17 + \frac{1}{10} y5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1000}y17 + \frac{7}{1000}x12 + \frac{3}{500}x13 + \frac{3}{500}y13 + \frac{9}{125}x7 + \frac{9}{125}y7 + \frac{1}{1000}y18 + \frac{1}{1000}x18 \\
& + \frac{1}{1000}y19 + \frac{7}{500}x11 + \frac{7}{500}y11 + \frac{57}{500}y4 + \frac{29}{1000}x10 + \frac{29}{1000}y10 + \frac{1}{1000}x19 + \frac{43}{1000}x9 \\
& + \frac{43}{1000}y9 + \frac{1}{1000}y20 + \frac{1}{1000}x20 + \frac{143}{1000}x3 + \frac{143}{1000}y3 + \frac{43}{500}y6 + \frac{43}{500}x6 + \frac{143}{1000}x1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{dese} := & (x1-y1) * (143/1000) + (x2-y2) * (172/1000) + (x3-y3) * (143/1000) + \\
& (x4-y4) * (114/1000) + (x5-y5) * (1/10) + (x6-y6) * (86/1000) + (x7-y7) * (72/1000) + \\
& (x8-y8) * (57/1000) + (x9-y9) * (43/1000) + (x10-y10) * (29/1000) + (x11-y11) * (14/1000) + \\
& (x12-y12) * (7/1000) + (x13-y13) * (6/1000) + (x14-y14) * (4/1000) + (x15-y15) * (3/1000) + \\
& (x16-y16) * (1/1000) + (x17-y17) * (1/1000) + (x18-y18) * (1/1000) + (x19-y19) * (1/1000) + (x20-y20) * (1/1000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dese} := & -\frac{43}{250}y2 + \frac{43}{250}x2 + \frac{1}{250}x14 - \frac{1}{250}y14 + \frac{57}{1000}x8 - \frac{57}{1000}y8 - \frac{7}{1000}y12 + \frac{3}{1000}x15 \\
& + \frac{1}{10}x5 - \frac{3}{1000}y15 + \frac{57}{500}x4 - \frac{143}{1000}y1 + \frac{1}{1000}x16 - \frac{1}{1000}y16 + \frac{1}{1000}x17 - \frac{1}{10}y5 \\
& - \frac{1}{1000}y17 + \frac{7}{1000}x12 + \frac{3}{500}x13 - \frac{3}{500}y13 + \frac{9}{125}x7 - \frac{9}{125}y7 - \frac{1}{1000}y18 + \frac{1}{1000}x18 \\
& - \frac{1}{1000}y19 + \frac{7}{500}x11 - \frac{7}{500}y11 - \frac{57}{500}y4 + \frac{29}{1000}x10 - \frac{29}{1000}y10 + \frac{1}{1000}x19 + \frac{43}{1000}x9 \\
& - \frac{43}{1000}y9 - \frac{1}{1000}y20 + \frac{1}{1000}x20 + \frac{143}{1000}x3 - \frac{143}{1000}y3 - \frac{43}{500}y6 + \frac{43}{500}x6 + \frac{143}{1000}x1
\end{aligned}$$

$$> \text{res21} := \pi[1] \geq \pi[2];$$

$$\text{res21} := \pi_2 \leq \pi_1$$

$$> \text{res22} := \pi[2] \geq \pi[3];$$

$$\text{res22} := \pi_3 \leq \pi_2$$

$$> \text{res23} := \pi[3] \geq \pi[4];$$

$$\text{res23} := \pi_4 \leq \pi_3$$

$$> \text{res24} := \pi[4] \geq \pi[5];$$

$$\text{res24} := \pi_5 \leq \pi_4$$

$$> \text{res25} := \pi[5] \geq \pi[6];$$

$$\text{res25} := \pi_6 \leq \pi_5$$

$$> \text{res26} := \pi[6] \geq \pi[7];$$

$$\text{res26} := \pi_7 \leq \pi_6$$

$$> \text{res27} := \pi[7] \geq \pi[8];$$

$$\text{res27} := \pi_8 \leq \pi_7$$

$$> \text{res28} := \pi[8] \geq \pi[9];$$

$$\text{res28} := \pi_9 \leq \pi_8$$

$$> \text{res29} := \pi[9] \geq \pi[10];$$

$$\text{res29} := \pi_{10} \leq \pi_9$$

```

> res30:=pi[10]>=pi[11];
                                res30 :=  $\pi_{11} \leq \pi_{10}$ 
> res31:=pi[11]>=pi[12];
                                res31 :=  $\pi_{12} \leq \pi_{11}$ 
> res32:=pi[12]>=pi[13];
                                res32 :=  $\pi_{13} \leq \pi_{12}$ 
>
> sol:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,
res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res2
0,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,re
s31,res32},NONNEGATIVE):
> solu:=evalf(sol);
solu := {y15 = 0, y12 = 0, x8 = 0, y14 = 0, x2 = 0, y2 = 0, x11 = 0, y19 = 0, y18 = 0, y7 = 0,
x7 = 0, y13 = 0, x12 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, x10 = 0, y4 = 0, x9 = 0,  $\pi_{13} = .01249795557$ ,
x14 = .01562760349, x3 = .003438699986, x15 = .02598888660, y1 = .005445390822,
 $\pi_2 = .3928791310$ ,  $\pi_7 = .3928791310$ , x4 = .005014805732, x20 = .09387434089,
x16 = .03764410355, y11 = .004305790673,  $\pi_{11} = .3928791310$ ,  $\pi_9 = .3928791310$ ,
 $\pi_8 = .3928791310$ , x18 = .06428057517,  $\pi_3 = .3928791310$ ,  $\pi_5 = .3928791310$ ,
x5 = .004746015914, x19 = .07853805572, y10 = .006118017165,  $\pi_4 = .3928791310$ ,
 $\pi_{12} = .3928791310$ ,  $\pi_{10} = .3928791310$ , x1 = 0, x17 = .05072934135, x6 = .002894362945,
 $\pi_6 = .3928791310$ , x13 = .006659785083, y6 = 0, y3 = 0, y20 = 0,  $\pi_1 = 1.096890168$ ,
y8 = .003207293865, y9 = .005520612019}
> 'obj'=subs(solu,obj);
                                obj = .003729037480
> 'dese'=subs(solu,dese);
                                dese = .0008558444351

```

☐ Queremos que el desequilibrio financiero sea 0 por lo que añadimos una nueva restricción

```

> res33:=(x1-y1)*(143/1000)+(x2-y2)*(172/1000)+(x3-y3)*(143/1000)+
(x4-y4)*(114/1000)+(x5-y5)*(1/10)+(x6-y6)*(86/1000)+(x7-y7)*(72/
1000)+(x8-y8)*(57/1000)+(x9-y9)*(43/1000)+(x10-y10)*(29/1000)+(x
11-y11)*(14/1000)+(x12-y12)*(7/1000)+(x13-y13)*(6/1000)+(x14-y14
)*(4/1000)+(x15-y15)*(3/1000)+(x16-y16)*(1/1000)+(x17-y17)*(1/10
00)+(x18-y18)*(1/1000)+(x19-y19)*(1/1000)+(x20-y20)*(1/1000)=0;
res33 :=  $-\frac{43}{250}y_2 + \frac{43}{250}x_2 + \frac{1}{250}x_{14} - \frac{1}{250}y_{14} + \frac{57}{1000}x_8 - \frac{57}{1000}y_8 - \frac{7}{1000}y_{12} + \frac{3}{1000}x_{15}$ 
 $+ \frac{1}{10}x_5 - \frac{3}{1000}y_{15} + \frac{57}{500}x_4 - \frac{143}{1000}y_1 + \frac{1}{1000}x_{16} - \frac{1}{1000}y_{16} + \frac{1}{1000}x_{17} - \frac{1}{10}y_5$ 

```

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{1000}y_{17} + \frac{7}{1000}x_{12} + \frac{3}{500}x_{13} - \frac{3}{500}y_{13} + \frac{9}{125}x_7 - \frac{9}{125}y_7 - \frac{1}{1000}y_{18} + \frac{1}{1000}x_{18} \\
& -\frac{1}{1000}y_{19} + \frac{7}{500}x_{11} - \frac{7}{500}y_{11} - \frac{57}{500}y_4 + \frac{29}{1000}x_{10} - \frac{29}{1000}y_{10} + \frac{1}{1000}x_{19} + \frac{43}{1000}x_9 \\
& -\frac{43}{1000}y_9 - \frac{1}{1000}y_{20} + \frac{1}{1000}x_{20} + \frac{143}{1000}x_3 - \frac{143}{1000}y_3 - \frac{43}{500}y_6 + \frac{43}{500}x_6 + \frac{143}{1000}x_1 = 0
\end{aligned}$$

```
> sol2:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,
res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,res33},NONNEGATIVE):
```

```
> solu2:=evalf(sol2);
```

```
solu2 := {y15 = 0, y12 = 0, x8 = 0, y14 = 0, x2 = 0, y2 = 0, x11 = 0, y19 = 0, y18 = 0, x7 = 0,
y13 = 0, x12 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, x10 = 0, y4 = 0, x9 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y3 = 0,
y20 = 0, pi5 = .3982307358, x5 = .003219985546, x18 = .07522507580, pi13 = .01160303252,
pi4 = .3982307358, pi3 = .3982307358, pi6 = .3982307358, y11 = .005500221236,
x4 = .004021804262, pi10 = .3982307358, pi7 = .3982307358, x17 = .05970953151,
pi11 = .3982307358, pi8 = .3982307358, pi12 = .3982307358, pi1 = 1.023869638,
x14 = .01884896261, x15 = .03104202400, pi2 = .3982307358, x16 = .04461095349,
y7 = .002404119918, y8 = .005815184312, x6 = .0008808897861, x20 = .1087608816,
x19 = .09143651817, y9 = .008034003733, pi9 = .3982307358, y1 = .004976569245,
x3 = .002954467433, y10 = .008177618171, x13 = .008138873089}
```

```
> 'obj2'=subs(solu2,obj);
```

```
obj2 = .003751655455
```

```
> 'dese2'=subs(solu2,dese);
```

```
dese2 = -.20 10^-12
```

Añadimos una nueva restricción, que la prima de la clase 6 sea la siniestralidad media 0.152

```
> sol3:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,
res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,res33,pi[6]=(152/1000)},NONNEGATIVE):
```

```
> solu3:=evalf(sol3);
```

```
solu3 := {y19 = .3044618513, y2 = .02694522822, pi6 = .1520000000, x4 = .02470956070,
x6 = .05746301717, y12 = .1282375866, pi13 = .08407199794, pi3 = 1.184757903,
y18 = .3009637809, y1 = .05571150696, y10 = .02756080284, x8 = .04324924223,
pi2 = 1.184757903, pi4 = 1.184757903, x5 = .04539986248, y16 = .2742871525,
x9 = .01395068050, x7 = .05789827723, pi10 = .1520000000, pi8 = .1520000000,
pi11 = .1520000000, pi12 = .1520000000, pi7 = .1520000000, y15 = .2498260172,
```

```

y20 = .3026323069,  $\pi_1 = 1.184757903$ , y14 = .2171988358,  $\pi_5 = 1.184757903$ ,
 $\pi_9 = .1520000000$ , y11 = .07786567822, y13 = .1753439943, y17 = .2914045885, x15 = 0,
x2 = 0, y8 = 0, x14 = 0, x11 = 0, x18 = 0, y7 = 0, x12 = 0, y5 = 0, x13 = 0, x17 = 0, x16 = 0,
x20 = 0, y9 = 0, x19 = 0, x10 = 0, y4 = 0, x3 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y3 = 0}

```

```
> 'obj3'=subs(sol3,obj);
```

```
obj3 = .03906491536
```

⇒ Añadimos una nueva restricción para que la prima mayor sea a lo sumo quintuple de la prima menor

```

> sol4:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,
, res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,res33,pi[6]=152/1000,pi[1]<=5*pi[13]},NONNEGATIVE):
> solu4:=evalf(sol4);

```

```

solu4 := {y10 = 0, y11 = 0, x18 = .1176965994, x19 = .1345987302, x16 = .09201567528,
y3 = .02863923025, y1 = .09057690768,  $\pi_2 = .6074666903$ ,  $\pi_5 = .6074666903$ ,
x7 = .07104610129, y2 = .05892629894, x12 = .08212328644, x15 = .08436239951,
x14 = .08031306516,  $\pi_1 = .6074666903$ , x4 = .0006592445869,  $\pi_{13} = .1214933381$ ,
x10 = .08912538016,  $\pi_4 = .6074666903$ , x17 = .1034683148, x13 = .07977835370,
x5 = .02874027405, x8 = .08354180744, x11 = .08591454727, x9 = .08902355485,
x20 = .1544099096, x6 = .05245736251,  $\pi_3 = .6074666903$ ,  $\pi_6 = .1520000000$ ,
 $\pi_{10} = .1520000000$ ,  $\pi_8 = .1520000000$ ,  $\pi_{11} = .1520000000$ ,  $\pi_{12} = .1520000000$ ,
 $\pi_7 = .1520000000$ ,  $\pi_9 = .1520000000$ , y15 = 0, y12 = 0, y14 = 0, x2 = 0, y8 = 0, y19 = 0,
y18 = 0, y7 = 0, y13 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, y9 = 0, y4 = 0, x3 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y20 = 0
}

```

```
> 'obj4'=subs(solu4,obj);
```

```
obj4 = .05436646230
```

⇒ Añadimos restricciones para que exista una mínima diferencia entre dos primas consecutivas

```

> sol5:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,
, res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,res33,pi[6]=152/1000,pi[1]<=5*pi[13],pi[1]-pi[2]>=1/1
000,pi[2]-pi[3]>=1/1000,pi[3]-pi[4]>=1/1000,pi[4]-pi[5]>=1/1000,
pi[5]-pi[6]>=1/1000,pi[6]-pi[7]>=1/1000,pi[7]-pi[8]>=1/1000,pi[8]
-pi[9]>=1/1000,pi[9]-pi[10]>=1/1000,pi[10]-pi[11]>=1/1000,pi[11]
-pi[12]>=1/1000,pi[12]-pi[13]>=1/1000},NONNEGATIVE):
> solu5:=evalf(sol5);

```

```
solu5 := { $\pi_1 = .6156406323$ ,  $\pi_5 = .6116406323$ ,  $\pi_4 = .6126406323$ ,  $\pi_{13} = .1231281265$ ,
```

```

y10 = 0, y11 = 0, x9 = .08980059711,  $\pi_2$  = .6146406323, y1 = .09173492573,
y3 = .02882193891, x14 = .07815828326, x4 = .0009270432073, x5 = .02941040365.
x15 = .08164435060, x8 = .08457792066, x19 = .1301897327, x11 = .08566992469,
x20 = .1496942857,  $\pi_9$  = .1490000000, x10 = .08946485832,  $\pi_6$  = .1520000000,
x6 = .05341401568, x16 = .08879337250, x13 = .07825670634, x12 = .08124526708.
 $\pi_3$  = .6136406323, x7 = .07213902719, y2 = .05958634140,  $\pi_{11}$  = .1470000000,
x17 = .09978827197,  $\pi_7$  = .1510000000,  $\pi_8$  = .1500000000,  $\pi_{12}$  = .1460000000,
 $\pi_{10}$  = .1480000000, x18 = .1136278223, y15 = 0, y12 = 0, y14 = 0, x2 = 0, y8 = 0, y19 = 0,
y18 = 0, y7 = 0, y13 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, y9 = 0, y4 = 0, x3 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y20 = 0
}
> 'obj5'=subs(solu5,obj);
obj5 = .05497696474

```

Añadimos restricciones para que al pasar a una clase peor la prima aumente un porcentaje de la prima en la clase anterior

```

> sol6:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9
,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res
20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,r
es31,res32,res33,pi[6]=152/1000,pi[1]<=5*pi[13],pi[1]>=101/100*pi
i[2],pi[2]>=101/100*pi[3],pi[3]>=101/100*pi[4],pi[4]>=101/100*pi
[5],pi[5]>=101/100*pi[6],pi[6]>=101/100*pi[7],pi[7]>=101/100*pi[
8],pi[8]>=101/100*pi[9],pi[9]>=101/100*pi[10],pi[10]>=101/100*pi
[11],pi[11]>=101/100*pi[12],pi[12]>=101/100*pi[13]},NONNEGATIVE)
:
> solu6:=evalf(sol6);
solu6 := {y10 = 0, y11 = 0,  $\pi_6$  = .1520000000, y15 = 0, y12 = 0, y14 = 0, x2 = 0, y8 = 0,
y19 = 0, y18 = 0, y7 = 0, y13 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, y9 = 0, y4 = 0, x3 = 0, x1 = 0, y6 = 0,
y20 = 0,  $\pi_9$  = .1475297025,  $\pi_7$  = .1504950495, x15 = .08465174823,  $\pi_5$  = .5982464684,
x14 = .08114792162, x17 = .1026413455,  $\pi_{11}$  = .1446227845,  $\pi_8$  = .1490049995,
 $\pi_{10}$  = .1460690124, x6 = .05383788210, x7 = .07294654452, y1 = .09284769772,
x13 = .08114591324, x12 = .08394844124,  $\pi_1$  = .6225376740,  $\pi_{12}$  = .1431908758,
y2 = .06041606262, x8 = .08581272668, x20 = .1520192247, x5 = .02948651025,
 $\pi_4$  = .6042289331, x11 = .08809896315, x19 = .1327211486,  $\pi_3$  = .6102712224,
x16 = .09175227809, x9 = .09146112748,  $\pi_2$  = .6163739346, x10 = .09153102451,
y3 = .02936835540,  $\pi_{13}$  = .1245075348, x4 = .0006765596696, x18 = .1163358810}
> 'obj6'=subs(solu6,obj);
obj6 = .05573691673

```


≡ Cambiamos la clase inicial 6 por la clase 12 como en el caso de Norberg 1.

```
> sol1Norberg1:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,res31,res32,res33,pi[12]=152/1000,pi[1]<=5*pi[13],pi[1]>=101/100*pi[2],pi[2]>=101/100*pi[3],pi[3]>=101/100*pi[4],pi[4]>=101/100*pi[5],pi[5]>=101/100*pi[6],pi[6]>=101/100*pi[7],pi[7]>=101/100*pi[8],pi[8]>=101/100*pi[9],pi[9]>=101/100*pi[10],pi[10]>=101/100*pi[11],pi[11]>=101/100*pi[12],pi[12]>=101/100*pi[13]},NONNEGATIVE):
> solu1Norberg1:=evalf(sol1Norberg1);
solu1Norberg1 := {y10 = 0, y11 = 0,  $\pi_{12}$  = .1520000000, x8 = .03662086968, y15 = 0, y12 = 0,
y14 = 0, x2 = 0, y8 = 0, y19 = 0, x19 = .2745704740, y18 = 0, y7 = 0, y1 = .05257495209,
 $\pi_{11}$  = .3069979417, y13 = 0,  $\pi_3$  = .3646286235, x15 = .1551490171, y17 = 0,
x20 = .3069775321, y5 = 0, x12 = .08417461223, x5 = .01250000097, y3 = .01484939372,
y16 = 0, x6 = .02205311888, x16 = .1831069003,  $\pi_7$  = .3504009403,  $\pi_6$  = .3539049497, y9 = 0,
y4 = 0,  $\pi_9$  = .3434966574, x3 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y20 = 0, x4 = 0,  $\pi_{10}$  = .3400957004,
x11 = .06727583383,  $\pi_5$  = .3574439992, x10 = .05379983320, y2 = .03224330488,
x9 = .04409547743,  $\pi_2$  = .3682749098,  $\pi_1$  = .3719576589, x7 = .02965242535,
x13 = .1046784966, x17 = .2133133446, x14 = .1290308342, x18 = .2436031014,
 $\pi_8$  = .3469316240,  $\pi_{13}$  = .07439153177,  $\pi_4$  = .3610184391 }
> 'obj1Norberg1' = subs(solu1Norberg1, obj);
obj1Norberg1 = .03037505977
>
```

≡ No imponemos la condición de que la siniestralidad media se pague en alguna clase

```
> sol2Norberg1:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,res8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res18,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28,res29,res30,res31,res32,res33,pi[1]<=5*pi[13],pi[1]>=101/100*pi[2],pi[2]>=101/100*pi[3],pi[3]>=101/100*pi[4],pi[4]>=101/100*pi[5],pi[5]>=101/100*pi[6],pi[6]>=101/100*pi[7],pi[7]>=101/100*pi[8],pi[8]>=101/100*pi[9],pi[9]>=101/100*pi[10],pi[10]>=101/100*pi[11],pi[11]>=101/100*pi[12],pi[12]>=101/100*pi[13]},NONNEGATIVE):
> solu2Norberg1:=evalf(sol2Norberg1);
solu2Norberg1 := {y10 = 0, y11 = 0,  $\pi_8$  = .3547729806, x4 = .001341325824,
x6 = .02277977743, x20 = .2989055678,  $\pi_1$  = .3803646544,  $\pi_{12}$  = .07683366020,
```

```

x5 = .01371663542, x15 = .1478766509,  $\pi_{13}$  = .07607293089, x8 = .03543130299,
x19 = .2665710163, y2 = .03175003240, x7 = .02956210786,  $\pi_7$  = .3583207104,
x14 = .1221521626, x17 = .2055531262, x9 = .04170926070, y15 = 0, y12 = 0, y14 = 0,
x2 = 0, y8 = 0, y19 = 0, y18 = 0, y7 = 0, y13 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, y9 = 0, y4 = 0,
x3 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y20 = 0,  $\pi_2$  = .3765986678,  $\pi_4$  = .3691781862, y1 = .05303420127,
 $\pi_5$  = .3655229567,  $\pi_9$  = .3512603768, x13 = .09835653414,  $\pi_{11}$  = .3443391597,
 $\pi_3$  = .3728699681, x16 = .1755520932, y3 = .01375815710, x18 = .2357028087,
x12 = .07857043820, x11 = .06257935671,  $\pi_{10}$  = .3477825513, x10 = .05021919130,
 $\pi_6$  = .3619039175 }
> 'obj2Norberg1' = subs (solu2Norberg1, obj) ;
                                obj2Norberg1 = .03002462565
>

```

☐ Quitamos la condición de que la prima en la peor clase sea a lo sumo
quíntuple de la prima en la mejor clase

```

> solu3Norberg1 := minimize (obj, {res1, res2, res3, res4, res5, res6,
res7, res8, res9, res10, res11, res12, res13, res14, res15, res16, r
es17, res18, res19, res20, res21, res22, res23, res24, res25, res26
, res27, res28, res29, res30, res31, res32, res33, pi[1] >= 101/100*
pi[2], pi[2] >= 101/100*pi[3], pi[3] >= 101/100*pi[4], pi[4] >= 101
/100*pi[5], pi[5] >= 101/100*pi[6], pi[6] >= 101/100*pi[7], pi[7]
>= 101/100*pi[8], pi[8] >= 101/100*pi[9], pi[9] >= 101/100*pi[10]
, pi[10] >= 101/100*pi[11], pi[11] >= 101/100*pi[12], pi[12] >= 101
/100*pi[13] }, NONNEGATIVE) :
> solu3Norberg1 := evalf (solu3Norberg1) ;
solu3Norberg1 := {  $\pi_{11}$  = .3931376725,  $\pi_8$  = .4050501371, y9 = .009654462256,
 $\pi_5$  = .4173235613,  $\pi_3$  = .4257117649, x20 = .1353746020, x14 = .02336175476,
y15 = 0, y12 = 0, x8 = 0, y14 = 0, x2 = 0, y2 = 0, x11 = 0, y19 = 0, y18 = 0, x7 = 0,
y13 = 0, x12 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, x10 = 0, y4 = 0,  $\pi_{13}$  = .01256399077,
y11 = .006713472473, y7 = .002863384994,  $\pi_2$  = .4299688826, x6 = .0009728726699,
x17 = .07442201323, x19 = .1139327434,  $\pi_1$  = .8630900534,  $\pi_{12}$  = .3892452203,
x9 = 0, x1 = 0, y6 = 0, y3 = 0, y20 = 0,  $\pi_7$  = .4091006385,  $\pi_6$  = .4131916449,
y10 = .009906574285,  $\pi_{10}$  = .3970690493,  $\pi_4$  = .4214967970,  $\pi_9$  = .4010397397,
y1 = .005430746431, x3 = .003283914112, y8 = .006934097798, x16 = .05554883799,
x5 = .003641335400, x13 = .01004698791, x18 = .09377728899, x15 = .03858232088,
x4 = .004513100679 }
> 'obj3Norberg1' = subs (solu3Norberg1, obj) ;
                                obj3Norberg1 = .004348850360

```

☐ Tomamos como clase inicial la clase 11 para comparar con

el método propuesto por Borgam, Hoem y Norberg en el caso de distribución asintótica para las reglas de Noruega 75

```

> solBorgam:=minimize(obj,{res1,res2,res3,res4,res5,res6,res7,r
es8,res9,res10,res11,res12,res13,res14,res15,res16,res17,res1
8,res19,res20,res21,res22,res23,res24,res25,res26,res27,res28
,res29,res30,res31,res32,res33,pi[11]=152/1000,pi[1]<=5*pi[13
],pi[1]>=101/100*pi[2],pi[2]>=101/100*pi[3],pi[3]>=101/100*pi
[4],pi[4]>=101/100*pi[5],pi[5]>=101/100*pi[6],pi[6]>=101/100*
pi[7],pi[7]>=101/100*pi[8],pi[8]>=101/100*pi[9],pi[9]>=101/10
0*pi[10],pi[10]>=101/100*pi[11],pi[11]>=101/100*pi[12],pi[12]
>=101/100*pi[13]},NONNEGATIVE):
> soluBorgam:=evalf(solBorgam);
soluBorgam := {x11 = .03680851994, y10 = 0, x9 = .03182422560, y11 = 0,
pi10 = .4014503477, pi4 = .4261476336, pi5 = .4219283501, pi11 = .1520000000, y15 = 0,
x12 = .04586731395, y12 = 0, y14 = 0, x2 = 0, x8 = .03281184412, y8 = 0, y19 = 0,
y18 = 0, y7 = 0, y13 = 0, y17 = 0, y5 = 0, y16 = 0, y9 = 0, y4 = 0, x3 = 0,
x19 = .2122299128, x13 = .05982504288, x1 = 0, y6 = 0, x15 = .1009573396, y20 = 0,
x17 = .1538237033, pi9 = .4054648512, pi6 = .4177508417, y1 = .05837899803,
pi7 = .4136146947, x7 = .03288224012, pi8 = .4095194997, x18 = .1824742223,
pi2 = .4347132010, pi12 = .08869018727, x6 = .02976575372, x20 = .2437153514,
x10 = .03241816364, pi3 = .4304091099, x14 = .07882462165, x4 = .008807884027,
x5 = .02207182636, x16 = .1259110900, y2 = .03140562475, pi1 = .4390603330,
y3 = .009085331675, pi13 = .08781206660}
> 'objsoluBorgam'=subs(soluBorgam,obj);
objsoluBorgam = .03009833321
> 'desesoluBorgam'=subs(soluBorgam,dese);
desesoluBorgam = 0
>

```

var-holg-Borgam

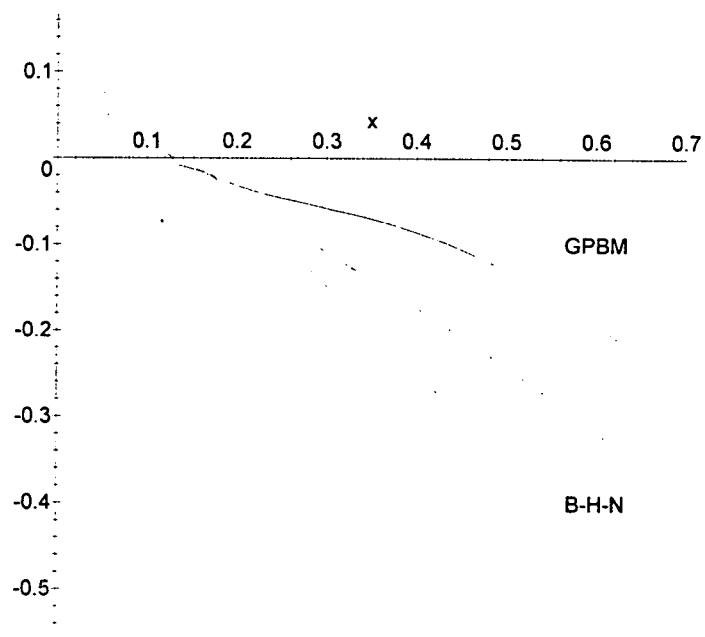
- ☐ Gráficas para comparar las variables de holgura del sistema propuesto por Borgam, Hoem y Norberg y el modelo GPBM.

```
> restart;  
> with(plots):
```

- ☐ Borgam, Hoem y Norberg (verde), GPBM (azul)

```
> f:=[[0.033,0.092],[0.067,0.062],[0.1,0.034],[0.133,-0.008],[0.167,-0.017],[0.2,-0.041],[0.233,-0.064],[0.267,-0.087],[0.3,-0.109],[0.333,-0.130],[0.367,-0.152],[0.4,-0.173],[0.433,-0.195],[0.467,-0.218],[0.5,-0.242],[0.533,-0.265],[0.567,-0.291],[0.6,-0.316],[0.633,-0.342],[0.667,-0.369]]:  
> g:=[[0.033,0.069],[0.067,0.041],[0.1,0.017],[0.133,-0.002],[0.167,-0.019],[0.2,-0.032],[0.233,-0.042],[0.267,-0.050],[0.3,-0.058],[0.333,-0.066],[0.367,-0.075],[0.4,-0.086],[0.433,-0.098],[0.467,-0.113],[0.5,-0.130],[0.533,-0.149],[0.567,-0.170],[0.6,-0.192],[0.633,-0.216],[0.667,-0.242]]:  
> y:=0.152-x:  
> t:=textplot([[0.6,-0.1,'GPBM'],[0.6,-0.4,'B-H-N']]):  
> p1:=plot([f,g,y],x=0..0.7,color=[green,blue,black],thickness=[2,2,1]):  
> display(p1,t,title='Borgam Hoem y Norberg-GPBM');
```

Borgam Hoem y Norberg-GPBM



var-holg-Gilde

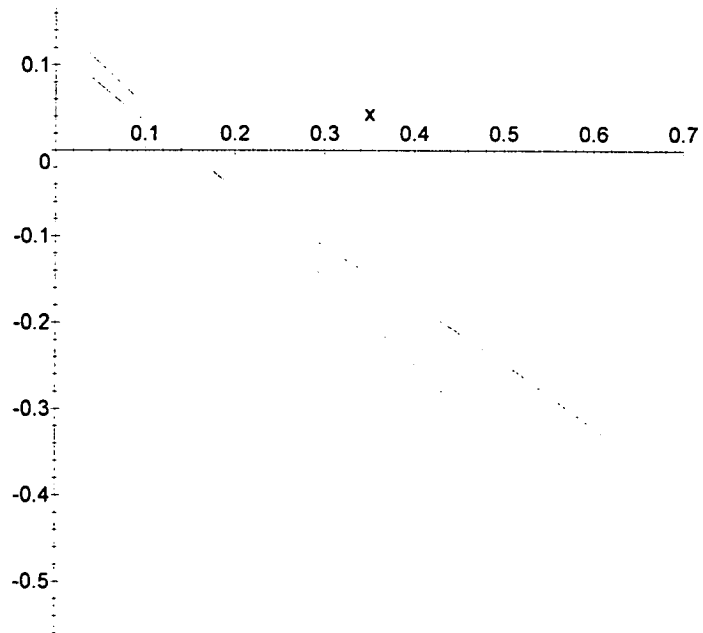
☐ Gráficas para comparar los errores de tarificación del sistema B-M propuesto por Gilde y Sundt (1989) y GPBM

```
> restart;  
> with(plots):
```

☐ Gilde y Sundt (verde), GPBM (azul)

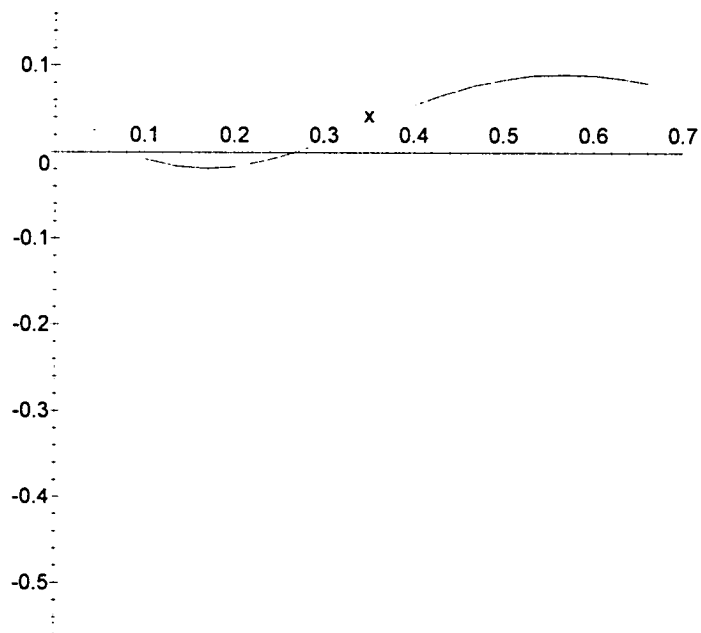
```
> f:=[[0.033,0.092],[0.067,0.062],[0.1,0.034],[0.133,0.007],[0.167,-0.019],[0.2,-0.043],[0.233,-0.067],[0.267,-0.09],[0.3,-0.112],[0.333,-0.133],[0.367,-0.156],[0.4,-0.177],[0.433,-0.2],[0.467,-0.223],[0.5,-0.246],[0.533,-0.270],[0.567,-0.296],[0.6,-0.321],[0.633,-0.347],[0.667,-0.374]]:  
> g:=[[0.033,0.020],[0.067,0.037],[0.1,-0.008],[0.133,-0.016],[0.167,-0.019],[0.2,-0.017],[0.233,-0.010],[0.267,-0.0],[0.3,0.012],[0.333,0.026],[0.367,0.041],[0.4,0.055],[0.433,0.067],[0.467,0.077],[0.5,0.084],[0.533,0.089],[0.567,0.090],[0.6,0.089],[0.633,0.085],[0.667,0.079]]:  
> h:=[[0.033,0.066],[0.067,0.041],[0.1,0.019],[0.133,0],[0.167,-0.017],[0.2,-0.032],[0.233,-0.044],[0.267,-0.054],[0.3,-0.063],[0.333,-0.071],[0.367,-0.079],[0.4,-0.087],[0.433,-0.097],[0.467,-0.107],[0.5,-0.119],[0.533,-0.132],[0.567,-0.147],[0.6,-0.164],[0.633,-0.181],[0.667,-0.201]]:  
> y:=0.152-x:  
> t:=textplot([[0.6,-0.1,'GPBM'],[0.6,-0.4,'G-S']]):  
> p1:=plot([f,y],x=0..0.7,color=[green,black],thickness=[2,1]):  
> p2:=plot([g,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p3:=plot([h,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p4:=plot([f,h,y],x=0..0.7,color=[green,blue,black],thickness=[2,2,1]):  
> display(p1,title='Gilde y Sundt');
```

Gilde y Sundt



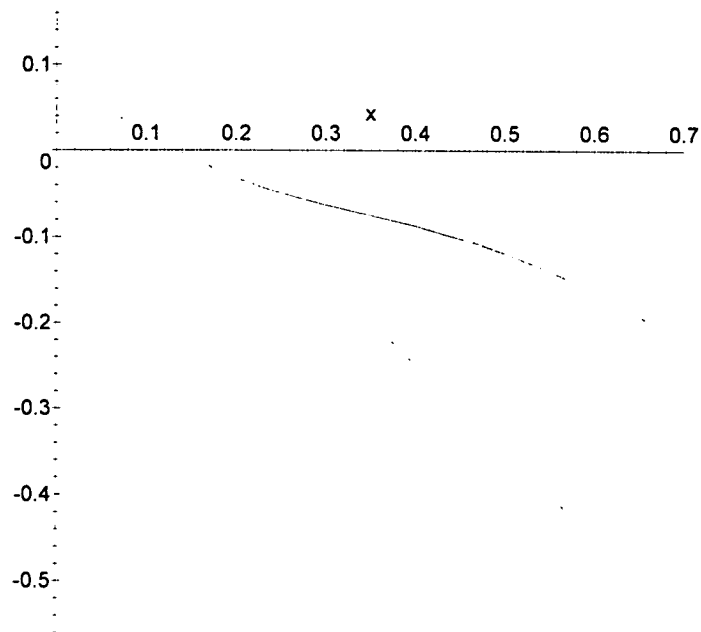
```
> display(p2,title=`GPBM-G1`);
```

GPBM-G1

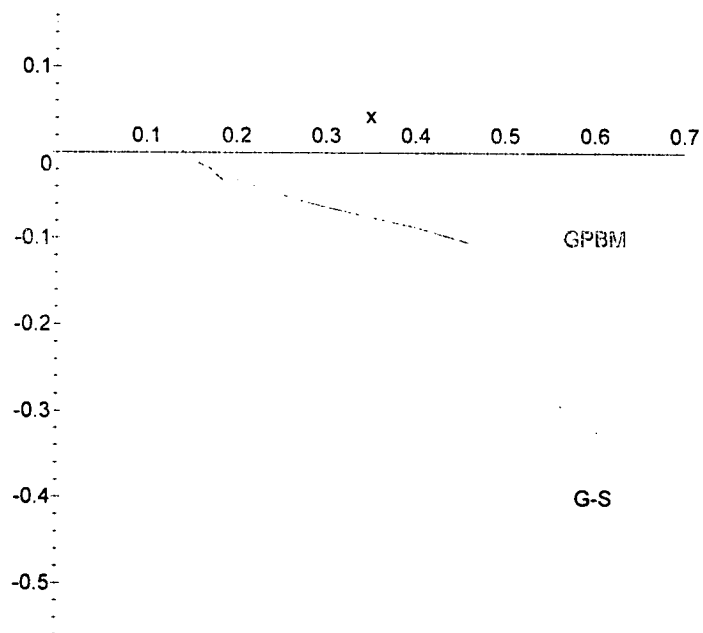


```
> display(p3,title=`GPBM-G2`);
```

GPBM-G2



```
> display(p4,t,title=`Gilde y Sundt-GPBM`);  
Gilde y Sundt-GPBM
```



```
>
```


var-holg-Mapfre

■ Gráficas para comparar las variables de holgura de Mapfre y nuestro modelo.

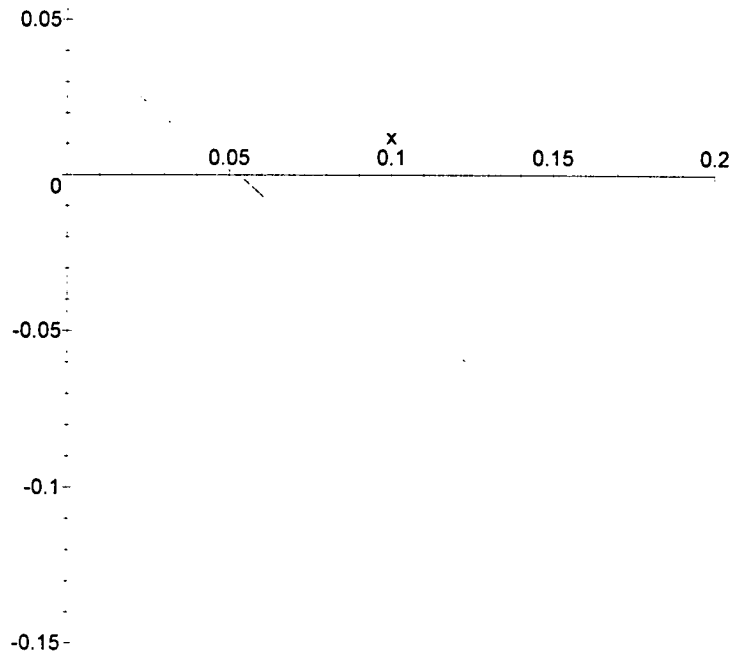
```
> restart;  
> with(plots):
```

■ Mapfre (verde), nuestro (azul)

```
> f:=[[0.005,0.0472],[0.015,0.0372],[0.025,0.0272],[0.035,0.0172],  
      [0.045,0.0072],[0.055,-0.0027],[0.065,-0.0127],[0.075,-0.0227],  
      [0.085,-0.0327],[0.095,-0.0427],[0.105,-0.0526],[0.115,-0.0626],  
      [0.125,-0.0726],[0.135,-0.0826],[0.145,-0.0926],[0.155,-0.1026],  
      [0.165,-0.1126],[0.175,-0.1225],[0.185,-0.1325],[0.195,-0.1425]]:  
  
> g:=[[0.005,0.0216],[0.015,0.0116],[0.025,0.0017],[0.035,-0.0081],  
      [0.045,-0.0181],[0.055,-0.0280],[0.065,-0.0379],[0.075,-0.0479],  
      [0.085,-0.0578],[0.095,-0.0677],[0.105,-0.0776],[0.115,-0.0875],  
      [0.125,-0.0974],[0.135,-0.1073],[0.145,-0.1172],[0.155,-0.1271],  
      [0.165,-0.1370],[0.175,-0.1468],[0.185,-0.1567],[0.195,-0.1666]]:  
  
> h:=[[0.005,0.0472],[0.015,0.0372],[0.025,0.0272],[0.035,0.0172],  
      [0.045,0.0072],[0.055,-0.0027],[0.065,-0.0127],[0.075,-0.0227],  
      [0.085,-0.0327],[0.095,-0.0427],[0.105,-0.0527],[0.115,-0.0627],  
      [0.125,-0.0727],[0.135,-0.0827],[0.145,-0.0927],[0.155,-0.1027],  
      [0.165,-0.1127],[0.175,-0.1227],[0.185,-0.1327],[0.195,-0.1426]]:  
  
> m:=[[0.005,0.0019],[0.015,0.0008],[0.025,0],[0.035,-0.0007],[0.045,-0.0012],  
      [0.055,-0.0015],[0.065,-0.0016],[0.075,-0.0015],[0.085,-0.0012],  
      [0.095,-0.0007],[0.105,-0.00003],[0.115,0.0009],[0.125,0.0020],  
      [0.135,0.0035],[0.145,0.0051],[0.155,0.0070],[0.165,0.0091],  
      [0.175,0.0115],[0.185,0.0141],[0.195,0.0170]]:  
  
> n:=[[0.005,0.0366],[0.015,0.0267],[0.025,0.0169],[0.035,0.0071],  
      [0.045,-0.0023],[0.055,-0.0114],[0.065,-0.02],[0.075,-0.0278],  
      [0.085,-0.0345],[0.095,-0.0397],[0.105,-0.0428],[0.115,0.0434],  
      [0.125,0.0404],[0.135,0.0331],[0.145,0.0201],[0.155,0],[0.165,0.0292],  
      [0.175,0.0701],[0.185,0.1253],[0.195,0.1986]]:  
  
> b:=[[0.005,0.041],[0.015,0.032],[0.025,0.023],[0.035,0.014],[0.045,0.005],  
      [0.055,-0.002],[0.065,-0.011],[0.075,-0.02],[0.085,-0.028],[0.095,-0.036],  
      [0.105,-0.045],[0.115,-0.053],[0.125,-0.061],[0.135,-0.069],[0.145,-0.077],  
      [0.155,-0.084],[0.165,-0.092],[0.175,-0.099],[0.185,-0.106],[0.195,-0.113]]:
```

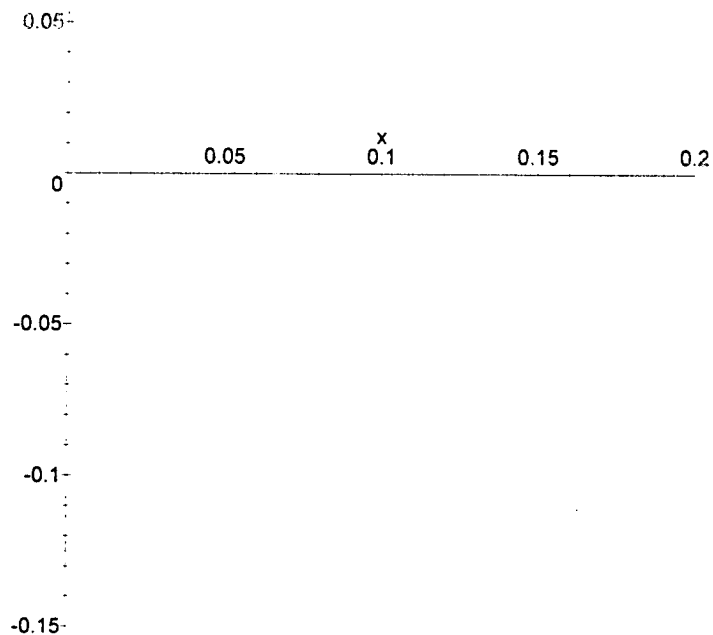
```
> y:=0.0532-x:
> p1:=plot([b,y],x=0..0.2,color=[blue,black],thickness=[2,1]):
> display(p1,title='GPBM(primas lineales)');
```

GPBM(primas lineales)



```
> p4:=plot([f,y],x=0..0.2,color=[blue,black],thickness=[2,1]):
> display(p4,title='GPBM-P4');
```

GPBM-P4

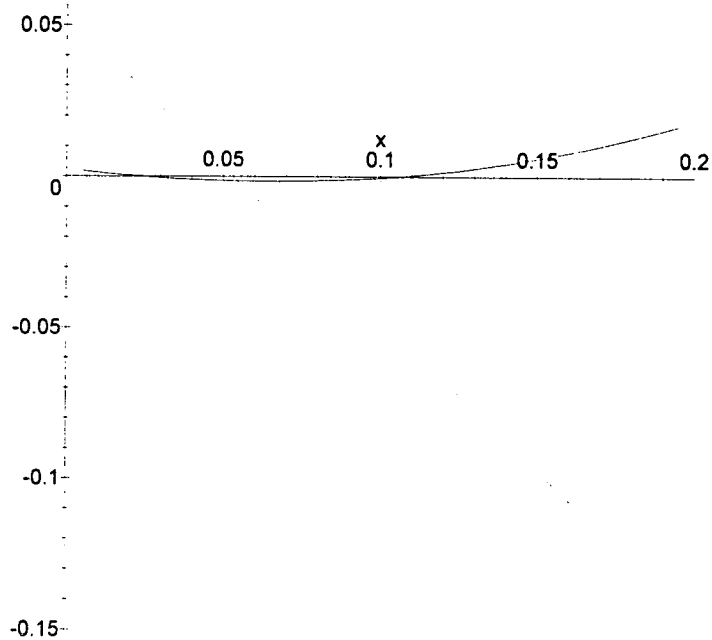


BIBLIOTECA

```
> t:=textplot([[0.2,0.05,'nuestro'],[0.2,-0.2,'Mapfre']]):
> p2:=plot([m,y],x=0..0.2,color=[blue,black],thickness=[2,1]):
```

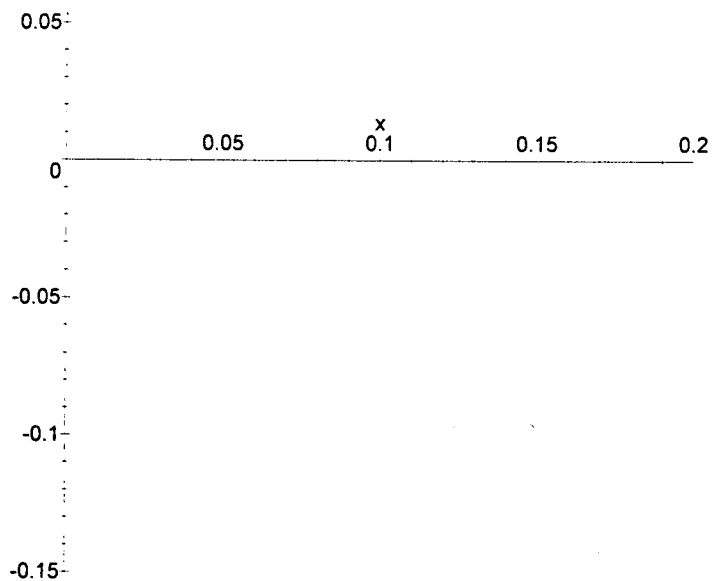
```
> display(p2,title='GPBM-P1');
```

GPBM-P1



```
> t:=textplot([[0.2,-0.1,'nuestro'],[0.2,-0.2,'Mapfre']]):
> p3:=plot([g,y],x=0..0.2,color=[green,black],thickness=[2,1]):
> display(p3,title='Mapfre');
```

Mapfre



```
>
```

```
>
```

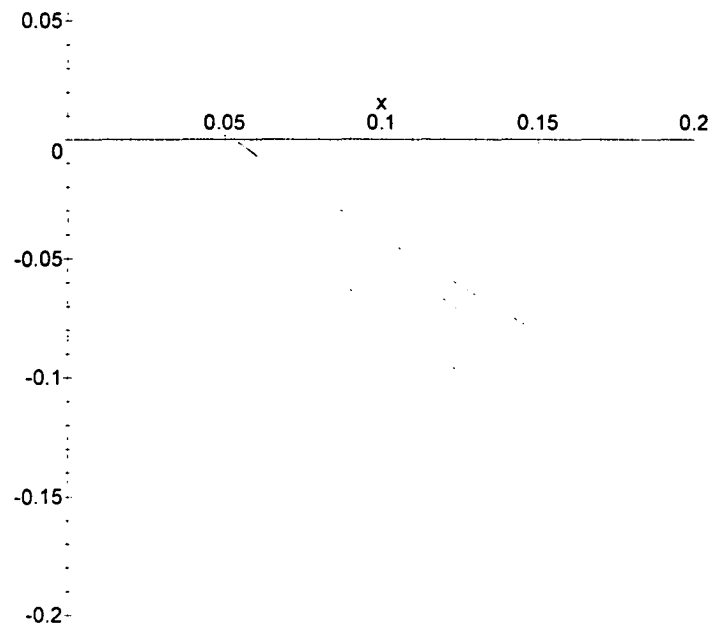
```
> t:=textplot([[0.25,-0.1,'GPBM(primas-lineales)'],[0.25,-0.2,'
Mapfre']]):
```

```

> p4:=plot([b,g,y],x=0..0.2,color=[blue,green,black],thickness=
[2,2,1]):
> display(p4,t,title=`Mapfre-GPBM(primas lineales)`);

```

Mapfre-GPBM(primas lineales)



```

>

```

var-holg-Norberg1

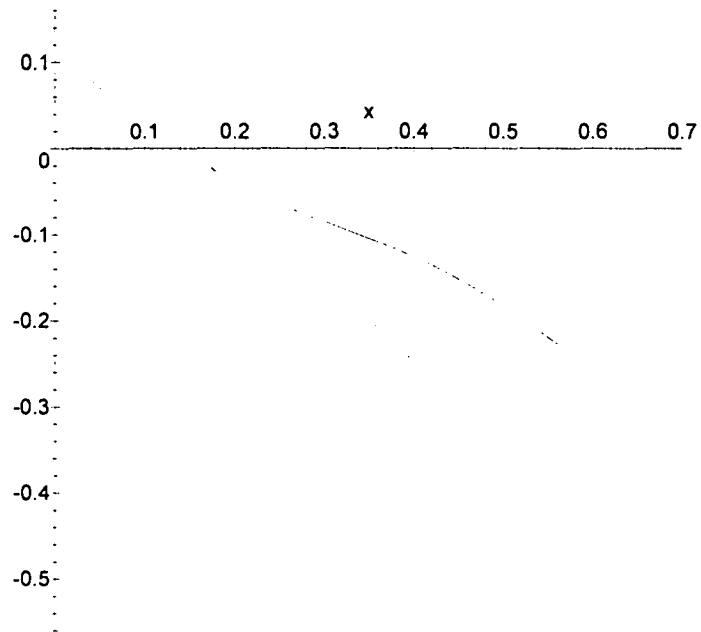
☐ Gráficas para comparar las variables de holgura de Noruega 75 el modelo GPBM.

```
> restart;  
> with(plots):
```

☐ Norberg 1, con las reglas T (rojo), nuestro (azul y verde)

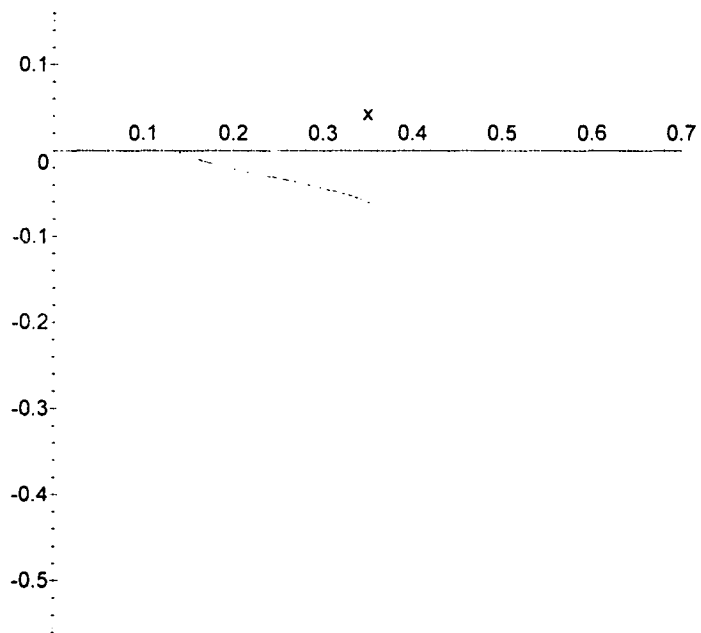
```
> f:=[[0.033,0.085],[0.067,0.056],[0.1,0.029],[0.133,0.004],[0.167,-0.019],[0.2,-0.039],[0.233,-0.057],[0.267,-0.072],[0.3,-0.085],[0.333,-0.098],[0.367,-0.111],[0.4,-0.126],[0.433,-0.142],[0.467,-0.162],[0.5,-0.183],[0.533,-0.207],[0.567,-0.232],[0.6,-0.258],[0.633,-0.285],[0.667,-0.314]]:  
> g:=[[0.033,0.052],[0.067,0.032],[0.1,0.014],[0.133,0],[0.167,-0.012],[0.2,-0.022],[0.233,-0.029],[0.267,-0.036],[0.3,-0.044],[0.333,-0.053],[0.367,-0.067],[0.4,-0.084],[0.433,-0.104],[0.467,-0.129],[0.5,-0.155],[0.533,-0.183],[0.567,-0.213],[0.6,-0.243],[0.633,-0.274],[0.667,-0.306]]:  
> h:=[[0.033,0.092],[0.067,0.06],[0.1,0.029],[0.133,-0.006],[0.167,-0.029],[0.2,-0.053],[0.233,-0.072],[0.267,-0.085],[0.3,-0.0914],[0.333,-0.0915],[0.367,-0.088],[0.4,-0.083],[0.433,-0.081145],[0.467,-0.081147],[0.5,-0.084],[0.533,-0.091],[0.567,-0.102],[0.6,-0.116],[0.633,-0.132],[0.667,-0.152]]:  
>  
> k:=[[0.033,0.053],[0.067,0.031],[0.1,0.013],[0.133,-0.001],[0.167,-0.013],[0.2,-0.022],[0.233,-0.029],[0.267,-0.035],[0.3,-0.041],[0.333,-0.050],[0.367,-0.062],[0.4,-0.078],[0.433,-0.098],[0.467,-0.122],[0.5,-0.147],[0.533,-0.175],[0.567,-0.205],[0.6,-0.235],[0.633,-0.266],[0.667,-0.298]]:  
>  
> y:=0.152-x:  
> p1:=plot([f,y],x=0..0.7,color=[green,black],thickness=[2,1]):  
> p2:=plot([g,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p3:=plot([h,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p4:=plot([k,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p5:=plot([f,k,y],x=0..0.7,color=[green,blue,black],thickness=[2,2,1]):  
> display(p1,title=`Norberg1`);
```

Norberg1



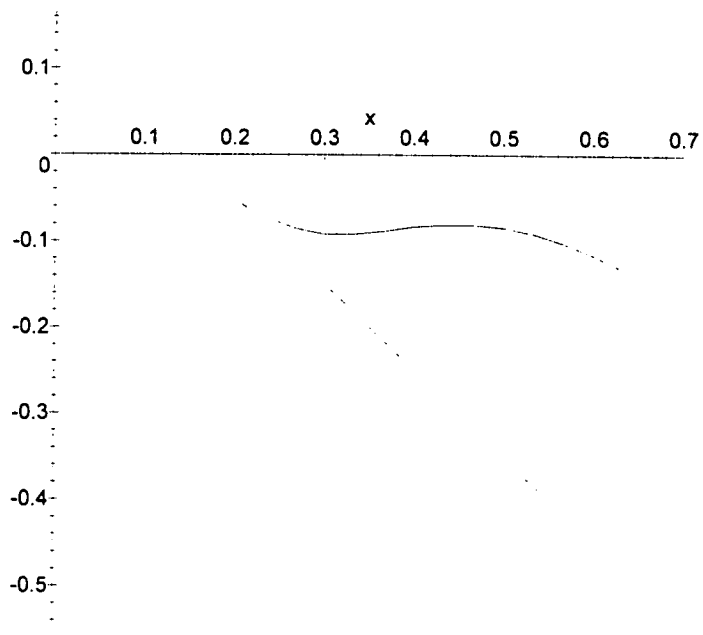
```
> display(p2,title=`GPBM-1Norberg1`);
```

GPBM-1Norberg1

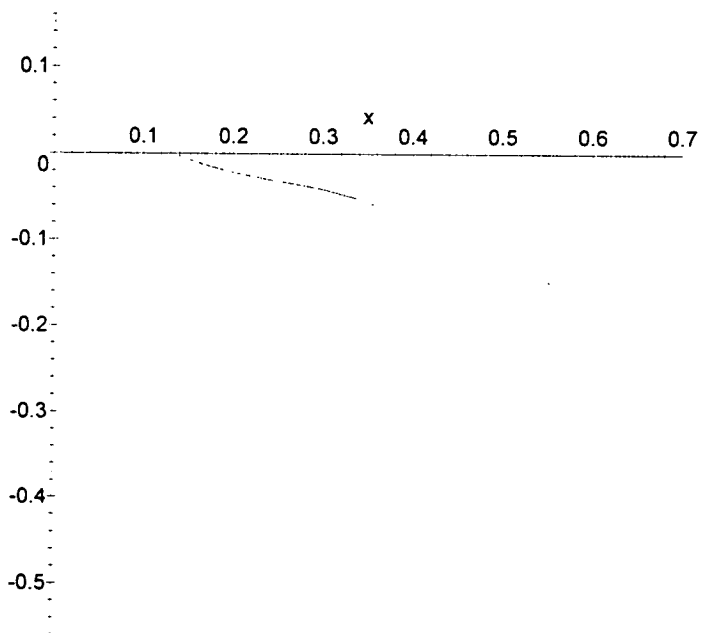


```
> display(p3,title=`GPBM-2Norberg1`);
```

GPBM-2Norberg1

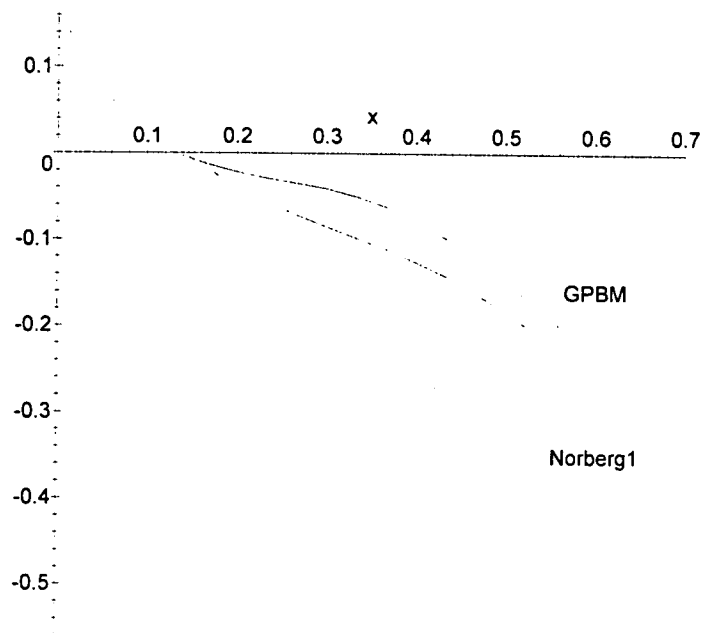


```
> display(p4,title='GPBM-3Norberg1');
GPBM-3Norberg1
```



```
> t:=textplot([[0.6,-0.16,'GPBM'],[0.6,-0.35,'Norberg1']]):
> display(p5,t,title='Norberg1-GPBM');
```

Norberg1-GPBM



var-holg-Norberg2

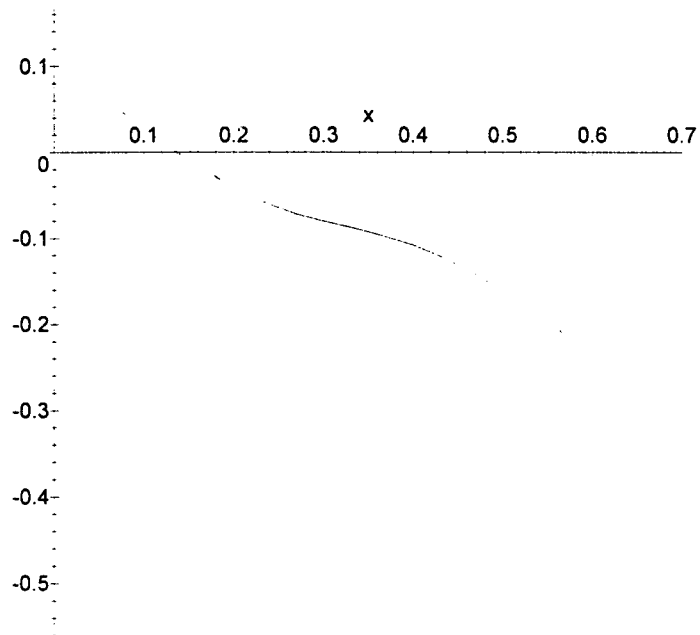
≡ Gráficas para comparar las variables de holgura de Norberg 2 y el modelo GPBM.

```
> restart;  
> with(plots):
```

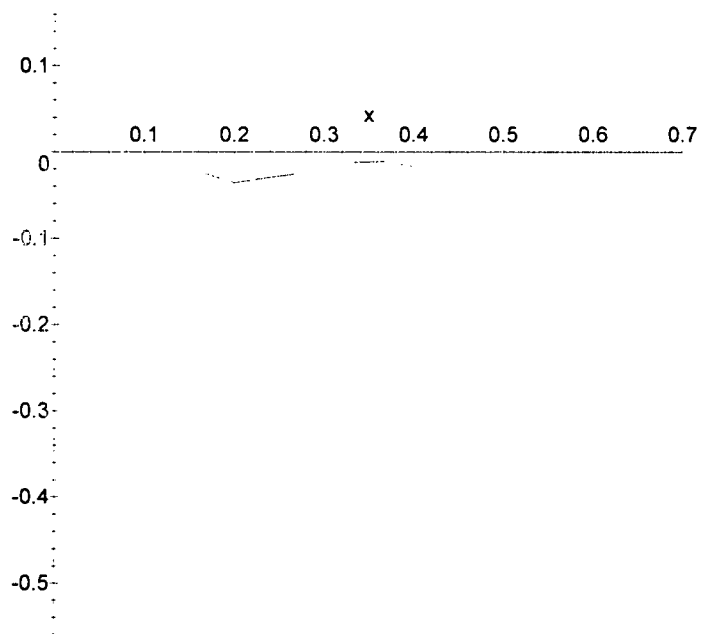
≡ Norberg 2 (verde), GPBM(azul)

```
> f:=[[0.033,0.083],[0.067,0.054],[0.1,0.027],[0.133,0.002],[0.  
167,-0.021],[0.2,-0.041],[0.233,-0.058],[0.267,-0.071],[0.3,-  
0.080],[0.333,-0.088],[0.367,-0.097],[0.4,-0.108],[0.433,-0.1  
22],[0.467,-0.140],[0.5,-0.161],[0.533,-0.184],[0.567,-0.210]  
,[0.6,-0.237],[0.633,-0.265],[0.667,-0.295]]:  
> g:=[[0.033,0.056],[0.067,0.031],[0.1,0.010],[0.133,-0.006],[0.  
.167,-0.019],[0.2,-0.031],[0.233,-0.030],[0.267,-0.029],[0.3,  
-0.051],[0.333,-0.026],[0.367,-0.031],[0.4,-0.041],[0.433,-0.  
057],[0.467,-0.079],[0.5,-0.103],[0.533,-0.131],[0.567,-0.161]  
],[0.6,-0.191],[0.633,-0.222],[0.667,-0.255]]:  
> h:=[[0.033,0.086],[0.067,0.054],[0.1,0.024],[0.133,-0.005],[0.  
.167,-0.032],[0.2,-0.061],[0.233,-0.07],[0.267,-0.076],[0.3,-  
0.081],[0.333,-0.059],[0.367,-0.043],[0.4,-0.029],[0.433,-0.0  
20],[0.467,-0.018],[0.5,-0.022],[0.533,-0.033],[0.567,-0.048]  
,[0.6,-0.068],[0.633,-0.09],[0.667,-0.115]]:  
>  
> k:=[[0.033,0.059],[0.067,0.03],[0.1,0.006],[0.133,-0.011],[0.  
167,-0.025],[0.2,-0.036],[0.233,-0.031],[0.267,-0.026],[0.3,-  
0.044],[0.333,-0.012],[0.367,-0.011],[0.4,-0.017],[0.433,-0.0  
30],[0.467,-0.049],[0.5,-0.072],[0.533,-0.099],[0.567,-0.128]  
,[0.6,-0.158],[0.633,-0.189],[0.667,-0.221]]:  
> y:=0.152-x:  
> t:=textplot([[0.6,-0.1,'GPBM'],[0.6,-0.35,'Norberg2']]):  
>  
> p1:=plot([f,y],x=0..0.7,color=[green,black],thickness=[2,1]):  
> p2:=plot([k,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p3:=plot([h,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p4:=plot([g,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p5:=plot([f,g,y],x=0..0.7,color=[green,blue,black],thickness=  
[2,2,1]):  
> display(p1,title=`Norberg2`);
```

Norberg2

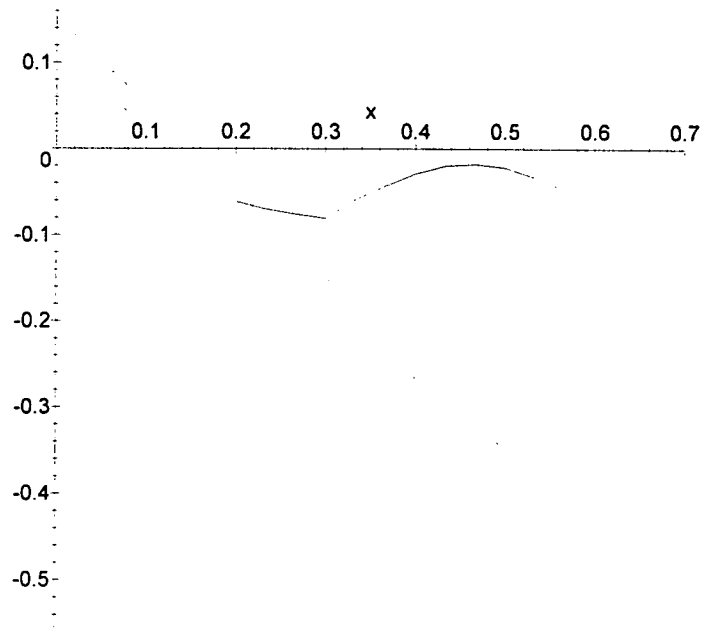


```
> display(p2,title=`GPBM-P2Norberg2`);  
GPBM-P2Norberg2
```

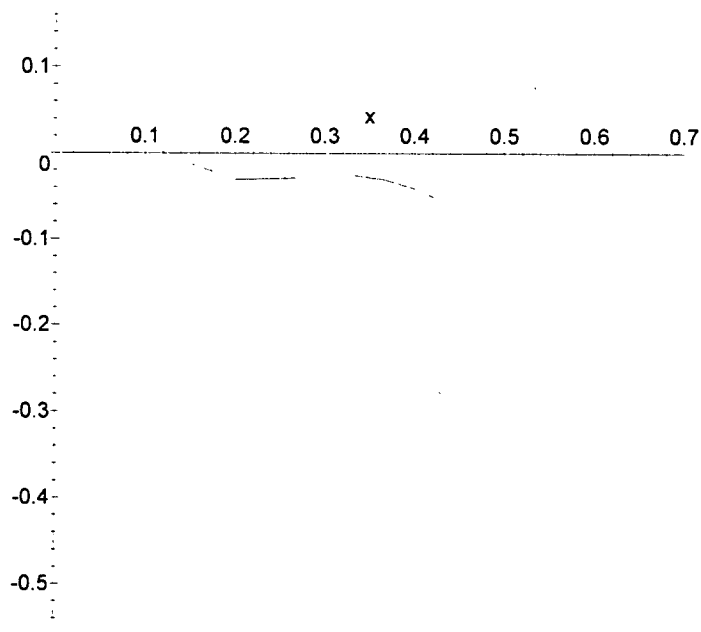


```
> display(p3,title=`GPBM-P4Norberg2`);
```

GPBM-P4Norberg2

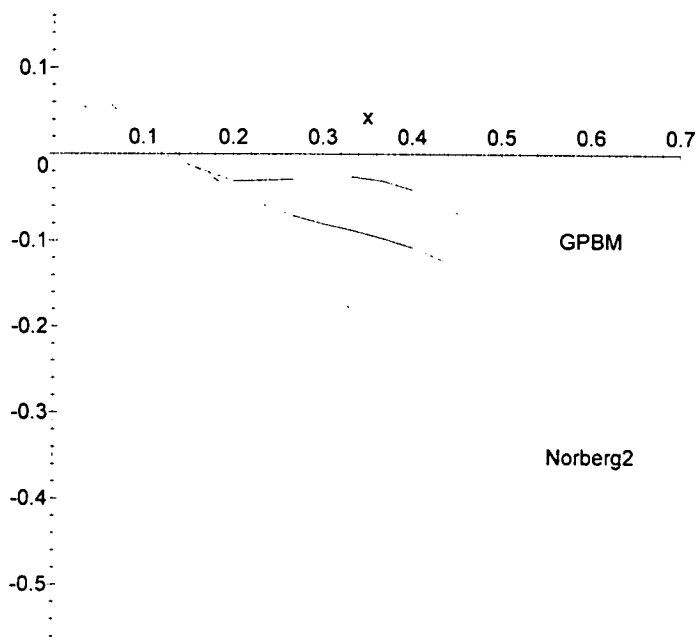


```
> display(p4,title='GPBM-P6Norberg2');
GPBM-P6Norberg2
```



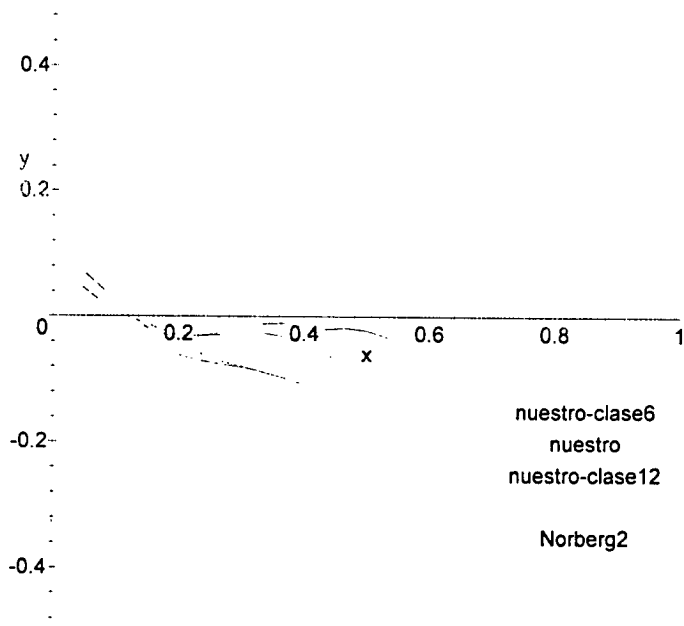
```
> display(p5,t,title='Norberg2-GPBM');
```

Norberg2-GPBM



- - -
>
- - -
>

Norberg2-nuestro



- - -
>
- - -
>

var-holg-Norberg3

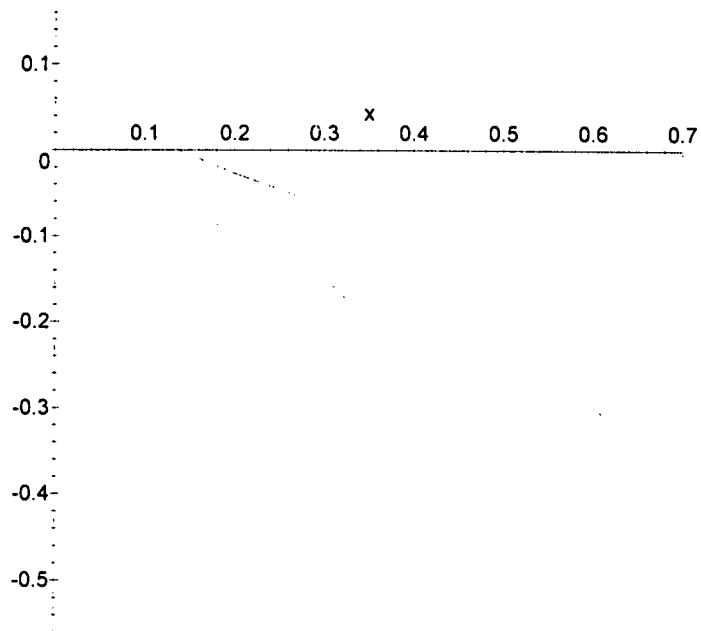
≡ Gráficas para comparar las variables de holgura de Norberg 3 y el modelo GPBM.

```
> restart;  
> with(plots):
```

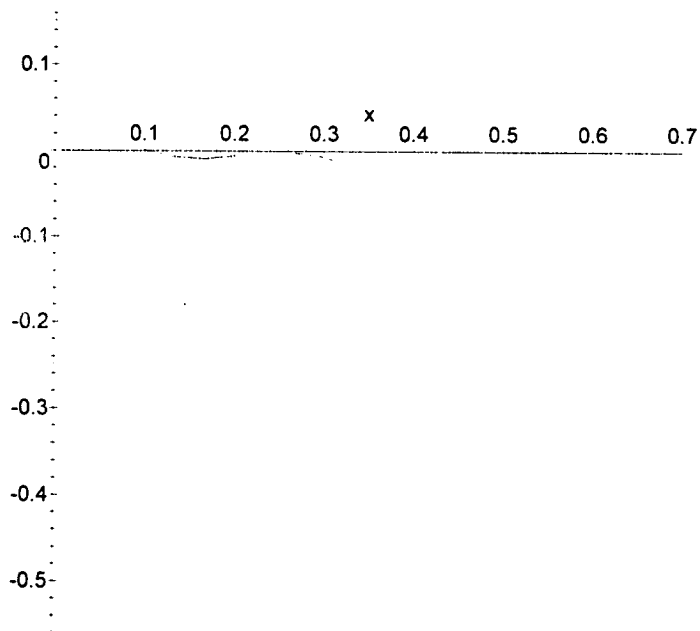
≡ Norberg 3 (verde), GPBM(azul)

```
> f:=[[0.033,0.072],[0.067,0.046],[0.1,0.022],[0.133,0.002],[0.  
167,-0.013],[0.2,-0.027],[0.233,-0.039],[0.267,-0.052],[0.3,-  
0.066],[0.333,-0.084],[0.367,-0.104],[0.4,-0.127],[0.433,-0.1  
52],[0.467,-0.179],[0.5,-0.207],[0.533,-0.236],[0.567,-0.266]  
,[0.6,-0.296],[0.633,-0.327],[0.667,-0.358]]:  
> g:=[[0.033,0.043],[0.067,0.024],[0.1,0.010],[0.133,0.001],[0.  
167,-0.003],[0.2,-0.006],[0.233,-0.039],[0.267,-0.016],[0.3,-  
0.028],[0.333,-0.045],[0.367,-0.067],[0.4,-0.092],[0.433,-0.1  
19],[0.467,-0.149],[0.5,-0.179],[0.533,-0.209],[0.567,-0.242]  
,[0.6,-0.274],[0.633,-0.306],[0.667,-0.340]]:  
> h:=[[0.033,0.061],[0.067,0.030],[0.1,0.004],[0.133,-0.014],[0.  
.167,-0.025],[0.2,-0.027],[0.233,-0.06],[0.267,-0.016],[0.3,-  
0.01],[0.333,-0.01],[0.367,-0.015],[0.4,-0.025],[0.433,-0.040  
],[0.467,-0.059],[0.5,-0.081],[0.533,-0.103],[0.567,-0.132],[  
0.6,-0.159],[0.633,-0.187],[0.667,-0.218]]:  
> k:=[[0.033,0.044],[0.067,0.019],[0.1,0.001],[0.133,-0.007],[0.  
.167,-0.009],[0.2,-0.006],[0.233,-0.039],[0.267,-0.002],[0.3,  
-0.007],[0.333,-0.019],[0.367,-0.036],[0.4,-0.058],[0.433,-0.  
083],[0.467,-0.111],[0.5,-0.140],[0.533,-0.169],[0.567,-0.202  
],[0.6,-0.233],[0.633,-0.265],[0.667,-0.298]]:  
> y:=0.152-x:  
> t:=textplot([[0.6,-0.16,'GPBM'],[0.65,-0.4,'Norberg3']]):  
> p1:=plot([f,y],x=0..0.7,color=[green,black],thickness=[2,1]):  
> p2:=plot([k,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p3:=plot([h,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p4:=plot([g,y],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):  
> p5:=plot([f,k,y],x=0..0.7,color=[green,blue,black],thickness=  
[2,2,1]):  
> display(p1,title=`Norberg3`);
```

Norberg3

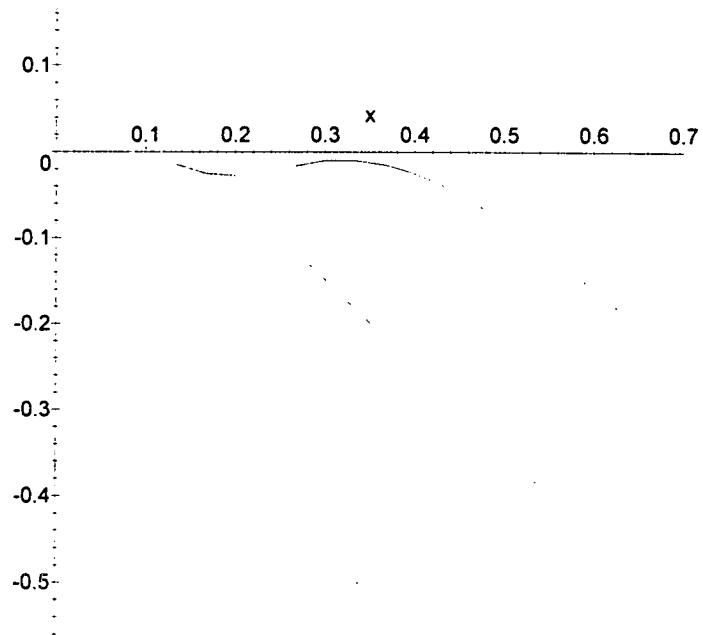


```
> display(p2,title='GPBM-P2Norberg3');  
GPBM-P2Norberg3
```



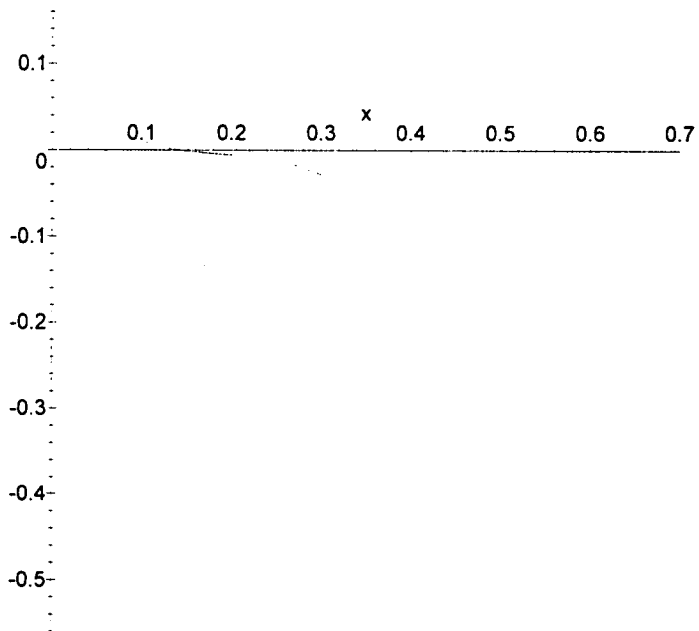
```
> display(p3,title='GPBM-P4Norberg3');
```

GPBM-P4Norberg3



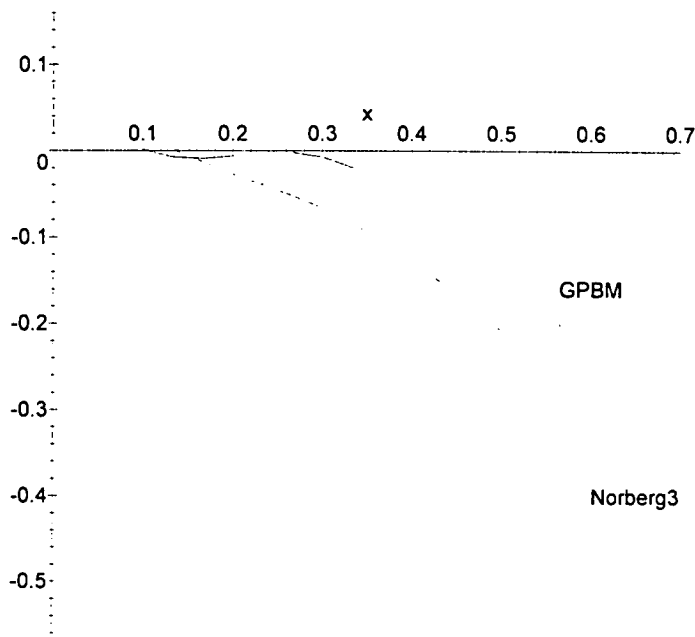
```
> display(p4,title='GPBM-P6Norberg3');
```

GPBM-P6Norberg3



```
> display(p5,t,title='Norberg3-GPBM');
```

Norberg3-GPBM



>

var-holg-Noru75

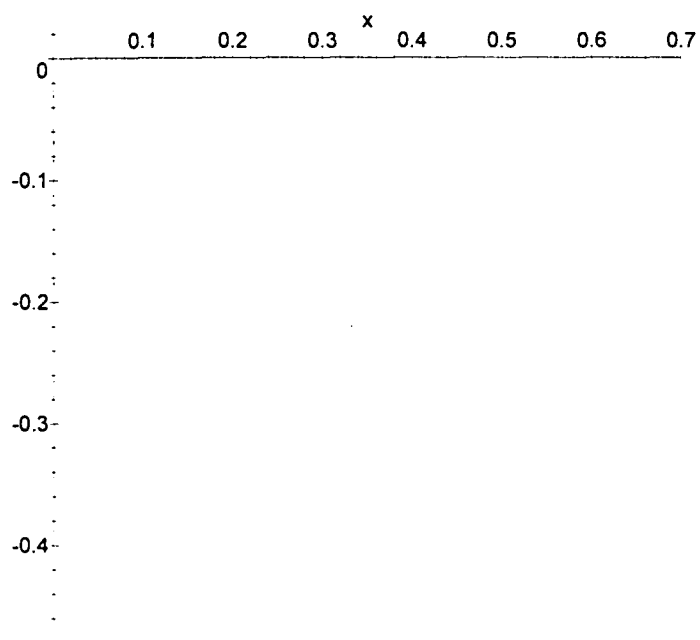
☐ Gráficas para comparar las variables de holgura de Noruega 75 y nuestro modelo.

```
> restart;  
> with(plots):
```

☐ Noruega 75 (verde), nuestro (azul)

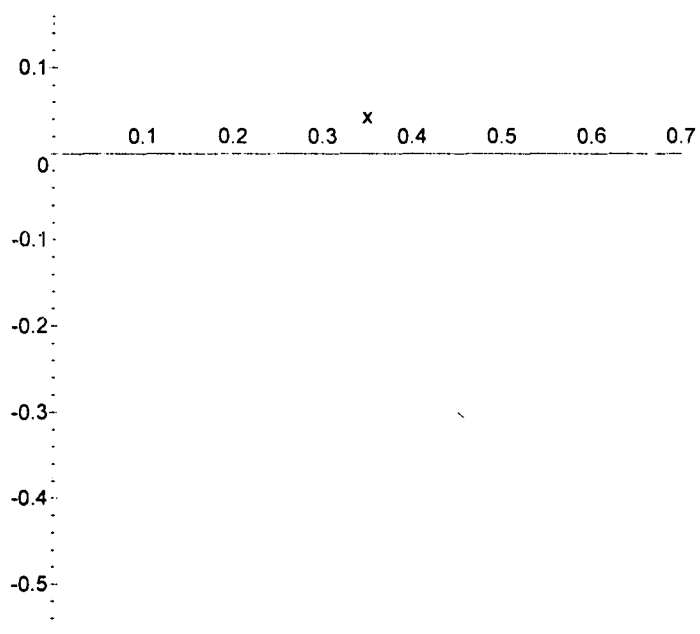
```
> f:=[[0.033,0.014],[0.067,-0.017],[0.1,-0.047],[0.133,-0.076],  
      [0.167,-0.105],[0.2,-0.131],[0.233,-0.155],[0.267,-0.179],[0.  
      3,-0.2],[0.333,-0.221],[0.367,-0.243],[0.4,-0.264],[0.433,-0.  
      287],[0.467,-0.312],[0.5,-0.338],[0.533,-0.365],[0.567,-0.393  
      ],[0.6,-0.422],[0.633,-0.451],[0.667,-0.482]]:  
> g:=[[0.033,0.092],[0.067,0.06],[0.1,0.029],[0.133,-0.006],[0.  
      167,-0.029],[0.2,-0.053],[0.233,-0.072],[0.267,-0.085],[0.3,-  
      0.0914],[0.333,-0.0915],[0.367,-0.088],[0.4,-0.083],[0.433,-0.  
      .081145],[0.467,-0.081147],[0.5,-0.084],[0.533,-0.091],[0.567  
      ,-0.102],[0.6,-0.116],[0.633,-0.132],[0.667,-0.152]]:  
> h:=0.152-x:  
> t:=textplot([[0.7,-0.1,'GPBM'],[0.7,-0.5,'Noruega']]):  
> p1:=plot(f,x=0..0.7,color=green,thickness=2):  
>  
> p2:=plot([f,h],x=0..0.7,color=[green,black],thickness=[2,1]):  
>  
> display (p1,title=`Noruega`);
```

Noruega



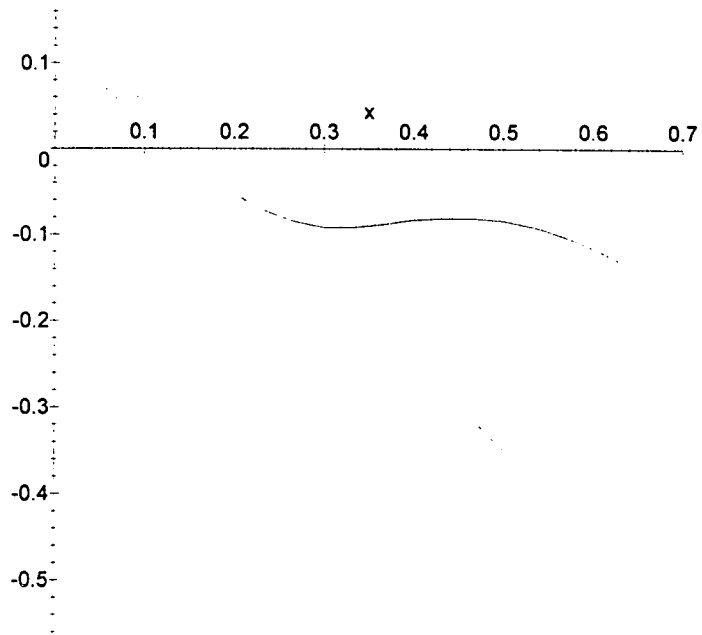
```
> display (p2,title=`Noruega`);
```

Noruega



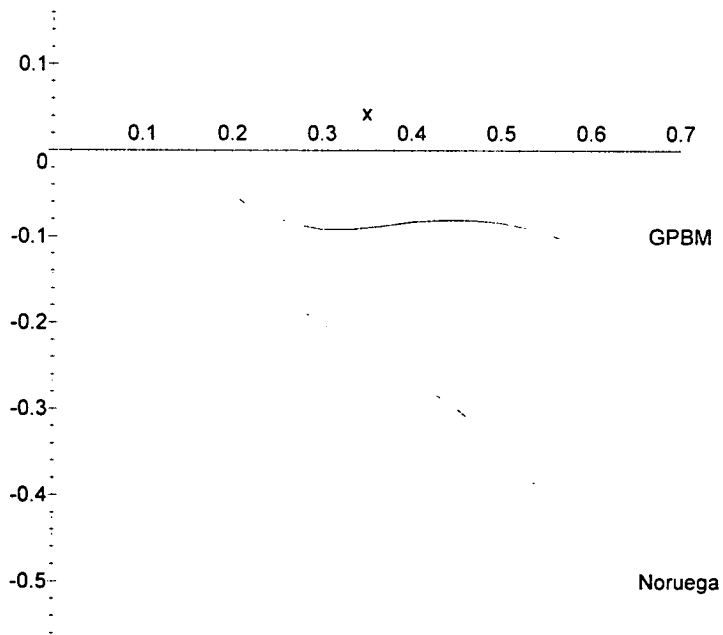
```
> p3:=plot([g,h],x=0..0.7,color=[blue,black],thickness=[2,1]):
> display (p3,title=`GPBM`);
```

GPBM



```
> p4:=plot([f,g,h],x=0..0.7,color=[green,blue,black],thickness=
[2,2,1]):
> display(p4,t,title='Noruega-GPBM');
```

Noruega-GPBM



BIBLIOTECA

>